

Mathematik für alle

Pädagogisches Postulat oder gesellschaftliche Anforderung?

Christine Keitel

Technische Universität, Berlin

Samenvatting

“Wiskunde voor allen” staat centraal in deze beschouwing.

Het concept van Freudenthal, gerealiseerd in de IOWO/OW & OC publikaties, heeft consequenties gehad in vele landen.

Dit succes is gebaseerd op twee ideeën: het centraal stellen van de leerling en niet van de wiskunde en de daardoor ontstane ruimte praktisch te benutten, in die zin dat er met concreet materiaal gewerkt kon worden. Deze omkering van het curriculum-ontwerpproces leidt tot enkele vragen waar in het tweede deel van de voordracht op in wordt gegaan.

Einleitung

Wir feiern heute Hans Freudenthal. Wir ehren den Doyen unserer Zunft, einen, der wie wenige andere dazu beigetragen hat, die Mathematikdidaktik aus ihren ehemals beschränkten Verhältnissen herauszuführen, aber einen auch, dem es dabei stets einige Kurzweil bereitet zu haben scheint, den Weg hin zu unseren gegenwärtigen gloriosen Verhältnissen mit Kritik und nicht selten Spott zu begleiten. Hiermit schon ist angedeutet, daß es etwas an Hans Freudenthal gibt, was uns womöglich mehr noch beeindruckt als seine Verdienste: das ist die Statur einer Persönlichkeit, in der sich wissenschaftliche Kompetenz und sinnliche Unbefangenheit, Autorität und unorthodoxes Urteil, philosophische Haltung und pragmatische Perspektive, Ernsthaftigkeit und Ironie verbinden; eine seltene Erscheinung also in unserer akademisch gefilterten, oft von philologischer Beschränkung geprägten Berufssphäre, vielleicht eine rare, fast ausgestorbene Spezies aus einer Zeit, in der Universalität und Wissenschaft doch noch nicht ganz so große Gegensätze waren, wie das in unserer heutigen der Fall ist. Hieran, denke ich, liegt es vor allem, daß wir nicht nur glücklich sind, dieses Geburtstagsfest mit Hans Freudenthal feiern zu dürfen, sondern daß wir es als einen denkwürdigen Moment empfinden.

Zu einem solchen denkwürdigen Moment eine Rede zu halten, ist eine diffizile Aufgabe, und ich habe lange darüber nachgedacht. Nicht recht angemessen

Summary

“Mathematics for all”; what does it mean and what is possible?

The slogan: “Mathematics for all” illustrates clearly the concept of Freudenthal’s ideas that were worked out by IOWO/OW & OC in numerous publications.

The success of this work had consequences in different countries where the discussion on the subject was activated. How was this successful approach achieved? In the first place by not starting from the point of mathematics when developing a curriculum, but placing the child in a central place. This leads to mathematics developed by the child itself, leaving time to practical work also.

Questions arising from this approach and about the essence of math for all are discussed.

erschien mir, hier nur eine mehr rezitierende Exegese Freudenthal’scher Schriften oder Erkenntnisse liefern zu wollen, oder ein von Freudenthal angesprochenes Detailproblem durch eine eigene Detailuntersuchung auszubreiten.

Ich habe vielmehr vor, mich auf ein überaus heikles Terrain zu begeben: auf ein Terrain nämlich, das hier in unmittelbarer Nähe zum IOWO bzw. der Gruppe OW & OC einer gewissen “Eindimensionalität” verdächtig ist.

Wie wir wissen, ist Freudenthal immer daran gelegen, die Räume unserer Wissenschaft – oder vielleicht auch nur vermeintlichen Wissenschaft – gut durchlüftet zu halten; und er hat nicht nur in verstaubten Klassenzimmern die Fenster aufgestoßen, sondern auch in den klimatisierten oberen Etagen der Wissenschaft, wo viele meinen, daß man die Fenster gar nicht öffnen solle. Er hat vor allem die Selbstgenügsamkeit einer abgehobenen Forschungs- und Diskussionsebene aufs Korn genommen, die in ihrer Tiefgründigkeit oder Allgemeinheit Gefahr läuft, immer mehr das aus den Augen zu verlieren, was in der Praxis des Mathematikunterrichts auf der Tagesordnung steht. Nun sehe ich aber hier einen Unterschied zwischen unserem verehrten Meister Freudenthal und uns Adepten, die ein wenig versuchen, in seine Fußstapfen zu treten: Hans Freudenthal erscheint mir hier ähnlich jenen Baumeistern und Malern der Bauhauszeit, die von den esoterischen Gefilden der Kunst weg zur gesellschaftlichen Praxis und technischen Funktionalität hinstrebten: sie selbst konnten postulieren was sie wollten; was sie

entworfen auf der Basis einer umfassenden künstlerischen Bildung, wurde doch immer Kunst. Aber wehe, ihre Forderungen wurden beim Wort genommen und ohne jene vormaligen künstlerischen Fundamente zur herrschenden Praxis, so mußte das herauskommen, was nach dem Kriege beispielsweise im Bereich der Architektur herausgekommen ist.

Auf dem Gebiete der Mathematikdidaktik entspricht dem der ganze Wust einer orientierungslosen, empirischen Forschung, wie er in der Blüte der amerikanischen Curriculumreformen angefallen ist, und in vermindertem Umfange noch produziert wird; aber andererseits ist auch so manches wohlgemeinte und mit viel Engagement betriebene kleinere, unmittelbar aus der Schulpraxis entstandene Curriculumprojekt auf ähnliche Weise gescheitert: weil in ihnen Postulate verwirklicht werden sollten, die den umfassenden Hintergrund, auf dem sie vielleicht ursprünglich formuliert worden waren, verloren hatten.

Es bedarf also einer stetigen Anstrengung, den reichen theoretischen Kontext, aus dem eine Neuerung erwachsen ist, nicht nur explizit zu machen, sondern auch explizit zu erhalten. In seinen Schriften läßt Freudenthal uns Facetten eines weit gefächerten fachlichen pädagogischen, philosophischen und sozialen Bezugsfeldes erkennen, einen Horizont humaner Bildung, der sein oft unorthodoxes Wirken in der Praxis steuert, der auch seinen essayistisch-lockeren Zwischenrufen Gewicht und Richtung gibt. Uns, die wir nicht auf einer so umfassenden Basis selbstverständlich aufbauen können, bleibt gar nichts anderes übrig, als immer wieder zu versuchen, uns größerer Zusammenhänge zu versichern, Orientierungen für Ziele und Legitimationen zu suchen. In diesem Sinne nun scheint es mir dem heutigen Anlaß angemessen, und vielleicht auch dem unkonventionellen Sinne unseres Jubilars gemäß, entgegen, aber im Bewußtsein seiner Abneigung gegen die abstrakten Sphären in der Mathematikdidaktik hier einige allgemeinere Überlegungen anzustellen. Damit komme ich endlich dazu, meine Ausführungen zu beginnen.

Mit dem Postulat "Mathematik für alle und jedermann" hat Freudenthal die Arbeit des IOWO und der späteren Gruppe OW/OC überschrieben. Dieses Motto bezeichnet vorzüglich die Spannweite seines Denkens und Wirkens, und zugleich ist es die wohl prägnanteste Formel, auf die man – wenn schon nicht die praktischen Errungenschaften der Schulmathematik – so doch wenigstens die Einsichten der Mathematikdidaktik dieses Jahrhunderts bringen kann. Freilich sind auch diese Einsichten nicht allgemein verbreitet, und vor allem muß man zugeben, daß diejenigen, die sie teilen, damit auch nicht annähernd das Gleiche meinen.

"Mathematik für alle" ist eine umfassende Formel, so umfassend, daß gut und gerne der Gesamtkomplex der Reformen des Mathematikunterrichts in den USA und in Europa in der Zeit zwischen 1950 und 1975 unter ihr Platz findet: Schon die frühesten Versuche in

diesem Reformzyklus, Curriculumentwicklungsprojekte wie UICSM und SMSG, zielten auf so etwas wie eine "Mathematik für alle", wenn sie zwar eine forciert wissenschaftsorientierte Schulmathematik vertraten, gleichwohl aber von der Überlegung ausgingen, diese allen oder fast allen Schülern vermitteln zu müssen und vermitteln zu können. Am anderen Ende des Spektrums finden wir Ansätze, die zwar eher auf die "Mehrheit" als auf "alle" zielen, aber damit mehr ihre Gewichtung als den beabsichtigten Geltungsbereich charakterisieren: sie äußern sich in Projekten wie USMES oder MMCP, die Mathematik von realen, oft sozialen Kontexten her erschließen und sich weitgehend auf Mathematik als Hilfsmittel in Alltagsproblemen beschränken.

Die Vielfalt all dieser Bemühungen, eine Schulmathematik zu entwerfen, die eine "Mathematik für alle" sein könnte, resultiert aus der Verschiedenheit der ihnen zugrunde liegenden konzeptionellen Perspektiven. Ich zitiere eine Auflistung solcher Perspektiven, wie Jan de Lange sie zusammengestellt hat:

"Sollten wir ins Auge fassen:

- Was Kinder tun können?
- Was Lehrer tun können?
- Was vom mathematischen Standpunkt her wichtig ist?
- Was wir in der Gesellschaft brauchen?" (de Lange 1984, S. 12).

Ein wesentliches Merkmal dieser Perspektiven ist, daß sie sich zwar teilweise untereinander verbinden lassen, teilweise aber immer auch ausschließen. Und so bewegt auch nach all den Programmen und Projekten, Untersuchungen und Diskussionen die Frage weiterhin die Gemüter, was "Mathematik für alle" sei oder sein könne.

