Logica*

H. Freudenthal
OW & OC, RU Utrecht

Samenvatting

Logisch redeneren. Kunnen kinderen dat en hoe kun je dat bevorderen? Freudenthal maakt een analyse aan de hand van lesobservaties. Hij kijkt daarbij naar het analyseren van kinderen in mathematiserende zin: logica als empirische wetenschap.
Achtereenvolgens passeren legpuzzellogica, logica van lineairiteit en steilte en vastrechtlogica de revue.

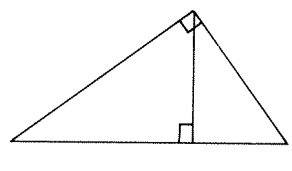
Summary

Analysing in a mathematical sense or logic as an empirical science: Freudenthal makes a plea for this kind of logic that is often neglected. Observations of lessons – where functions and graphs were studied – makes clear that there is a lack of reflective thinking. Why do you think so? This question is seldom asked, or, if asked, is not taken seriously.

12 juli 1943 — Ik geef de precieze datum, want de lezer moet het verhaal in de oorlogs- en distributietijd kunnen plaatsen. (Let op 'want' en wat die met het opschrift heeft te maken.) Didi (7;7) krijgt bij de koffiemaaltijd altijd anderhalve boterham. Hij mag kiezen wat erop (appelstroop, perenstroop, diverse soorten jam — ik herinner het me niet precies meer). Tot vervelens toe dreunt hij het schema op: De hele door de helft en op de ene helft . . . en op de andere helft . . . en op de halve . . . (zijn broertjes en zusje mogen trouwens ook nog kiezen hoe ze hun boterham gesneden wensen: in streepjes, blokjes, dakjes enz.). Tot vervelens toe. Op een dag zeg ik hem dat hij toch maar drie dingen hoeft op te noemen. De volgende dag zegt hij bij de koffiemaaltijd: "Op de hele wil ik . . . en dan wil ik nog . . . want dan weet Papa al dat dat op de halve hoort. (Let op die 'want'.)
Thijs (5;10) zit op een andere school dan Didi (7;7). Op straat zijn ze Thijs' Juf tegengekomen, die klaarblijkelijk Didi met zijn naam heeft aangesproken. Ze komen thuis.
Didi: "Hoe wist Thijs z'n juffrouw dat ik Didi heet?"
Thijs: Ze heeft me eens gevraagd hoe mijn broertjes heten.
Didi: "Maar hoe wist ze dan dat ik *Didi* ben?" Hij bedoelt kennelijk: "En niet Tom (het jongste broertje)?" Ik heb het vervolg niet genoteerd, maar herinner me dat ik doorging met de vraag: "wat denk je zelf?" en hij met een antwoord zoals "ze zag dat ik de oudere was." Ik noem dat de legpuzzel-logica en de lezer zal later begrijpen waarom.

15 juli 1943 — Een sommetje in Lockefeer V, 13, een zeilwedstrijd: er vertrokken 86 schepen en na een uur waren er nog 49 schepen; er hadden al . . . schepen de wedstrijd opgegeven. Didi vult in 49. Hè? Ja die waren er nog, dus ze waren niet losgekomen of er vlak bij vastgelopen en dan moesten ze het wel opgeven.
Thijs (6;2) vertelt over een nieuw kindje op school. Door te vragen stellen we vast dat het kind er al eerder geweest moet zijn (in 't vorige jaar toen Thijs op een andere school zat). Later vertelt Thijs dat het kindje dik was geworden. Wij concluderen dat dit een uitspraak van Juf geweest moet zijn, maar het als zodanig te berichten hoort vermoedelijk nog niet bij zijn leeftijd — het besef dat dit iets met de vroegere aanwezigheid van het kind te maken heeft, mogelijk wel.
Een jaar later – ik kan het niet terugvinden – formuleert hij een strategie bij het hengelen in de vorm: En dan denken de vissen dat de vissers denken dat de vissen denken dat . . .

Een driehoek met twee gelijke zijden heet gelijkbenig. Is een gelijkzijdige driehoek gelijkbenig? Hij heeft drie gelijke benen. Kan een driehoek twee rechte hoeken hebben. Ja, tekent Jan:



Wat betekent:

"Jan heeft twee stuivers'

in de volgende contexten?

a. Jan heeft twee stuivers en Piet heeft er drie.
b. Ik moet een stuiver voor de automaat hebben. Wie kan een dubbeltje wisselen? Jan heeft twee stuivers.
c. Jan heeft twee stuivers. Dat zijn . . . centen.

