# Puzzelrubriek

**Aad Goddijn**
OW & OC, RU Utrecht

## Veel reacties op lastige puzzel

Enige tijd geleden werd in deze rubriek gevraagd naar een expliciete formule voor de functie:

$$f: N \rightarrow N.$$

gedefiniëerd door:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{als } n = 0 \\ n - f(f(n-1)) & \text{als } n > 0. \end{cases}$$

D. Hofstadter gebruikt de functie als voorbeeld in *'Gödel, Escher, Bach'*, maar geeft geen expliciete formule. Het ging hem alleen om het definitieschema.

Er zijn veel reacties geweest, blijkbaar wordt zo'n wat lastiger puzzel gewaardeerd. Diverse inzendingen werden besloten met de opmerking dat men er veel plezier aan beleefd had.
Zeven inzendingen gaven de volgende correcte expliciete formule:

$$f(n) = [\alpha(n+1)]$$

waarbij $\alpha$ gelijk is aan $\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$ en de hoekige haken staan voor de entier-functie.
Zes inzendingen gaven ook nog een bewijs dat f inderdaad aan de formule voldoet, of eigenlijk: dat deze formule aan de definitie van f voldoet. Het zijn die van Jaap Calis, Mat Dicker, Mike Staring en Markus Nijmeijer, J. v.d. Berg en G. Hooghiemstra, Koen Pillot, A. Boons. Er zit dus nog groepswerk bij ook.
Eén inzender geeft de juiste formule en heeft die tot n = 10000 met de computer gecontroleerd: meer lezers vertellen dat ze met elektronische hulp tot de formule zijn gekomen. Een opgave als deze biedt daartoe uiteraard goede kansen.
Er waren twee iets afwijkende formules, wel met dezelfde $\alpha$, maar met een andere constante dan 1, en met afronden i.p.v. entier-nemen. Mijn computer verwierp ze, helaas.

## Fibonacci-getallen

Het is diverse puzzelaars opgevallen dat er een eigenaardig verband met de fibonacci-getallen is; f maakt van elk fibonacci-getal het voorgaande fibonacci-getal, bijvoorbeeld: $f(13) = 8$, $f(5) = 3$, $f(21) = 13$.
L. Maassen gaf als eerste het verband volledig aan, door op te merken dat je f(n) als volgt kunt berekenen:

a. Schrijf n als som van een stijgend rijtje fibonacci-getallen.
b. Zoek bij elk gevonden fibonacci-getal het vorige fibonacci-getal (de vorige van 1 is 1).
c. Tel deze fibonacci-getallen bij elkaar en dat is dan f(n).

Voorbeeld:

$$\begin{aligned} f(299) &= f(233 + 55 + 8 + 3) \\ &= 114 + 34 + 5 + 2 \\ &= 185. \end{aligned}$$

Op zich een aardige puzzel om te bewijzen dat deze methode inderdaad werkt!
Ook Koen Pillot heeft deze eigenschap ontdekt. Hij verdient de erepalm, want hij leidt er de expliciete formule voor f uit af. Daarbij wordt natuurlijk gebruikt dat de quotiënten van opeenvolgende fibonacci-getallen goede benaderingen voor $\alpha$ zijn. Vanuit wiskundig oogpunt gezien is zijn oplossing de volledigste, zowel het verband met de fibonacci-getallen als met de gulden snede komen erin aan de orde.

## Een bewijs

In dit blad is weinig plaats voor lange bewijzen en daarom kies ik nu voor het korte, elegante bewijs voor de expliciete formule dat Mat Dicker geeft. In feite kwamen de meeste bewijzen in grote trekken overeen, maar dit bewijs is overzichtelijk door het grafiekje, waarmee het wordt toegelicht.

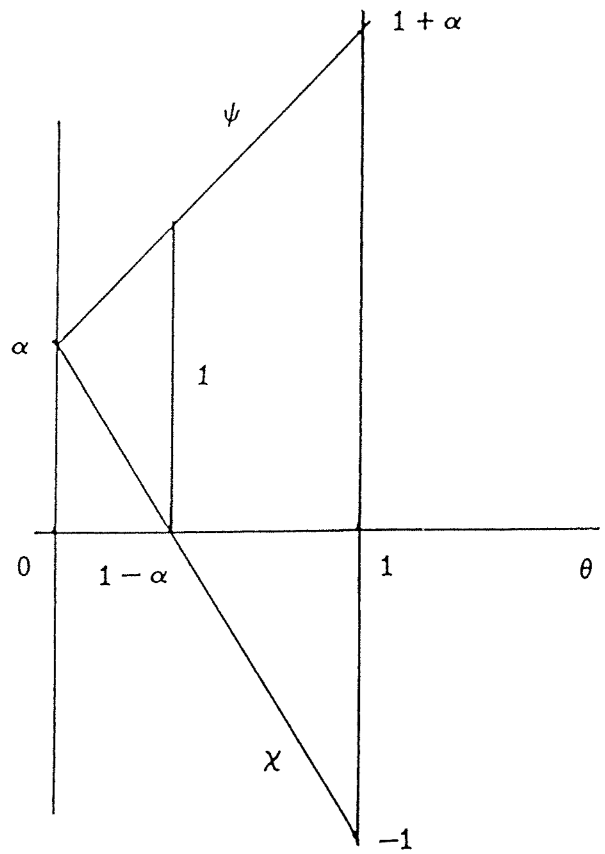
Stel $g(n) = [\alpha(n+1)]$ voor $n \in N$. Duidelijk is $g(0) = f(0)$. Als we nog kunnen aantonen dat g voor $n \geq 1$ aan $g(n) = n - g(g(n-1))$ voldoet, zijn we klaar.
Splits daartoe $\alpha n$ in een geheel en een fractioneel deel: $\alpha n = p + \theta$ met $0 \leq \theta < 1$ en $p \in N$.
Dan is dus $g(n-1) = p$. Merk vast op dat $\theta \neq 1 - \alpha$, omdat $\alpha \notin Q$: zo dadelijk hebben we dat nodig.
Maak nu gebruik van $\alpha n = p + \theta$ en $\alpha = 1 - \alpha^2$ en vind door eenvoudig rekenwerk:

$$g(g(n-1)) = [(n-p) + \chi(\theta)] \text{ met } \chi(\theta) = \alpha - \theta(1+\alpha).$$

En

$$g(n) = [p + \psi(\theta)] \text{ met } \psi(\theta) = \theta + \alpha.$$

Schets nu de grafieken van $\psi$ en $\chi$, als functie van $\theta$.




Nu kunnen we zien:
als

$0 \leqslant \theta < 1 - \alpha$ dan $g(g(n-1)) = n - p$ en $g(n) = p$.

En als

$1 - \alpha < \theta < 1$ dan
$g(g(n-1)) = n - p - 1$ en $g(n) = p + 1$.

(Hier wordt gebruikt: $\theta \neq 1 - \alpha$).
In alle twee gevallen geldt dus $g(g(n-1)) + g(n) = n$.
Daarmee is het bewijs rond.

Schitterend. Vooral wie uren met vervelende ongelijkheden heeft zitten knutselen zal het waarderen.

## Nieuwe puzzels

Hoofdstuk 4 van *'Gödel, Escher, Bach'* heet: Motief en achtergrond. Daarin gaat het o.a. om zg. recursieve verzamelingen. Dat zijn verzamelingen van natuurlijke getallen die door een 'fatsoenlijke' functie opgesomd kunnen worden en waarvan het complement eveneens door zo'n functie opgesomd kan worden. Wat fatsoenlijk is, daar houd ik me nu even buiten. In ieder geval valt het niet mee een onfatsoenlijke functie zomaar te beschrijven. Een lastige stelling is: er bestaan 'fatsoenlijk' opsombare verzamelingen waarvan het complement niet 'fatsoenlijk' opsombaar is.
Een voorbeeld van een recursieve verzameling is de verzameling van de even getallen. De even getallen worden opgesomd door $f(n) = 2n$. Het complement, de verzameling van de oneven getallen, is ook opsombaar, nl. door de functie $h(n) = 2n + 1$.

De nieuwe puzzels vragen allemaal bij gegeven functies f om de complementfunctie h.
Hier komen ze.

1. $f(n) = 3n$. Uw taak is dus het vinden van een expliciete formule voor de functie h die voor $n = 1,2,3,4,5,6$ enz. dus achtereenvolgens de waarden $1,2,4,5,7,8$ enz. oplevert.
2. $f(n) = [1.5n]$.

Dat was al iets lastiger, maar er komt meer!

3. $f(n) = [cn]$, waarbij c een rationaal getal groter dan 1 is.

De volgende twee laten zich nu raden. Ik zeg erbij dat nummer 5 een bijzonder fraai antwoord heeft.

4. $f(n) = [\sqrt{2}n]$.
5. $f(n) = [cn]$, waarbij c een irrationaal getal groter dan 1 is.

Nog één, die weer een heel ander karakter heeft:

6. $f(n) = n^2$. M.a.w. vind een functie die precies de kwadraten overslaat.

## Organisatie

Voortaan nummeren we de puzzels door. Verder geldt er een inzendtermijn, die ligt iets voor de datum waarop nog kopij voor de volgende Nieuwe Wiskrant kan worden ingeleverd. Deze keer is dat 15 januari 1986.

O ja, de prijzen. Voorlopig blijft de hoofdprijs, die door iedereen gewonnen kan worden: het plezier van het oplossen zelf!

## RECTIFICATIE

De puzzel van het julinummer is fout gesteld.
Mat Dicker en Mente Heemstra toonden aan dat de puzzel, zoals gesteld, onmogelijk is. Mente Heemstra corrigeerde zelf de puzzel en kwam inderdaad op het origineel uit dat jaren geleden in het 'Nieuw Archief voor Wiskunde' verscheen.

Hier is hij dan:

Peter zegt tegen Antoon en Elly:
"Ik heb twee getallen in gedachten, gehele positieve getallen beide ongelijk aan 1 en samen niet groter dan 60".
Vervolgens geeft Peter aan Antoon een briefje met daarop het produkt van de twee getallen en aan Elly een briefje met daarop de som van die getallen.
Antoon en Elly zien elkaars briefje niet.
Er ontstaat dan het volgende gesprek:
Antoon zegt: "Ik weet het niet."
Elly zegt: "Dat wist ik."
A: Dan weet ik het nog niet.
E: Dan weet ik het nu wel.
A: Dan weet ik het nu ook.

De vraag is: Wat zijn de twee getallen die Peter in gedachten had?