Immerhin darf man es als einen Fortschritt ansehen, daß dieser Komplex heute klarer herauspräpariert ist als noch vor 12 Jahren, und daß die Forderung einer "Mathematik für alle" in den meisten westlichen Industrieländern zu den stärksten Gegengewichten gegen die konservativen Strömungen in der Bildungspolitik gehört, ja in dem einen oder anderen Lande vielleicht sogar Bestandteil der offiziellen Bildungspolitik ist. Daß das so ist, ist in weitem Maße dem Wirken des IOWO bzw. der Gruppe OW/OC zu danken. Zu recht wird heute vielerorts, wo von "Mathematik für alle" die Rede ist, deren Arbeit zu Rate gezogen, werden die Erfahrungen der Schöpfer dieser Schulmathematik in Anspruch genommen.

Dabei ist überraschend deutlich geworden, daß der Art und Weise, wie das IOWO-OW/OC die "Mathematik für alle" interpretiert, in einem noch ganz anderen Maßstabe Bedeutung zukommt, als man das bis dahin allgemein zu sehen gewohnt war: Wir pflegen ja das Wort "alle" auf die Mitglieder unseres jeweiligen Gemeinwesens, höchstens unseres Kulturkreises zu beziehen, wobei das "alle" einen demokratischen Anspruch gegen die Zuordnung bestimmter Bildungsgänge zu bestimmten sozialen Gruppen setzt. Wie sich

aber gezeigt hat, ist die "Mathematik für alle" des IOWO zu einem der interessantesten Modelle für jene Länder geworden, die auf der Suche nach einem Bildungskonzept sind, das ihre eigenen kulturellen Traditionen und ihren heutigen Erfordernissen und realen Möglichkeiten entspricht. Hier scheint – und das halte ich für äußerst bemerkenswert – das Konzept des IOWO einen Weg zu weisen, wie "Entwicklungshilfe" im Bildungsbereich (die, im engeren Rahmen gesehen, die Lehrertätigkeit dem Schüler gegenüber ja auch ist) eine Hilfe zu autonomer Entwicklung sein könnte. Ich hoffe, daß ich im weiteren noch deutlicher machen kann, worauf diese Modellwirkung beruht.

Für unseren engeren Umkreis sei zunächst festgestellt, daß der Erfolg des IOWO-Konzeptes *auch* in der Beharrlichkeit und Konsequenz begründet liegt, mit der, unbeirrt von Moden, Trends und Konjunkturen, an der "Mathematik für alle" festgehalten wurde. Damit ist es schließlich gelungen, dieses Postulat in erfolgreiche Praxis zu verwandeln, die ihre Substanz aus einem inzwischen ebenso reichen wie sorgfältig konstruierten und erprobten Curriculummaterial bezieht. Die "Mathematik für alle", für die das IOWO-OW.OC steht, ist nicht länger nur ein Programm, sie ist – und wird es hier in den Niederlanden offenbar immer mehr – Schulrealität, mit der Überzeugungskraft, die das Faktische der Utopie voraus hat.

Hinter diesem Erfolg stehen, soviel ich sehe, vor allem zwei Ideen, die diese Entwicklung ermöglicht haben, und beide tragen sehr deutlich die Züge Freudenthalschen Denkens: Da ist erstens die ebenso simple wie produktive Umkehrung des Ausgangspunktes der Curriculumentwicklung gegenüber den oben erwähnten Ansätzen: während jene von den möglichen Perspektiven des Lehrens von Mathematik ausgehen, fragt dieser, wie der Schüler denn Mathematik lernt, und versucht, das Lernen entsprechend einzurichten. Es ist offensichtlich daß damit eine Menge unproduktiver, determinierender oder gar blockierender Vorgaben, die jene Ansätze mit sich bringen, aus dem Weg geräumt werden – für den schwierigen Beginn jedenfalls. Einengende und festlegende Fragen wie die, was wohl kindgemäß, was vermittelbar sei, was elementar und/oder unverzichtbare mathematische Gegenstände und ob diese mit den elementaren Begriffen des Kindes identisch oder vereinbar seien, was gar zu vermitteln gesellschaftlich nützlich oder notwendig, und wie dies vorab zu bestimmen sei – all das verschwindet wie von Zauberhand. Ein freies Feld tut sich auf, zunächst fürs Beobachten, später für eine provisorische Möblierung, für Entwickeln, Probieren, Prüfen, Verbessern. Und eben dies ist die zweite Idee: daß der so gewonnene Spielraum *praktisch* genutzt wird. Erst diese beiden Ideen zusammen machen das Besondere dieses Ansatzes aus.

Der Gedanke, von den Eigentümlichkeiten des kindlichen Lernens auszugehen, um das Lehren zu organisieren, ist nicht neu; er liegt aller kognitionspsychologisch orientierten Curriculumentwicklung zu Grunde. Während diese aber ihre Konzeption theoretisch ent-

wickelt und von daher deduzierend zur Ebene der Konkretisierung hinabsteigt, setzt die Curriculumentwicklung des IOWO auf dieser Ebene ein. Freudenthal stellt das kognitionspsychologische Konzept der Curriculumentwicklung vom Kopf auf die Füße; von da aus gesehen ist es ja in der Tat ein kurioses Verfahren, aus einer psychologischen Theorie – noch dazu im Fall Piagets einer, die ganz anderen Zielen dient – Prinzipien der Curriculumkonstruktion abzuleiten, didaktische Vehikel der Vermittlung (etwa im Sinne der Dienesseschen Verkörperungen) zu erfinden und mit konkretem Stoff auszustatten, diese in die Schulen zu geben und endlich am Schüler zu erproben. Der umgekehrte Weg des IOWO ist, dem Schüler ein nach Beobachtung und Erfahrung mutmaßlich geeignetes Material in die Hand zu geben, zu sehen, was sich daraus entwickelt oder entwickeln läßt und es so lange weiter zu formen, bis es optimal geeignet scheint, eine vielseitige, aber offene und zugleich strukturierte Lerntätigkeit des Schülers aufzuschließen. So ist ein Baustein gewonnen, dem andere auf ebensolche Weise hinzugefügt werden.

Bemerkenswert scheint mir – und auch dies ist ein sehr Freudenthalscher Zug – daß dieses Verfahren der Curriculumentwicklung eine ausgeprägte Verwandtschaft mit dem zeigt, was man als die Strategie mathematisierender Tätigkeit bezeichnen könnte, ebenso aber damit, wie Freudenthal das Herangehen des Kindes an seine mathematischen Gegenstände beschreibt. Hierin erweist sich eine Ganzheitlichkeit des Konzeptes, die wohl, jenseits der jeweiligen Handlungsebenen, aus der Selbstreflexion seines Urhebers entspringt.

Was geschieht weiterhin mit den Bausteinen des Curriculum? Auch die Art und Weise, wie sie in der Unterrichtspraxis der Niederländischen Schulen wirksam werden, ist bemerkenswert, nicht zuletzt als Lehrstück über praktische Effizienz unter institutionellen Bedingungen, die, zumal seit das IOWO aufgelöst wurde, wohl nicht selten dazu zwangen, aus der Not eine Tugend zu machen.

So konkret und detailreich die Unterrichtsmaterialien Lernsituationen beschreiben, und so sehr alles um die Aktivität des Schülers kreist, es handelt sich hier nicht um Schülermaterialien. Auch Arbeits- und Aufgabenbögen, die zu den Materialpaketen gehören, und die der Lehrer nach seinem Dafürhalten einsetzen soll, bedeuten nicht, daß hier Selbstunterricht angestrebt wäre. Die Materialien sind für die Hand des Lehrers bestimmt, dem sie sich als Erweiterungen des ihm sonst zur Verfügung stehenden Handwerkzeuges anbieten, folgerichtig betrachten sich die Curriculumkonstrukteure als Ingenieure.

Die Rolle des Lehrers steht, schon im Stadium der Materialentwicklung, im Zentrum dieser Konzeption. Der Begriff des Mathematisierens, der dem zu Grunde liegt, was die Schüler als Mathematik lernen sollen, besagt, daß die sinnvolle Aktivität des Schülers untrennbar zum Gegenstand des Lernens gehört und damit selbst schon Teil des Unterrichtsergebnisses ist.

Die Leistung des Lehrers ist die mathematisierende Tätigkeit des Schülers. – Das, was der Lehrer leistet, entscheidet darüber, wie sinnvoll die Arbeit des Schülers ist und wie weit er auf der – nach oben offenen – Skala vom Tun zum Mathematisieren voranschreitet.

Konsequenterweise ergänzt ein umfangreiches Lehrerbildungsprogramm die Materialeinheiten. Zunehmend gehen Vorstellungen des IOWO bzw. OW/OC ein in den Wissens- und Handlungshintergrund der professionellen Einstellung niederländischer Mathematiklehrer; und zugleich wird das Arbeitsmaterial weiterverbreitet, indem es in geeigneter Adaption zunehmend Aufnahme in Schulbücher findet.