Flauwe vraagstukken — maar u begrijpt dat ze niet als vraagstukken zijn bedoeld.
Het zijn vraagstukken om over na te denken.

Dat kost twee stuivers.
Ik heb maar twee stuivers.
Ja, ik heb twee stuivers.

Telkens betekent het woord twee iets anders, en stuivers trouwens ook.
Uitspraken om over na te denken — en als je dat hardop doet, noem je het praten. Om over te praten — niet alleen in het kader van dit stuk, maar ook met kinderen. Je mag het dan ook taalbeschouwing noemen. Boven dit stuk staat 'Logica' en taalbeschouwing ligt voor mij er vlak naast — zeker voorzover het taal is om je gedachten weer te geven. Denken over denken — dat hoort voor mij tot de logica. Onder logici sta ik met deze opvatting zowat alleen.
Want wat in boeken en colleges 'Logica' gepresenteerd wordt, is theorie van formele systemen. Maar daarnaast respecteer ik het alledaagse taalgebruik met zinswendingen zoals "dit is nogal logisch", of "totaal gebrek aan logica".

Denken over denken — je noemt het ook reflectie en de uitkomst ervan noem ik logica. Sinds Aristoteles werd er als logica zoiets onderwezen in de geest van:

Alle mensen zijn sterfelijk.
Socrates is een mens.
Dus: Socrates is sterfelijk.

In de loop der eeuwen is dat aangevuld en verfijnd, ondanks het - telkens weer erkende - feit dat niemand volgens dergelijke atomistische patronen redeneert. Als mathematisering van het feitelijke denken voldoet de formele logica niet, zelfs wat het mathematisch denken betreft.

Mathematiseren is een middel om de realiteit te begrijpen en te beheersen. Denken - speciaal wiskundig denken - maakt deel uit van het reële gebeuren in en om ons. Het is een verschijnsel om waar te nemen en te analyseren. Te analyseren in mathematiserende zin. En de uitkomst heet logica. Dus logica als empirische wetenschap. Ik heb dit al haast een halve eeuw lang geproclameerd. Ik heb er af en toe ook iets aan gedaan — bewijs: de verhalen die ik over mijn eigen kinderen daarstraks heb verteld. Het was veelal wat anekdotisch en gelegenheidswerk.

Wel, ik heb een keer mijn ervaringen daaromtrent samengevat en een brok theorie eraan toegevoegd [1], maar de logica van de *wiskunde* komt daar nauwelijks ter sprake. Een beetje meer vindt men ervan op een andere plaats [2], maar ik zou het geen wiskunde in context willen noemen.
Ik ben kortgeleden meer systematisch aan het werk gegaan. Het was toen sectie III van de SLO een 'Logicalijn' ging uitzetten. Ik nam toen de verslagen onderhanden die Rijkje Dekker en Paul Herfs hadden gemaakt van onderwijs met de pakketten *'Grafiekentaal'* en *'Functies en verbanden'* om ze qua 'logica' te analyseren. Ik heb een aantal denkschema's trachten te achterhalen en wat nu volgt zal u een wat droge opsomming lijken. Toch zit er een rode draad in, een didactische draad, neen, een adidactische draad, de rode draad van gebrek aan reflectie. De denkschema's blijven impliciet, ze worden de leerlingen niet bewust, noch in de groepsdiscussie, noch door interventie van de lera(a)r(es), noch in een nabespreking. Nu zou je kunnen zeggen dat ze stimulantia tot reflectie in het werkbladen-materiaal hadden moeten inbouwen in de vorm van "waarom denk je dat?" of "hoe ben je erop gekomen?" In feite is dat ook niet zelden gebeurd, maar er wordt meestal averechts, d.w.z. met een niet terzake doend antwoord op gereageerd. Dit is geen verwijt aan de auteurs, die meer van die vragen of betere vragen hadden moeten verzinnen. Ik vind dat de attitude van te vragen "waarom denk ik dat?", "waarom denk jij dat", "waarom denkt hij dat?" van begin af aan gekweekt moet worden en dan is de lera(a)r(es) de meest aangewezen persoon die de eerste prikkel moet geven en door moet blijven prikkelen tot het een vanzelfsprekende gewoonte is.

Tijdens de vakantie heeft Annemarie een weerdagboek bijgehouden.
Lees maar eens. Op losse blaadjes maakte ze ook temperatuurgrafiekjes. Welk grafiekje hoort bij welke dag?