Entwickelt sich nun unter diesen Umständen ein größerer Zusammenhang der curricularen Einzelelemente, zeigt sich so etwas wie die integrierende Architektur des Curriculum? Soviel ich sehe, hat das IOWO bzw. OW/OC es weitgehend vermieden, Entwürfe eines Gesamtgebäudes bekannt zu machen. Will man im Bild bleiben, so könnte man sagen, daß das IOWO sich bisher eher darauf beschränkt hat, mit seinen curricularen Bausteinen besonders wichtige, besonders problematische und vielleicht auch besonders auffällige Teile des bestehenden Systems zu ersetzen. Dies ist ein kluges und pragmatisches Verfahren angesichts der begrenzten Möglichkeiten, wie auch angesichts der Neubauruinen, die den Weg der Reformen anderswo säumen. Dennoch ist nicht zu verkennen, daß mit der Sanierung alter Partien doch auch Neues und Anderes sichtbar wird, daß allmählich eine Konstruktion sui generis entsteht. Und damit stellen sich auf einmal Fragen, die sich bei der Erarbeitung kleinerer Einheiten nicht notwendig stellen, Fragen nach dem Ganzen, nach seinen Zielen und nach seiner individuellen und gesellschaftlichen Relevanz. Im Detail mag es für die Praxis ausreichen, daß dem Lehrer und dem Schüler die Relevanz ihrer Arbeit evident erscheint, im größeren Zusammenhang wird man nicht umhin können zu fragen, worin sie besteht und worauf sie sich gründet.

Ich sagte vorhin, daß der IOWO-Ansatz der Curriculumkonstruktion eine Reihe sehr problematischer Fragen aus dem Wege schafft. Einige dieser Fragen, solche, die sich auf das Lernen selbst beziehen, werden praktisch erledigt, andere aber sind nur umgangen. Die Umkehrung des Ausgangspunktes der Curriculumentwicklung, von der ich sprach, ist genaugenommen keine Umkehrung: Die einen Ansätze fragten nach dem Was? und Wozu?, der IOWO-Ansatz fragt nach dem Wie?. Die Fragestellungen schließen sich nicht aus, und sie machen sich wechselseitig nicht entbehrlich. Je mehr das curriculare Gebäude wächst, desto unabweisbarer stellt sich die Frage Was? und Wozu?, unabweisbar deshalb, weil ihre Beantwortung, implizit oder explizit, intuitiv oder begründet, notwendig die inhaltliche Substanz des Curriculum mitbestimmt. Was also soll die "Mathematik für alle" leisten?

Mir hat sich diese Frage, und damit der Wunsch, mich hier mit diesem Thema zu beschäftigen, neu gestellt

anlässlich eines Ereignisses, das mich vollkommen unerwartet traf: Es handelt sich um das Abhandenkommen eines Fragezeichens.

Sie, die Sie dem IOWO bzw. OW/OC nahestehen und seine Arbeit mit Anteilnahme verfolgen, werden erraten, worauf ich anspiele: Ich spreche von dem subtilen Unterschied in den Titeln zweier Aufsätze von Jan de Lange: "Geometry for all: no geometry at all?" (1984), und "Mathematics for all is no mathematics at all." (1985). Ich verkenne nicht, daß es sich beide Male um ein Wortspiel handelt, das für sich in Anspruch nehmen kann, metaphorisch, nicht wortwörtlich verstanden zu werden. In diesem Sinne wäre der Übergang von der Frage zur Aussage eine Zuspitzung der Pointe, aber mir scheint doch, und ich finde das vor allem im Schlußabsatz des zweiten Aufsatzes bestätigt, daß es sich hier um eine Äußerung handelt, die ernst genommen werden will oder wenigstens ernst genommen werden darf.

Nehmen wir sie also einmal wörtlich. An die Stelle des einen, fortgefallenen Fragezeichens treten viele neue. Die Mathematik für alle, die keine Mathematik mehr ist, ist dies noch dasselbe, was ursprünglich gewollt war? Klingt da Resignation mit? Wenn es neben einer Mathematik für alle, die keine Mathematik mehr ist, für einige doch noch eine Mathematik geben muß, die Mathematik bleibt, ist die Mathematik für alle dann noch Mathematik für alle? Gäbe es vielleicht auch eine Mathematik für alle, die Mathematik bleibt? Sollte es sie geben?

Es ist evident, daß diese Fragen auch mit dem Wie? des Mathematiklernens zu tun haben, aber ebenso viel auch mit dem Was? und Wozu?

Ich will versuchen, eine Antwort auf diese Fragen skizzenhaft zu entwerfen. Dazu scheint es mir notwendig, den Blickwinkel ein wenig weiter zu fassen. Zu diesem Zwecke möchte ich eine Alternative einführen, vor die Peter Damerow und Ian Westbury die weitere Entwicklung der Mathematikdidaktik überhaupt gestellt sehen. Sie kleiden sie in folgende Frage: "Wollen wir das hochgradig selektive System und die Methodik des traditionellen Mathematikunterrichts erhalten und dafür die privilegierte Stellung der Mathematik als Kernfach des Schulcurriculum preisgeben; oder wollen wir diese besondere Stellung der Mathematik erhalten, aber Wege suchen, sie allen zu vermitteln?" (Damerow und Westbury 1985, S. 3).

Was bedeutet diese Alternative? Damerow und Westbury argumentieren folgendermaßen: Die Standards einer im Prinzip wissenschaftsorientierten Schulmathematik, etwa im Sinne der alten Gymnasialmathematik oder der neuen Mathematik (der frühen Ausprägung) sind nicht als Mathematik für alle aufrecht zu erhalten. Hält man an ihnen fest, so verliert diese Mathematik ihren zentralen Platz im Curriculum, sie wird zu einem schmalen Spezialfach mit der Ausrichtung auf besondere Berufsgruppen. Nur hier behalten die zentralen Ideen der Mathematik, ihre begriffliche

Struktur, ihre grundlegenden Beweismethoden einen Platz im Curriculum, die Schulmathematik erhält oder steigert durch sie ihre selektive Funktion. Diejenigen mathematischen Bereiche aber, die "für alle" oder hier besser: für die große Mehrheit "relevant" wären – das wären wahrscheinlich die instrumentellen Aspekte von Mathematik in Anwendungskontexten – würden in Nachbarfächer wie Physik, Biologie, Geografie, Technik und Arbeitslehre usw. abgedrängt bzw. von diesen mitverwaltet.

Was nun den zweiten Teil der Alternative betrifft, so wäre darunter eine Schulmathematik zu verstehen, die nicht mehr einer Bildung als sozialem Privileg zugehörte, sondern einer Allgemeinbildung im Sinne einer Bildung für alle. Sie sich anzueignen, müßte daher für alle relevant sein. Gleichwohl hieße das, soll diese Mathematik nicht mit dem in eins fallen, was unter dem ersten Teil der Alternative als Mathematik für die Mehrheit bezeichnet wurde, daß diese Mathematik ein wesentliches Moment der traditionellen, selektiven Schulmathematik nicht preisgäbe, die Perspektive auf Mathematik als Theorie nämlich. Dieses Moment hätte so stark ausgeprägt zu sein, daß auch die Mathematik für die wenigen in ihr integriert sein könnte, so daß auch diese von dem profitierten, was die Vorzüge der Mathematik für alle ausmacht. – In diesem zweiten Teile der Alternative wäre also diejenige Schulmathematik aufgehoben, die Mathematik für alle wäre und doch Mathematik bliebe.

Damerow und Westbury, scheinen der Realisierbarkeit einer solchen Mathematik unter den gegenwärtigen Bedingungen skeptisch gegenüberzustehen; sie beschränken sich darauf, Aspekte der komplexen Problematik aufzuzeigen. Ich möchte da ein wenig weiter gehen: Ich glaube nämlich, und ich hoffe das im weiteren zu zeigen, daß die Schulmathematik des IOWO bzw. OW/OC ihrer Tendenz und ihren Möglichkeiten nach diese Mathematik für alle, die Mathematik bleibt, sein könnte.

Mir scheint, daß in diesem Zusammenhange zwei Fragen zu untersuchen sind: Erstens, wie kann diese Mathematik aussehen, wenn man anerkennt, daß die bisherigen Versuche, eine wissenschaftsorientierte Schulmathematik für alle verpflichtend zu machen, wenn nicht gescheitert, so doch auf fast unüberwindliche Hindernissen gestoßen sind? Zweitens, und das ist die dahinter stehende entscheidende Frage: Inwiefern kann eine solche Mathematik für alle relevant sein, wenn man anerkennt, daß die frühere wissenschaftsorientierte Schulmathematik ihre Relevanz für die große Mehrheit der Schüler niemals überzeugend hat nachweisen können?

Doch zunächst zurück zum ersten Teil der Alternative.

Schon früher sind Forderungen nach einem Mathematikcurriculum für die Mehrheit erhoben und realisiert worden, die auf die wie immer verstandenen Bedürfnisse dieser Mehrheit hin orientiert waren. Es versteht sich, daß Versuche, mit einiger Radikalität die Interessen dieser Mehrheit wahrzunehmen, nicht in dem großen Maßstabe erfolgreich waren wie solche

Curricula, die diese Bedürfnisse mit dem gesellschaftlichen – d. h. hier im allgemeinen ökonomischen Nutzen – identifizierten.

Ich gebe ein eher neutrales Beispiel, das Beispiel eines Curriculum, das niemandem gerecht wird: die "general mathematics"-Kurse der amerikanischen High-school.

Die "general mathematics" stellen ein Minimalprogramm für die mathematischen Pflichtkurse der High-school dar (3 Jahreskurse für die Stufen 7–9 und 1 Jahreskurs für die Stufen 9–12). Es wendet sich vorzugsweise an jene, die nicht den jeweils weiterführenden Bildungsgang, also die Senior-Highschool bzw. das College, anstreben. Vor allem auf der Sekundarstufe II wurde der "general mathematics"-Kurs der populäre Ersatz für den anspruchsvolleren Algebra-Kurs der 9. Jahrgangsstufe. Das Programm wurde 1923 in einer Zeit großer Bedrängnis der Fachdidaktik von dieser selbst als eine Art Auffangposition eingeführt. Mit einer trivialen, aber dogmatisch vertretenen social needs-Orientierung auf der einen Seite, die von der Efficiency-Bewegung in den USA ausging, und mit der Kindorientiertheit der progressiven Bewegung auf der anderen wirkten zwei komplementäre wissenschaftsfeindliche Strömungen bestimmend auf das Curriculum ein, die dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht nur noch wenig Raum beliesen. Dementsprechend enthalten die "general mathematics" eine Zusammenfassung von Stoffen aus Arithmetik, Algebra, informeller Geometrie, Flächen- und Körperberechnungen, beschreiben der Statistik und grafische Darstellungen in Anwendungszusammenhängen. Das Inhaltsverzeichnis eines Lehrbuchs für die 8. Stufe des Jahres 1937 lautet beispielsweise:

1. "mathematics and the community";
2. "the merchant and the community";
3. "the bank and the community";
4. "taxes and other community funds";
5. community planning;
6. the community and its neighbours;
7. an inventory of the years works.

Die Betonung in dem Begriff der "social needs", die in den 20er Jahren stark auf "needs" gelegen hatte, ist hier, unter dem Einfluß der Progressiven weitgehend auf "social" übergegangen.

Ph. S. Jones schreibt darüber im NCTM-Jahrbuch 1970: "Bis zum heutigen Tag ist dieser Kurs (9. Jahrgangsstufe) mangelhaft bestimmt und wird oft dürftig oder widerwillig gelehrt. Die Art und Weise der Auswahl der Fächer für diesen Kurs hat die notorischen Probleme mit sich gebracht: Schüler mit geringem Interesse und weitgestreuten, meist niedrigen Fähigkeiten und Lehrer, die auf Grund ihrer Fachherkunft und ihrer Ausbildung weder auf ihn vorbereitet noch an ihm interessiert sind." – Ich glaube, daß diese Art von Mathematikunterricht dem recht nahekommt, was "mathematics for all is no mathematics at all" auch bedeuten kann.

Dasselbe wird man auch von dem traditionellen Rechenunterricht sagen können, wie er beispielsweise

in Deutschland an der alten Volksschule und später an der Hauptschule bestand: Es handelte sich dabei um das Einüben von Rechentechniken und ihrem Gebrauch in einfachen Anwendungszusammenhängen, die als "Sachrechnen" und "Bürgerliches Rechnen" bezeichnet wurden. Dies waren allgemeine Grundrechenarten, Dreisatz, Prozentrechnung, Zinsrechnung, Mischungsrechnung, Verhältnisrechnung usw. Dieser Rechenunterricht war absichtsvoll und klar gegen den Mathematikunterricht der höheren Schulen abgesetzt: Er zielte auf das Operieren im *Vorfeld* der Mathematik, er war Mathematik des *Vorfeldes*.

Dieser Begriff des mathematischen Vorfeldes, der ebenfalls von Damerow eingeführt wurde (Damerow 1984, S. 4 ff.), ist meines Erachtens sehr geeignet, die komplexen Beziehungen von Mathematik und mathematischen Anwendungen zu klären. Ich halte es im Hinblick auf das Folgende für zweckmäßig, diesen Begriff hier näher zu erläutern:

Das Vorfeld der Mathematik bezeichnet Felder gesellschaftlicher Probleme, die zugleich "immanent mathematischer Natur" sind und daher mit mathematischen Mitteln sinnvoll angegangen werden können. Die Mathematik ist historisch durch die Auseinandersetzung mit solchen Problemstellungen entscheidend geprägt und weiterentwickelt worden. Andererseits hat der Einsatz der Mathematik in diesen Problembereichen eine Fülle von Instrumenten und Verfahren hinterlassen, deren Zweck es ist, mit Hilfe der Mathematik gefundene Problemlösungen der Gesellschaft allgemein verfügbar zu machen. Es geht dabei um die rationelle Bewältigung von Problemen, mit der die gesellschaftliche Arbeitsteilung auf das engste verknüpft ist, Arbeitsteilung auch zwischen dem, der Mathematik beherrscht, und den anderen.

Die Aufgabe des Einsatzes von Mathematik besteht dabei im wesentlichen darin, zunächst mit ihrer Hilfe einen gesicherten Lösungsweg zu erarbeiten und sodann Verfahren zu entwickeln, die den mathematischen Lösungsprozeß gewissermaßen instrumentell einkapseln, so daß das Lösungsverfahren schließlich zuverlässig ohne die mathematische Kompetenz ausgeführt werden kann, die zu seiner Entwicklung notwendig war. Als Beispiel führt Damerow die Erfindung des Meßtisches in der Feldmessung an, eine mathematische Leistung, die die Feldmessung von eben der Voraussetzung speziellen mathematischen Wissens ablöst. Mathematik dieses Vorfeldes ist also der sinnvolle Gebrauch von Mathematik in prästrukturierten Kontexten und Verfahren, nicht notwendiger – aber zureichenderweise "no mathematics at all".

Ein wesentliches Charakteristikum dieses Vorfeldes der Mathematik ist, daß an ihm zwei disparate Sinn – oder Bezugsebenen, die in ihren Zielen und Mitteln völlig verschieden sind, diejenige nämlich der gesellschaftlichen Realität und diejenige der Mathematik, in einem gemeinsamen Gegenstande in Beziehung treten. Historisch bezeichnet dieses in Beziehungen-Treten den Moment, in dem ein akutes gesellschaftliches Problem und ein dementsprechend hinreichend entwickeltes mathematisches Denken zusammenkommen: Die Babylonier hatten das Problem der Feldmes-

sung, aber sie konnten den Meßtisch nicht erfinden; ihnen fehlte die entwickelte euklidische Geometrie, darüber hinaus aber – und auch das gehört entscheidend dazu, eine hinreichend entwickelte Technik, um Apparate der hier geforderten Art konzipieren zu können.

Kehren wir nach diesem Exkurs zum traditionellen Rechenunterricht der Volks- und Hauptschule zurück, so wird deutlich geworden sein, warum in ihm das Trainieren der reinen Verfahrensschemata, so stumpfsinnig es auch sei, relativ problemlos vonstatten geht, die Schwierigkeiten aber sogleich beginnen, wo es um den Rückbezug dieser Schemata sowohl auf Anwendungskontexte wie auf die Mathematik bzw. den sinnvollen Einsatz dieser Schemata aus diesen Kontexten heraus geht. Denn wie wir gesehen haben, stellen diese Verfahrensschemata ja eine Transformation auf eine besondere Zwischenebene dar, die nach zwei Seiten hin, zur Mathematik auf der einen und zur Ebene der gesellschaftlichen Realität auf der anderen, der Übersetzung und Interpretation bedarf. Diese Übersetzung aber wird in doppelter Weise, und in beide Richtungen, erschwert: Die Einkapselung des mathematischen Prozesses in dem Verfahrensschema (hier ist also nicht von dem "Einkleiden" des Verfahrensschemas in einen beliebigen Anwendungskontext etwa aus dem Sachrechnen die Rede), die ein konstitutives Moment der Konstruktion dieses Verfahrens gewesen ist, bedeutet ja gerade, daß dieses von seiner Herkunft aus dem mathematischen Wissen abgetrennt wird, und zwar ohne irgend eine Rücksicht auf eine nachträgliche, verstehende Herleitung. Um das Erschließen des Realitätsbezuges steht es nicht besser, da die gegenwärtigen Bezüge sich längst von den ursprünglichen Anlässen der Problemstellung entfernt, modifiziert und weiterentwickelt haben. Die Angelegenheit wird dadurch kompliziert, daß solche Verfahren als Kulturtechniken selbst Teil der gesellschaftlichen Realität und damit Ausgangspunkt neuer Problemstellungen werden, die wiederum neue Problemlösungen und Verfahren veranlassen usw.

Setzt man das, was wir über das Vorfeld der Mathematik festgestellt haben, in Beziehung zu dem, was Freudenthal in bezug auf die kindliche Entwicklung "Vor-Mathematik" nennt, so fällt eine bemerkenswerte Entsprechung beider Bereiche auf. Ich meine mit "Vor-Mathematik" jenen Bereich, von dem Freudenthal sagt: "Mathematics on the lowest level used to be allowed to start as an activity. Experiments, in particular by Dienes, have shown that children can perform rather involved mathematics on this level, that is to say they can develop an activity which on a higher level would be interpreted as mathematics. This bottom level is an indispensable precondition of mathematics. This should be stressed against people who rightly object that it is no mathematics at all. It is bottom-level, it is indispensable pre-mathematics." (Freudenthal 1971, S. 417).