26 sept. zaterdag
Wat een dag! 's Morgens scheen de zon en werd het warm. Zonder jas gingen we met de fiets naar het zwembad. Plotseling stak de wind op en werd het koud. Het begon zelfs een tijdje te regenen. Gelukkig kwam de zon nog even terug.
27 sept. zondag
Zonnig weer, niet zo wisselvallig als gisteren. Volgens het weerbericht wordt het morgen nog warmer. Jammer dat ik dan zo'n lange schooldag heb.
28 sept. maandag
Heel warm en benauwd weer. Aan het eind van de middag werd het koeler. Onweer!
29 sept. dinsdag
Die onweersbui van gister heeft het hele weer in de war geschopt. De hele dag regen en steeds minder dan 13°C.
30 sept. woensdag
Wisselend bewolkt. Koud en warm wisselden elkaar af. Aan het eind van de middag iets langer nog zon.
1 okt. donderdag
Op een buitje na (ongeveer 11 uur 's morgens) was het lekker. 's Middags nog wel wat bewolking. Maar echt koud werd het niet.

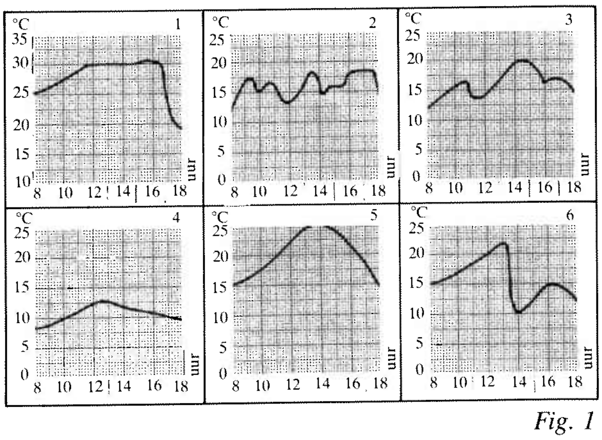


Fig. 1

Trouwens, ook de leraren in casu verwijt ik niets. In de wiskundeboekjes waarmee ze gewend zijn te werken, is niets ingebouwd dat een dergelijke didactiek zou provoceren.

Ik ben op de slotsom van mijn betoog al vooruitgelopen: logica als bewustmaking van (wiskundige) denkschema's en daar tegenover in de praktijk de verkeken kansen om er wat aan te doen. Wat nu volgt zijn gewoon voorbeelden.
Ik gebruikte daarstraks de term *legpuzzellogica*. Kijkt u naar dit weerdagboek (fig. 1). Probeert u het zelf op te lossen en maakt u een protocol van de saillante punten in het oplossingsproces.

De volgorde is uiteraard 6,5,1,4,2,3.
In de door Rijkje Dekker geobserveerde groep (8-10-83) heeft Jane, terwijl de anderen discussiëren, alleen gewerkt en binnen enkele minuten het rijtje 6,3,1,4,2,5, geproduceerd, – dus met maar één foute – en bovendien absurde – transpositie (mogelijk onduidelijk schrift: 3 ↔ 5). "Jullie schrijven het nu wel van me over".
Ze gaan inderdaad tot het volgende werkblad over. De volgende dag, terwijl ze met weer een nieuw werkblad bezig zijn, komt de lerares naar 'weerdagboek' kijken: "Het spijt me, klopt niet." Het gesprek wordt nog even vervolgd, maar zonder in te haken op het feit dat de oplossing toch bijna klopt. Geen vraag aan Jane: "Hoe ben je eraan gekomen?" De groep begint opnieuw en het wordt een lijdensweg. Uit het verdere vervolg blijkt totaal niet hoe Jane deze bijna juiste oplossing gevonden heeft, en de andere leerlingen profiteren er dus ook niet van. Jane neemt aan de discussie nauwelijks deel.

De leerlingen zoeken over het algemeen bij de ene tekst na de andere een passende grafiek. De eerste vondst is van Cari: Za 6. De tweede, van Rik, is Zo 5, maar later stapt hij ervan af met Ma 5. De feitelijke doorbraak komt door Rik met Di 4 dat inderdaad, objectief gezien, het meest overtuigende is. Met Wo 2, ook weer door Rik, is de zaak zo ongeveer bekeken. (Er zijn inmiddels zonder dat het uit de discussie blijkt, schriftelijk zekere relaties vastgelegd.)