Der Mathematik des Vorfeldes und der Vormathematik ist gemeinsam, daß sie an einen zunächst unendlich und unentwerrbar scheinenden Zusammenhang außer-mathematischer Realität gebunden sind. Beide, der

Mathematiker, der das Vorfeld im Interesse einer Problemlösung mathematisiert, wie das Kind, das ein bereits strukturiertes Problemfeld vorfindet, müssen in ihrem Terrain Schneisen ordnender Perspektiven schlagen und Aussichtspunkte finden, formale Regelmäßigkeiten aufspüren, um schließlich zu einem Ziel, beispielsweise einer Manipulationsanweisung mit voraussagbaren Ergebnissen zu gelangen. Beiden ist gemeinsam, daß sie dauernd zwischen der konkreten Ebene des Problems und formaleren Ebenen – in welchem Grade der Formalisierung auch immer – hin und her pendeln müssen, um die tatsächliche Entsprechung dieser Ebenen immer wieder zu verifizieren. Bemerkenswert ähnlich ist, zumal wenn wir dem Vorgehen des Kindes die historische Erschließung und den Ausbau des gesellschaftlichen Vorfeldes der Mathematik gegenüber stellen, die Art und Weise des Handelns: die Rolle von Experiment und Intuition, der oft ingeniose Umgang mit einem begrenzten Vorrat formaler Möglichkeiten, der Phantasie-reichtum in den Konstruktionen, die dem Auffinden eines Königsweges vorausgehen, schließlich das Nebeneinander ganz unterschiedlich expliziter Strukturen. Ein prinzipieller Unterschied besteht nur in der Richtung ihres Vorgehens. Während der Mathematiker von der Terra firma seines mathematischen Wissens die Terra incognita seines Problemfeldes inspiziert, bewegt sich das Kind, von der kleinen Insel seiner Erfahrung und Wahrnehmung aus auf die Mathematik zu, auf Wegen, von denen ihm nur der Anfang bekannt ist, hin zu einem unbekanntem Ziel.

Angesichts solcher Verwandtschaften muß es nur natürlich erscheinen, daß man von alters her das Vorfeld der Mathematik als dem kindlichen Lernen besonders gemäß empfunden hat. Es ist aber nach den angeführten Beispielen – ohne daß ich es im Detail hätte belegen müssen – auch klar, daß die traditionelle Schulmathematik des Vorfeldes, jene Mathematik für die Mehrheit, weder den Ansprüchen kindlichen Lernens an dieses Vorfeld gerecht wird, nämlich in ihm zur Mathematik zu finden, noch einem gesellschaftlichen Anspruch, in dieses Vorfeld einzuführen, um Handlungsfähigkeit in ihm zu vermitteln. Die disparaten Bezugsebenen im Vorfelde der Mathematik und die fundamentale Notwendigkeit, zwischen diesen hin und her übersetzen zu können, sind selten explizit und noch viel seltener zum Gegenstande des Unterrichts gemacht worden. Das Lernen wurde ganz auf die Verfahrenstechnik konzentriert; das Vorfeld wurde, sowohl zur Mathematik wie zur Realitätsebene hin, rigorös beschnitten, Mathematiklernen mit Hilfe des Vorfeldes der Mathematik damit weitgehend zunichte gemacht. Insofern ist es richtig, hier davon zu sprechen, daß die traditionelle Elementarschulmathematik “no mathematics at all” sei.

Etwas ganz anderes aber ist es, daß man von *Mathematik*unterricht sprechen kann, ohne daß das, was die Schüler da treiben, schon Mathematik sein müßte – dann nämlich, wenn die Inhalte des Unterrichts im Sinne der eben genannten Analogien von Vorfeld der Mathematik und Vormathematik gefaßt werden, und wenn dabei der Curriculumkonstrukteur und der Lehrer das Tun des Schülers pädagogisch so leiten, daß es schließlich Mathematisieren werden kann, in der Wei-

se, wie Freudenthal es beschreibt: “The student applies certain new rules unconsciously until at a certain moment he becomes conscious about them. From analyzing the structure of the subject matter he switches to analyzing his own mathematical activity. He grasps the laws and regularities of his activity, which enables him to apply them more consciously. Maybe he even succeeds in formulating their principles in general terms.” (Freudenthal 1971, S. 417). Dies zu ermöglichen, ist denke ich, die Arbeit des IOWO. Meiner Meinung nach ist es weder notwendig noch sinnvoll, davon zu sprechen, daß dies “no mathematics at all” sei.

Ich glaube, wir sind hiermit bei dem 2. Teil der Alternative angelangt, bei der Möglichkeit nämlich, eine Mathematik für alle ins Auge zu fassen, von der wir gesagt haben, daß sie die Merkmale einer Mathematik für die Mehrheit mit denen einer anspruchsvolleren Mathematik nur für eine Minderheit in sich vereinigen müßte. Wir sind von der traditionellen Schulmathematik als einer Mathematik des gesellschaftlichen Vorfeldes ausgegangen und zu einer Vorstellung von Mathematikunterricht gelangt, die sich ausgezeichnet mit der Arbeit des IOWO illustrieren läßt, die also zumindest eine enge Verwandtschaft mit deren Mathematik zeigt. In der Tat scheinen mir durch diese Arbeit des IOWO viele Fragen beantwortet, die sich darauf beziehen, wie eine “Mathematik für alle” aussehen könnte. In der Tat scheint mir diese Arbeit anschaulich darzustellen, daß eine Schulmathematik, wenn sie sich auf das gesellschaftliche Vorfeld der Mathematik gründet, für alle lehrbar und von allen lernbar sein und dabei dennoch auf die Entwicklung mathematisierender Aktivität und schließlich mathematischer Reflexion hinzielen kann. Aber es bedarf noch weiterer Bestimmungen einer Mathematik für alle. Ich muss an dieser Stelle allerdings um Nachsicht dafür bitten, daß ich mich im folgenden weniger ausdrücklich auf die Arbeit des IOWO beziehe. Ich glaube, daß in ihr viele Antworten auch auf die folgenden Fragen zu finden sind, aber ich kenne den Mathematikunterricht, der mit den IOWO-Materialien gemacht wird, nicht gut genug, um ihn mit meinen folgenden Überlegungen verlässlich in Beziehung zu setzen. Es liegt ja in der Natur der Konzeption des IOWO, daß die Materialien ein konstruktives Gerüst für den Mathematikunterricht darstellen und die Erklärungen dazu Begründungen und Arbeitsanleitungen, daß aber alles davon abhängt, wie dieses Gerüst schließlich ausgefüllt wird, was im Unterricht daraus wird, was im Schüler geschieht, der damit arbeitet, wie vor allem die Materialien über längere Zeiträume des Umganges mit ihnen ihre Wirkung entfalten, wie also unter ihrem Einfluß die Entwicklung des Schülers voranschreitet. Gerade darauf zielen die folgenden Überlegungen. Im Hinblick auf die Mathematik für alle des IOWO wäre ich dabei auf Spekulationen angewiesen. Denjenigen unter Ihnen, die mit der Arbeit des IOWO unmittelbar vertraut sind, wird es aber leicht fallen, solche Bezüge selbst herzustellen.

Fragen an eine Mathematik für alle, die bisher offen-geblieben sind, wären: Wie weit sollte die Schulmathe-

matik vom Vorfelde zur "reinen" Mathematik voranschreiten? Gibt es Forderungen an Art und Umfang der Stoffgebiete? Sind Begriffe, Systeme, Theorie der Mathematik ein Thema des Unterrichts oder nur – günstigstenfalls in Ansätzen – ein Ergebnis? Gibt es andererseits im gesellschaftlichen Vorfeld der Mathematik eine Systematik? Gibt es in ihm besonders ausgezeichnete Bereiche?

– Vor allem müssen wir beachten, daß alle diese Fragen nun unter zwei Aspekten zu betrachten sind: Einmal, wie sie sich für die große Mehrheit der Schüler beantworten lassen, für die ja das Problem zunächst weiter besteht, daß ihnen möglicherweise eine Ausrüstung aufgeladen wird, die sie niemals gebrauchen werden, zum anderen aber, was sie für die Minderheit bedeuten, für die ja befürchtet wird, daß sie auf ihrem Wege zur Wissenschaft aufgehalten und daran gehindert werde, in den vollen Genuß ihrer besonderen Leistungsfähigkeit zu gelangen. Wie wir sehen, sind wir hier wieder bei dem Problem der Relevanz des Mathematikunterrichts angelangt: Mathematikunterricht wozu? Wozu für die einen, wozu für die anderen?

Es ist evident, daß die Frage nach der Relevanz der Schulmathematik nicht zu beantworten ist ohne den Rekurs auf das, was Freudenthal das Menschenbild nennt, ohne die Hintergrundphilosophie, die unser pädagogisches Handeln bestimmt; denn was man als relevant ansieht für die Bildung des jungen Menschen, hängt natürlich davon ab, als was man sie betrachtet. Wollen wir in ihnen den Wirtschaftsfaktor sehen, das künftige Arbeitskräftepotential? Sind sie für uns die künftigen Glieder (und dabei gar nicht die gegenwärtigen, die sie ja auch sind) eines funktionierenden Gemeinwesens, und vielleicht gar die künftig funktionierenden Glieder unseres heutigen Gemeinwesens? Oder was sonst?

– Ich denke, wir erachten sie für Menschen, die das Recht haben sollen, ihre Identität zu entfalten und zu erhalten, als soziale Wesen ihre individuelle Bildung aus der Kultur zu entwickeln, die sie umgibt, und die so nach Möglichkeit in den Stand versetzt werden sollen, in dieser Gesellschaft autonom, kompetent und verantwortlich zu handeln.