Ik kom op de term legpuzzellogica terug. Wat doet een kind dat puzzelt? Hij kijkt naar opvallende kenmerken van de stukjes: een rechtlijnige rand, een hoek, hemelsblauw, gras, een meeuw enz. Of als hij eventjes aan de gang is, naar omtrekken en kleuren die bij elkaar passen. (Met een cryptogram doe je het trouwens ook zo: eerst globaal lezen tot je een makkelijke vindt: "vroeger dood — je kunt het niet loochenen" of "doodstraf in een schaaktoernooi".)
Het is de legpuzzelstrategie van de opvallende kenmerken. In de positieve zin: signalementen. In de negatieve zin: alibis. Van deze strategie valt er bij de leerlingengroep niets te bespeuren. Maar er is ook geen prikkel tot bezinning achteraf. Geen "hoe heb je het gevonden?" En helemaal geen "hoe had je het het snelste, het eenvoudigste kunnen vinden" — een typisch mathematische attitude: omwegen afkappen, sloppen negeren, een oplossing, een bewijs achteraf zó te bewerken dat ze zich als vanzelfsprekend voordoen. In casu zou dit zijn: allereerst naar de grafieken kijken: zeer lage, zeer hoge temperaturen – dat legt al twee van die paren vast – en ga zo maar door.
Of naar opvallende woorden zoals 'plotseling' — merkwaardig dat de leerlingen zich wel tot 'wisselvallig' aangetrokken voelen.
Maar nog eens het belangrijkste en hetgeen die hele oefening degradeert: geen enkele reflectie op de oplossingsprocedure.

Een wat gemakkelijker geval van legpuzzelstrategie is Fietsen (1) (fig. 2). Maar ook hier wordt (obs. Paul Herfs 10-1-84) de ene tekst na de andere gelezen en zonder veel moeite met een grafiek in verband gebracht.

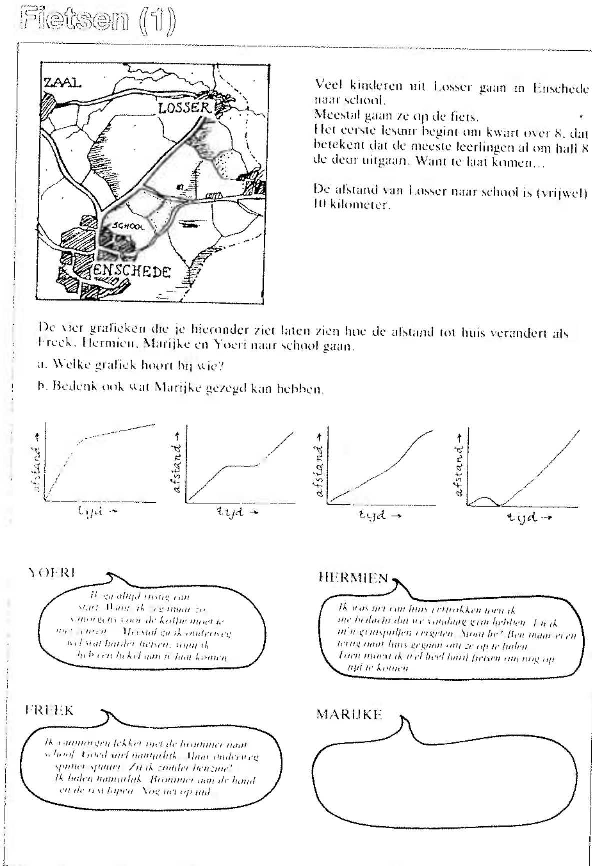


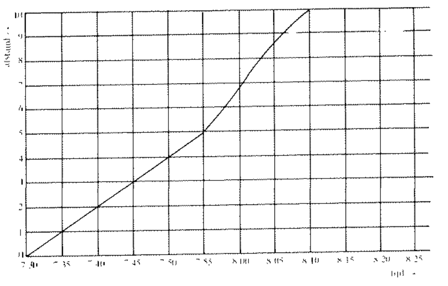
Fig. 2

Bij Joery zijn er aarzelingen. Bij Hermien is het meteen raak, en wel dermate dat zelfs enige beredenering ontbreekt. Merkwaardigerwijs wordt in de parallelle groep (Rijkje Dekker . . .) juist Hermien het eerste gedetermineerd.
Laat ik van de legpuzzelstrategie afstappen en, omdat ik er toch mee begonnen ben doorgaan met 'Fietsen' (fig. 3), zij het wat summier.
Laat ik op het onderwerp dat ik nu aansnijd het etiket plakken: *De logica van lineariteit en steilte*. Ik pak de vraag 2e en schrijf de discussie over (Paul Herfs 10-1-84):

2e. *Berdien leest 2e voor: "wacht effe hoor."*
Erna: " 't stijgt hetzelfde. Het blijft hetzelfde stijgen."
Tasja beaamt dit.
Erna: "de lijn doet niet zo  *en zo. Hij blijft hetzelfde stijgen."*

Fietsen (2)

Hier is de grafiek van Yoeri nog een keer getekend, maar nu wat preciezer. Bovendien is langs de assen de tijd en de afstand aangegeven.



Gebruik de grafiek bij het beantwoorden van de volgende vragen.
Doet dat eerst alleen, dus ieder voor zichzelf. Als jullie allen klaar zijn kun je de antwoorden met elkaar bespreken.

a. Hoeveel kilometer had Yoeri om 7.45 afgelegd?
Eén van de punten van de grafiek is dik getekend. Wat betekent dat punt eigenlijk?

Hoeveel minuten deed Yoeri over de eerste helft van de rit?
Hoeveel kilometer fietste hij tussen kwart voor 8 en 8 uur?

Iedereen klaar? Bespreken maar...

Samen verder.

b. Waaraan kunnen jullie zien dat Yoeri de eerste 20 minuten (dus van 7.30 tot 7.50) steeds even snel heeft gereden?

c. Als Yoeri daarna met dezelfde snelheid zou zijn doorgereden, zou hij dan nog op tijd op school gekomen zijn? Hoeveel minuten te vroeg/te laat?
Hoe hebben jullie de antwoorden gevonden?

d. Tussen hoe laat en hoe laat (ongeveer) was Yoeri's snelheid het grootst?
Waaraan kunnen jullie dat zien?
Proberen jullie ook 's uit te rekenen hoe snel Yoeri toen ongeveer fietste.

Fig. 3

Berdien is niet overtuigd en leest de vraag nogmaals. Dan zegt ze: "aan de afstand en aan de tijd."
Tasja: "Hij fietst elke dag 5 minuten één kilometer."
Erna: "Ja, maar hoe hard rijdt hij dan? Je hebt 't toch nog niet uitgelegd, wáárom die steeds even snel rijdt."
Tasja: "Dat vragen ze ook niet. Ze vragen waaraan je kan zien dat hij steeds even snel rijdt. Niet waarom hij even snel rijdt."
Berdien: "Aan de kilometers, de afstand en de tijd."
Colette vraagt aan Erna wat zij ervan vindt. Erna geeft geen antwoord.
Berdien: "Zie je wel, ze weet het zelf niet."
Erna blijft volhouden dat de vraag niet beantwoord is.
Berdien en Tasja: "Nou zeg jij (= Erna) dan hoe we 't moeten uitleggen."
Berdien: "Wij zijn altijd de laatste die klaar zijn."
Colette: "Wat geeft dat. Wij doen het tenminste goed."
Berdien: "Ja, dat is zo."
Tasja raakt geïrriteerd, omdat Erna maar niet wil aannemen dat het antwoord goed is.
Colette: "Je kunt het zien aan zijn tempo."
Ze praten nu allemaal door elkaar heen.
Tasja: "We zijn 3 tegen 1 en dan geef je (= Erna) nog een ander antwoord."
Berdien: "Als jij (= Erna) gelijk hebt, krijg je een snoepje."
L. komt erbij. "Kijk", zegt hij tegen Erna, "na 5 minuten heeft hij 1 km gefietst, na 10 minuten 2 km. Elke 5 minuten komt er 1 km bij. Het is net als een trapje en daaraan kan je zien dat ie regelmatig reed. Tussen 7.55 en 8.00 uur reed hij $1\frac{3}{4}$ km. En als hij regelmatig rijdt, moet de lijn recht zijn. Dat hadden jullie ook?"
L.: "Goed. Ben jij het er nou ook mee eens?"
Erna: "Ja."

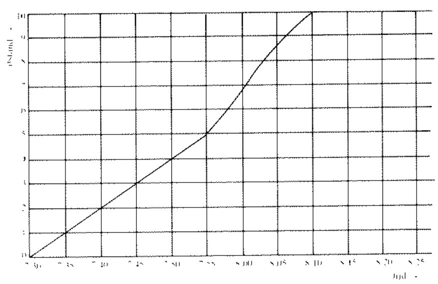
Colette vraagt aan Berdien of ze het antwoord nog even voor kan lezen.
Berdien: "Omdat hij om de 5 minuten één km aflegt."