Auch die Auffassung dessen, was Kultur ist, spielt hier eine Rolle: Man kann Papert darin folgen, eine Dissoziation der Kultur in Teilkulturen, eine mathematisch-naturwissenschaftlich-technologische und eine humanistisch-geisteswissenschaftliche zu beklagen, die dann kunstvoll-technologisch zu überbrücken wäre. Man kann aber auch die Teilkulturen eher für Teilaspekte oder verschiedene Ausdrucksformen einer vielleicht auf einer etwas tieferen Schicht doch ganzheitlich aufzufassenden Kultur halten. Dabei könnte ein wesentliches Moment dessen, was Bildung ausmacht, gerade darin liegen, diesen ganzheitlichen Charakter des sich so leicht hin Dissoziierenden zu erfassen, und daraus ergäbe sich die pädagogische Forderung, Zusammenhänge sichtbar zu machen: Zusammenhänge von Instrumentalität und Sinn, Wissenschaft und Interesse, Technologie und Verantwortlichkeit, Mathematik und Realität. Und bemerkenswerterweise finden wir, daß derartige Zusammenhänge

immer dort im Spiele sind, wo wir vom gesellschaftlichen Vorfelde der Mathematik gesprochen haben, ja, wir können von hier aus dieses Vorfeld in einer erweiterten Bedeutung definieren: als den Ort nämlich, wo disparate Teilaspekte der Kultur in einem Zusammenhang erscheinen. Fassen wir den Begriff des Vorfeldes so, dann erhält dieses als Gegenstandsbereich des Unterrichts ein erhebliches zusätzliches Gewicht, mit der Möglichkeit und Verpflichtung nämlich, jene Einheit der Kultur anschaulich und erfahrbar zu machen.

Versetzen wir den jungen Menschen in dieses Vorfeld mit der Maßgabe, daß er in ihm den Nährboden für eine Bildung finde, die ihn zu autonomem, kompetentem und verantwortlichem Handeln befähigen soll, so lassen sich, so glaube ich, zu der Frage der Relevanz von Mathematikunterricht in zwei Punkten Aussagen machen:

1. Wir können, wenn wir von der Mathematik des Vorfeldes oder einer Mathematik für das Vorfeld ausgehen, einige Feststellungen treffen über den Charakter der *mathematischen* Qualifikationen, die darin benötigt werden.

An der TH Kaiserslautern sollte – noch vor der Einrichtung des Studienganges Technomathematik – im Rahmen eines Praxisprojektes mit Mathematikstudenten nach ihrem Hauptseminar (Diplom-Kandidaten) versucht werden, in einem Industriebetrieb in Kooperation mit den dort tätigen Ingenieuren durch den Einsatz mathematischer Mittel Verbesserungen des Produktionsprozesses zu erzielen. Zunächst sollten die Ingenieure des Betriebes Problemfälle ermitteln und vorstellen, bei denen Elemente des Produktionsprozesses verbesserungsbedürftig und mit Hilfe mathematischer Know-hows verbesserungsfähig wären. Dies scheiterte daran, daß die Ingenieure außerstande waren, über ihre speziellen, beschränkten Arbeitsgebiete hinaus Probleme unter dem Aspekt des möglichen Einsatzes mathematischer Modelle zu formulieren oder identifizieren, bzw. eine Beziehung zwischen möglichen mathematischen Modellen und Problemen der Produktionssteuerung herzustellen. Fortschritte gab es erst, als die Mathematiker in den Betrieb gingen und mit ihrem Kopf voller Assoziationen an mathematischen Modellvarianten und Theorien die Produktionsprozesse studierten, gezielt die Ingenieure befragten und selbst Problemstellungen formulierten und untersuchten.

Ohne Zweifel hatten die Ingenieure, die immerhin über eine abgeschlossene Sekundarbildung und ein Kurzstudium in Mathematik verfügten, einen schlechten Mathematikunterricht genossen, sie hatten mathematisches Wissen erworben, das Verfahrensweisen zur Lösung von Routineaufgaben in begrenzten Anwendungsgebieten bereitstellte, nicht aber eine im Hinblick auf mögliche Beziehungen von Sachkontexten und mathematischen Modellen aktive, einsichtige und zugleich erfinderische Haltung.

Es geht hier um den Aspekt von Mathematik als Tätigkeit gegenüber dem von Mathematik als fertigem Wissen. "Mathematik ist keine Wissenschaft keine Menge von Wissen. Mathematik ist eine Tätigkeit, eine Verhaltensweise, eine Geistesverfassung", und

“Mathematik ist in erster Linie eine Einstellung, eine Art, Probleme anzugreifen.” (Freudenthal 1980 S. 634 und 635). Kaum jemand hat dies immer wieder so hartnäckig hervorgehoben wie Freudenthal, es so anschaulich auseinandergesetzt wie er und zugleich klargemacht, daß nicht deduzierende Darstellung, sondern die sokratische Methode die ihr angemessene Form der Weitergabe ist.

Freudenthal geht es vor allem darum, den Lernprozeß in die richtigen Bahnen zu lenken. Wie weit der Lernprozeß den Schüler bringen soll, bleibt weitgehend offen, schon deswegen, weil die Zwangsjacke normierter Niveaus einer “Mathematik für alle und jedermann” prinzipiell fremd ist. Etwas anderes ist es, vom gesellschaftlichen Vorfeld der Mathematik her zu fragen, welche mathematischen Qualifikationen dort relevant sind. Da geht es um die Ergebnisse des Lernens.

Im angeführten Beispiel wird zweierlei verlangt: die Fähigkeit, ein mathematisches Modell einem bestimmten Zweck entsprechend für einen Sachverhalt zu entwickeln, und als Voraussetzung dazu, die Verfügbarkeit einer Vielfalt mathematischer Modelle und ihres theoretischen Zusammenhangs. Mathematische Tätigkeit verlangt hier jene besondere Geistesverfassung des Zugriffs, von der Freudenthal spricht, aber auch Wissen und Erfahrung. Wie entsteht mathematisches Wissen? Aus der Distanzierung von mathematisierender Tätigkeit, wie Mathematisierung eine Distanzierung zum Gegenstande voraussetzt. Wie produktiv mathematisches Wissen werden kann hängt davon ab, wie stark es in der mathematisierenden Tätigkeit mit Sinn ausgestattet wird, d.h. wie stark es mit bereits vorhandenem Wissen und Erfahrungen verknüpft werden kann. Wissen bedarf auch der Organisation, und auf unterschiedlichen Stufen der Reorganisation, so daß sich Einzelgebiete einander zuordnen, Systeme sich in Begriffen erkennen lassen, so daß schließlich eine Vorstellung davon entsteht, wie die Mathematik selbst konstruiert ist, wie sie funktioniert, wo ihre Möglichkeiten und Grenzen liegen. Dies berührt die Ebene des Metawissens über Mathematik.

Ich glaube allerdings, daß der Mathematikunterricht bei dieser Organisation des Wissens Hilfestellung geben muß, indem er das mathematische Vorfeld gelegentlich hinter sich läßt, so daß Mathematik nicht nur in ihrem instrumentellen Aspekt innerhalb disparater Problemkontexte erfahrbar wird, sondern auch Zusammenhänge bis hin zu den großen konzeptionellen Linien selbst sichtbar werden. Dies bedeutet, daß der Mathematikunterricht im Schüler auch ein Bild von Mathematik als Wissenschaft entwerfen muß, nicht indem er sich wie diese wissenschaftlich gebildet, sondern indem er Mathematik als Wissenschaft thematisiert.

Ist dies noch relevant im Rahmen einer Mathematik für alle? Entscheidend scheint mir hier die Feststellung, daß es sich bei all dem um maßstäbliche Unterschiede, um graduelle Erweiterungen einer prinzipiell gleichen mathematischen Reflexion handelt. So sehr sich die *Möglichkeiten* auf unterschiedlichen Entwicklungsebenen des mathematischen Denkens quali-

tativ unterscheiden mögen, so wenig ändert sich doch der Charakter des Mathematisierens selbst. Dies ist, wie ich meine, eine zentrale Prämisse der Freudenthalschen Didaktik, die immer wieder zum Vorschein kommt, wie etwas bei einer Bemerkung über den Sichtwechsel (anläßlich des Messens und Konstruierens mit dem Winkelmesser): “Sichtwechsel ist eine hervorragende mathematische Geisteshaltung, wir Mathematiker pflegen sie zum Überdruß. Im Grundschulprogramm des IOWO wird Sichtwechsel systematisch geübt, jede Gelegenheit dazu wird beim Schopfe ergriffen. Ich bin des Erfolges sicher, man kann Kinder zum Sichtwechsel erziehen.” (Freudenthal 1982, S. 8)

Wenn Mathematik lernen – jenseits des Punktes, wo intuitives Handeln in bewußtes übergeht – in einer graduellen Erweiterung der mathematischen Reflexion besteht, so kann es nur ein Kontinuum des Fortschreitens und, bei allen individuellen Unterschieden, nur eine zweckdienliche Gestaltung des Lernens für alle gleichermaßen geben, die lange Zeit völlig unabhängig davon ist, wie hoch einer hinaus will, und es auch weiterhin bleibt, wenn sie offen genug ist, nach individuellen Möglichkeiten und Interessen – “für jedermann” – hinreichend zu differenzieren.

Wie steht es nun mit der Frage, wieviel Mathematik in einer “Mathematik für alle” enthalten sein muß? Es sollte deutlich geworden sein, daß das Konzept einer “Mathematik für alle” auf eine Qualität des Lernens, nicht auf Quantitäten hinzielt. Für das Erlernen und Einüben des Mathematisierens haben die Gegenstände zunächst eine exemplarische Funktion, für die Entwicklung und Erweiterung des Wissens dann aber auch eine eigenständige Bedeutung, und dessen Organisation bedarf der Planung und seinerseits Einübung. Es versteht sich, daß mehr Übung im Mathematisieren, größere Wissensbestände und ihre Organisation auf einer möglichst hohen Stufe die Möglichkeiten, mit Mathematik umzugehen, unendlich vergrößern. Aber ebenso klar ist, daß, wenn einmal ein Gebäude aus mathematischer Aktivität, mathematischem Wissen und seiner Organisation errichtet ist, dessen weiterer Ausbau so wenig Probleme aufwirft, daß die Frage nach dem Umfange der Wissensbereiche als Streitpunkt für oder wider eine “Mathematik für alle” bedeutungslos wird.

Eine Schulmathematik, die sich auf das gesellschaftliche Vorfeld der Mathematik bezieht, handelt notwendigerweise auch von der Realität, die den Schüler umgibt. Inwiefern oder unter welchen Bedingungen haben die *Realitätsaspekte* Relevanz für alle Schüler? Es hat verschiedentlich Bestrebungen gegeben, eine auf die gesellschaftliche Praxis bezogene Schulmathematik von den Realien her zu bestimmen. Extreme Versuche verbinden sich mit dem Namen F. Bobbitt, der zwischen 1913 und 1924 in den USA eine Katalogisierung aller mathematikrelevanten Tätigkeiten in allen wichtigen gesellschaftlichen Bereichen propagierte. Bedarfserhebungen sind noch in jüngerer Zeit etwa in Schweden und in Großbritannien durchgeführt worden. Der Cockcroft-Report hat zwar in Großbritannien die Diskussion um eine Mathematik

für alle in Gang gebracht, und er enthält Teile, die sich nicht ohne weiteres mit den Bedarfserhebungen in Verbindung bringen lassen, was aber diese betrifft, so entgeht auch er dem Dilemma all dieser Versuche nicht, von den konkreten Sachkontexten her, in denen Mathematik gebraucht wird, nur auf den verfahrenstechnischen Aspekt der Mathematikanwendung zu schließen. Das heißt, bezogen auf die drei Ebenen der Formalisierung, von denen bei der Darstellung des Vorfeldes die Rede war, daß die Beziehung der Verfahrensebene und der Ebene der Mathematik selbst und damit auch die Frage der mathematischen Qualifizierung gar nicht in Betracht kommen. Nur jenseits der Verfahrensebene ist Mathematiklernen so universell und flexibel, daß ihm eine allgemeinbildende Funktion zukommt. Mathematik auf der Verfahrensebene lernen bedeutet, entweder Muster zu erlernen, deren Nutzen die Vielfalt und Veränderlichkeit der Realität zunichtemachen, oder von diesen Verfahrenstechniken eine Regelmathematik abzuleiten, wie sie nur die Paukschule akzeptieren konnte.

So hat es sich denn auch in der jüngeren Vergangenheit weitgehend durchgesetzt, die Realitätsfragmente, die man im Unterricht verwendet, nur von ihrer didaktischen Eignung her genauer zu bestimmen, ihre Auswahl im übrigen aber oft zufälligen oder ephemeren Kriterien zu überlassen. Dies wird dadurch unterstützt, daß die Realitätselemente in kognitionspsychologisch orientierten Unterrichtskonzepten meist ohnehin eine eher repräsentative Funktion erfüllen. In diesen Konzeptionen ist es wichtig, daß der Schüler das Gefühl hat, der Gegenstand, mit dem er sich beschäftigen soll, sei für ihn relevant, es ist aber gänzlich ungewiß, ob der Umstand, daß ein Sachkontext ein motivierendes Environment abgibt, ein ausreichendes Indiz dafür ist, daß dieser für den Schüler tatsächlich relevant sei. – Ich halte den sachlich unreflektierten Umgang mit der Realität im Mathematikunterricht für verhängnisvoll.

Ziel des Mathematiklernens ist zuallererst, Instrumente des Begreifens bereitzustellen: für das Begreifen der Natur, der menschlichen Gestaltung der Natur und seiner eigenen Verhältnisse, Begreifen zu unterschiedlichen Zwecken: um seiner selbst willen, zur Kontrolle, Steuerung, zur weiteren Gestaltung. Nimmt man das Begreifen des Vorfeldes ernst, so ist dies nicht teilbar zwischen einem Verständnis der Mathematik in ihm und einem Verständnis der Realität. Man könnte sagen, daß es zuerst darum gehe, die Mathematik verstehen zu lernen, um danach mit diesem Instrument die Realität zu erschließen. Aber so wird der springende Punkt, die Verschränkung beider, nicht begriffen, und man kann nicht annehmen, daß deren Verständnis sich irgendwann von allein einstelle. Ich glaube vielmehr, daß die beklagte Dissoziation von mathematisch-naturwissenschaftlich-technologischem versus humanwissenschaftlichem Weltverständnis gerade hier eine wesentliche Ursache hat. Man fragt, wie Mathematik im Vorfeld wirksam wird, man muß aber auch fragen, welcherart die Realität am Vorfeld teilhat. Was muß man verstehen, um die Anteile der Realität am komplexen Zusammenhang des Vorfeldes zu verstehen? Sind Aussagen

dazu möglich? Ist man da nicht sogleich der unendlichen Fülle der Einzelphänomene ausgeliefert? – Das bedarf der Analyse.

Global lassen sich einige strukturelle Unterschiede in den Zusammenhängen von Mathematik und Realität feststellen: Es gibt zunächst die Mathemathikhaltigkeit der Naturphänomene, die auf deren naturgesetzlichen Regelmäßigkeiten beruht, diese Regelmäßigkeiten sind nicht zuletzt deswegen mathematiknahe, weil Mathematik historisch großenteils an ihnen und zu ihrer Durchdringung entwickelt wurde. Die Explikation der Mathemathikhaltigkeit in diesen Naturgesetzen hat vor allem beschreibenden Charakter.

Alle darüber hinausgehenden Verbindungen von Mathematik und Realität sind Anwendungen von Mathematik auf die Realität, d.h. konstruierte Regelmäßigkeiten, die bestimmten Zwecken dienen. Von der Intentionalität der Anwendungen war bereits die Rede. Hier vor allem liegen die Probleme des Realitätsverständnisses mathematischer Anwendungen.

Soweit es sich um die Anwendung fertig verfügbarer Verfahren handelt, ist ihre Intentionalität eine zumindest doppelte: In den Verfahren sind die Zwecksetzungen ihrer Konstrukteure erhalten, die Absichten des gegenwärtigen Benutzers kommen hinzu. Es gibt nun Verfahren, die prinzipiell zum allgemeinen Gebrauch stehen und dabei relativ anwendungsneutral sind, soweit die Regeln ihres Gebrauchs eingehalten werden. Dazu gehören die verschiedensten mathematischen Instrumente bis hin zum Taschenrechner und Computer. Es gibt aber Anwendungen, die im allgemeinen bereits mit einer bestimmten Intention genutzt sind, wenn sie in die Alltagsrealität hineinwirken, und dabei bedeutende soziale Implikationen haben. Im elementaren Bereich etwa Statistiken, betriebliche Kalkulation, Buchhaltung usw. Jedermann, ob er auch in irgendeinem Berufsbereich selbst aktiv einige dieser Instrumente einsetzt, ist ständig der Wirkung ungezählter anderer Anwendungen dieser Art ausgesetzt, die nicht mehr ohne weiteres die Intentionen ihrer Anwender zu erkennen geben, ja generell als gesellschaftliche Realität erscheinen, in der die Anwendungsergebnisse oft als Sachzwänge wirken.

Die Mathematisierung eines Sachverhaltes bedingt, wie wir gesehen hatten, Übersetzungsprozesse zwischen Ebenen unterschiedlicher Formalisierung. Diese Notwendigkeit der Übersetzung, die einem Klärungsprozeß entspringt, kann aber sehr wohl auch umgekehrt eingesetzt werden, nämlich zur Verschleierung, zur zynischen Manipulation von Sachverhalten, wenn es um die Durchsetzung einer Absicht, eines Interesses geht, das offen nicht durchzusetzen wäre. Jedes dieser Instrumente zeichnet sich dadurch aus, daß es nur auf der formalen Ebene stringent ist, nicht aber darin, wie es mit Prämissen, Interpretationen, Interessen besetzt wird. Hierauf beruht der Effekt der argumentativen Stringenz mathematisierter Aussagen – Zahlenangaben, Verhältnisse, Statistiken usw. – die nicht selten mit Recht der Lügenhaftigkeit geziehen werden.

Inhaltliche Relevanz des Mathematikunterrichts in Anspruch nehmen zu wollen, indem man Mathematik des Vorfeldes treibt, und dabei solche Zusammenhän-

ge auszuklammern, ist Augenwischerei. Man kann nicht der Realitätshaltigkeit des Vorfeldes gerecht werden, ohne diese Bereiche einzubeziehen, jedenfalls dann nicht, wenn man das pädagogische Postulat ernst nimmt, den jungen Menschen zu einem weitgehend selbstbestimmten Individuum erziehen zu wollen.

Es versteht sich, daß hier keine leichte Aufgabe zu bewältigen ist, weil die Schulmathematik damit in den Strudel der Wertungen und Interessen hineingezogen zu werden droht, von dem sie sich gern unabhängig glaubt. Es gibt da nicht nur soziale, sondern auch politische Implikationen. Es ist verständlich, daß dort, wo die Einbeziehung des gesellschaftlichen Vorfeldes in den Mathematikunterricht als für notwendig erachtet wird, die Anwendungsbeispiele in der Regel aus dem Bereich der Naturbeschreibung oder solcher Bereiche entnommen werden, die für die allgemeine einsichtige Nutzung offen stehen. Aber darf man Mathematik nur als ein Mittel des Beschreibens, des Aufklärens, der Problembewältigung vorstellen, ohne zu sagen, daß es auch als Machtinstrument gebraucht wird, und ohne dem jungen Menschen zu helfen, diese Funktion zu durchschauen?

Das IOWO hat bedeutende Verdienste daran, daß wir heute etwas mehr darüber wissen, wie Mathematik gelernt wird. Wenn die Ergebnisse seiner Forschung und Entwicklungsarbeit uns heute größere Gewißheit darüber geben, daß Mathematik weitgehend als eine Mathematik der Anwendungen erlernt wird, so stellt sich nun doch *auch* die Frage: Wie wird Mathematik angewendet? Es hat einzelne Untersuchungen zu dieser Frage gegeben, die in Ansätzen zu Antworten gekommen sind. Mir scheint, es müßte noch einmal eine Einrichtung wie das IOWO geschaffen werden, um nun mit der gleichen Konsequenz dieser Frage nachzugehen. Wie wird Mathematik gelernt? – Wie wird Mathematik angewendet? Erst Antworten auf beide Fragen ermöglichen eine Wissenschaft vom Mathematikunterricht.

Wenn man, wie wir es getan haben, die "Mathematik für alle" in einem Zusammenhang sieht, der von der einzelnen Unterrichtseinheit bis zu bildungspolitischen Perspektiven reicht, so werden unvermeidbar Hintergrundfragen sichtbar, die miterwogen sein wollen, über den Diskussionsrahmen des Themas "Mathematik für alle" aber weit hinausreichen. Es sind Fragen, die sich auf die Entwicklung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Disziplinen und der Technologie ihrer Anwendungen beziehen, auf das sich verändernde Verhältnis von Mathematik und Gesellschaft und auf die Konsequenzen, die für die Schulmathematik daraus zu ziehen sind.

Man übertreibt wohl nicht, wenn man die Veränderungen, die sich derzeit im Verhältnis der Menschen zur Wissenschaft abspielen, als außerordentlich tiefgreifend ansieht. Die kritische Haltung zur Wissenschaft und Technologie kommt diesmal nicht – obwohl es gelegentlich so dargestellt wird – aus einem anti-emanzipatorischen Impuls wie in früheren Phasen der Wissenschaftsfeindlichkeit. Die Stimmen andererseits, die für Zukunftshoffnung und Vertrauen in die Wissenschaft werben, sind allzu deutlich Partei, als

daß sie den Zweifel an der rationalen Beherrschung von Wissenschaft und Technologie beschwichtigen könnten. Solche Zweifel sind alt. Neueren Datums ist, daß sie allgemeines Bewußtsein geworden sind. In der politischen Aufbruchstimmung am Ende der 60er Jahre und ihrem raschen Verlöschen zu Beginn der 70er zeigt sich beides: eine euphorische Neuinterpretation alter Fortschrittsideale, und deren Zusammenbruch, der sich in Resignation und Radikalisierung ausdrückte. Es ist wohl nicht abwegig, den Aufschwung und den jähen Niedergang der großen Reformbewegungen zur Erneuerung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Curricula mit diesen Zeitströmungen in Beziehung zu setzen.

Freilich hat der rasante Aufstieg der Computertechnologie diese Entwicklung überlagert: er enthält auch ein gegenläufiges Moment, in dem er nahelegt, die neue Etappe der wissenschaftlich-technischen Entwicklung doch wiederum als Fortschritt zu interpretieren. Allerdings wird dies durch die wirtschaftlichen Begleiterscheinungen sehr schwer gemacht.

Dennoch gibt es auch in der Mathematikdidaktik Apologeten der neuen Technologie. Und auch die ökonomisch-bildungspolitischen Konsequenzen werden bereitwillig gezogen. Die Idee des Human-Capital-Konzepts, die eine Verbindung von wirtschaftlicher Leistungsfähigkeit einer Nation und den Bildungsstandards ihrer Bürger herstellte, ist längst wieder ad acta gelegt. Man glaubt zu erkennen, daß in Zukunft immer weniger, immer höher qualifizierte Arbeitskräfte benötigt werden und dementsprechend immer mehr Arbeitskräfte, deren Qualifikationsniveau ziemlich uninteressant ist. In einigen Ländern heißt die Forderung des Tages jetzt Elitebildung und Hochbegabtenförderung. Nicht wenige Didaktiker, die eben noch einer Mathematik wenigstens für die Mehrheit das Wort geredet haben, fühlen sich aufgerufen. Arglosigkeit und Befangenheit in Tagesgeschäften scheinen wieder einmal die Szene zu beherrschen...

Aber ich möchte nicht mit einem derart pessimistischen Ausklang schließen. Hier in den Niederlanden ist die Bilanz weitaus erfreulicher, und auch sonst gibt es Stimmen, die sowohl kritisch als auch konstruktiv sind. Als ein Beispiel, das mir den Vorstellungen einer "Mathematik für alle", wie ich sie hier vorgetragen habe, von einem ganz anderen Ausgangspunkt nahekommen scheint, möchte ich einen Aufsatz von R. Fischer anführen: "Unterricht als Prozeß der Befreiung vom Gegenstand – Visionen eines neuen Mathematikunterrichts". Fischer kommt darin zu dem Schluß: "Wesentliches Ziel des Mathematikunterrichts muß es sein, zur Befreiung von der Herrschaft der Mathematik über den Menschen beizutragen, indem ein neues Verhältnis zwischen Mensch und Mathematik aufgebaut wird, das von einem stärkeren Selbstbewußtsein des Menschen gegenüber dem Wissen gekennzeichnet ist." (Fischer 1984, S.60) Einen möglichen Weg sieht Fischer für die Schulmathematik darin, die Frage nach dem Sinn des Wissens, des traditionellen Gegenstandes des Unterrichts, selbst zum Gegenstand des Unterrichts zu machen, "Nicht mehr das Wissen ist hauptsächlich Lerngegenstand, sondern das Verhältnis des Menschen (insbesondere

des Lernenden) zum Wissen... Der Lernende tritt damit in gewisser Weise auf zwei Ebenen auf: in der Auseinandersetzung mit dem Wissen und in der Thematisierung dieser Auseinandersetzung (seiner individuellen und der der Gesellschaft überhaupt)". (Fischer 1984, S. 64–65).

Perspektiven wie diese sind, wie ich glaube, in ihrer Radikalität der gegenwärtigen Umbruchsituation sehr angemessen. Sie lassen diese Situation nicht nur als eine Bedrohung, sondern auch als eine große Chance erscheinen: bedeutender erwünschter Veränderungen der Schulmathematik dann nämlich, wenn die Mathematikdidaktik nicht kleinmütig defensiv, sondern selbstbewußt und aktiv ihre Ziele formuliert. Könnte man sich vorstellen, daß im Mathematikunterricht nur das stattfindet, was Lehrer und Schüler tun wollen, nicht nur das, was sie tun zu müssen glauben? Muß die Mathematikdidaktik sich immer vorschreiben lassen, was nützlich und notwendig ist?

Wenn wir auf das blicken, was Freudenthal hier geleistet hat, was hier doch also möglich war und ist, so gibt es keinen Grund zur Verzweiflung. Für dieses Beispiel sind wir dankbar.

Literatur

- [1] Advisory Council for Adult and Continuing Education (ACACE), *Adults mathematical ability and performance*, Leicester 1982.
- [2] Bailey, D., *Mathematics in employment (16–18)*, Report Univ. of Bath 1981.
- [3] Cockcroft, W., *Mathematics counts*, London 1982.
- [4] Damerow, P., *Wieviel Mathematik braucht ein Hauptschüler?* In: Neue Sammlung 20 (1980), S. 513–529.
- [5] Damerow, P., *Mathematikunterricht und Gesellschaft*. In: Heymann, H. W. (Hrsg), *Mathematikunterricht zwischen Tradition und Fortschritt*, Köln 1984, S. 9–61.
- [6] Damerow, P. und I. Westbury, *Mathematics for all*. In: Journal for Curriculum Studies (1985) vol. 17, Nr. 1, S. 3–12.
- [7] Freudenthal, H., *Geometry between the devil and the deep sea*. In: Educational Studies in Mathematics (1971), S. 414–435.
- [8] Freudenthal, H., *Five years IOWO*. In: Educational Studies Mathematics (1975).
- [9] Freudenthal, H., *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, Stuttgart 1973.
- [10] Freudenthal, H., *Die Entwicklung des mathematischen Denkens der 10–14 Jährigen*. In: Mathematiklehrer 3 (1982), S. 5–13.
- [11] Freudenthal, H. et. al. *Mathematik für alle und jedermann*. In: Neue Sammlung (1980) S. 633–654.
- [12] Fischer, R., *Unterricht als Prozeß der Befreiung vom Gegenstand – Visionen eines neuen Mathematikunterrichts*. In: Journal für Didaktik der Mathematik (1985) 1, S. 51–85.
- [13] Howson, G., C. Keitel, J. Kilpatrick, *Curriculum Development in Mathematics*, Cambridge 1981.
- [14] Kindt, M., J. de Lange, *Realistic Math for almost all – The Hewet-Project*, Leiden 1985.
- [15] Lange, J. de, *Geometry for all: No geometry at all?* In: ZDM 1984.
- [16] Lange, J. de, *Mathematics for all is no mathematics at all*. In: Proceedings of the 5th ICME – Konferenz Adelaide, 1985.