Fig. 4

Het is een leerzame discussie. De eerste en enige goede aanzet tot het antwoord wordt door Erna gedaan. Maar Erna wordt door de numerieke aanpak van de anderen van haar stuk gebracht om tenslotte onder het gezag van de leraar te bezwijken. Bij de parallelle groep (observatie van Rijkje Dekker) is het antwoord op 2e eenvoudig "aan de lijn" en in de klassikale behandeling komen er dergelijke argumenten "omdat de lijn precies door het midden van de hokjes loopt", of "het is logisch", "de streep gaat recht", "de lijn blijft steeds hetzelfde" en de lerares voegt er een element aan toe, dat beantwoordt aan wat Erna voor ogen zweefde: "kaarsrecht — niet opeens steiler of minder steil."
Dit is inderdaad de juiste redenering, althans indien de relatie 'steiler-sneller', 'minder steil-langzamer' gelegd is.
Wordt die gelegd? Het lijkt wel. Bij vraag 2g wordt de relatie 'steilst-snelst' zonder discussie aanvaard (observatie Rijkje Dekker . . .).
In de klassikale nabespreking merkt een van de leerlingen op "gaat hoger", waaraan de lerares toevoegt: "doet dezelfde afstand in kortere tijd". De parallelle groep (observatie Paul Herfs 10-1-85) is niet

Fietsen (3)

Hier zien jullie Yoeri's grafiek opnieuw.



Maken jullie de volgende vragen weer éérst alleen.

a. Sanne vertrekt gelijk met Yoeri uit Losser. Na 20 minuten ligt ze precies een kilometer achter op Yoeri. Ze komt 5 minuten later dan Yoeri op school aan.
Hoe kun je zeker weten dat Sanne onderweg *niet* steeds met dezelfde snelheid heeft gefietst?
Schets de grafiek van Sanne in hetzelfde rooster.
Iedereen klaar? Bespreken maar.

Samen verder.

b. Jullie hebben allemaal een grafiek van Sanne geschetst. Zijn die alle *precies* hetzelfde? *Moet* dat zo zijn? Wat *moet* bij alle grafieken hetzelfde zijn?

c. Robert gaat 5 minuten later dan Yoeri uit Losser weg en komt 5 minuten eerder op school aan.
Hoe kun je zeker weten dat Robert Yoeri heeft ingehaald?

d. Teken Robert's grafiek, ook in hetzelfde rooster, als je weet dat hij met een *constante snelheid* heeft gefietst. *Moet* Robert's grafiek bij jullie allemaal precies hetzelfde zijn? Waarom

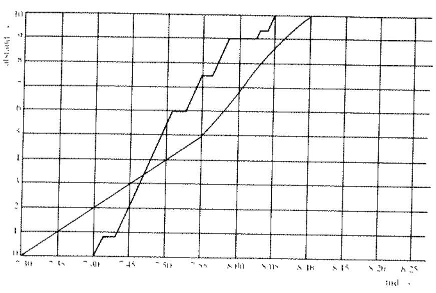
Als jullie het goed getekend hebben, dan 'ontmoeten' de grafieken van Yoeri en Robert elkaar.
Meestal wordt dat zo gezegd: "*De grafieken* snijden *elkaar*"

e. Vul in:
Robert haalde Yoeri om ..... minuten voor 8 in. Ze waren op dat moment nog ongeveer ..... kilometer van school verwijderd.

Fig. 5

aan 2g toegekomen; de leraar beantwoordt voor het bord de vraag met "tussen 7.55 en 9.05, want daar gaat de lijn steil."
In beide gevallen een instinctief gevoel voor wat er aan de hand is, maar geen bewustmaking, die toch echt niet zo moeilijk zou zijn. En die zeker nodig is – voeg ik eraan toe – want de verleiding "steiler" juist met "langzamer" te relateren, is groot genoeg om op andere plaatsen tot uitdrukking te komen.

Fietsen (4)



Alima gaat met de bus naar school. Ze mag niet fietsen van de dokter. Ze neemt altijd de bus van 5 over half 8. Die stopt bij school om 8 uur.

Je ziet de grafiek van Yoeri en die van Alima-in-de-bus.

a. Reed de bus op tijd vandaag?

b. De bus is onderweg een aantal keer gestopt. *Hoe* kun je dat aan de grafiek zien?

c. Hoeveel keer stond de bus stil? Hoe lang duurde de langste stop?

d. Hoe laat, en hoe ver van Losser haalde de bus Yoeri in? Hoe zou dat geweest zijn als de bus *wel* op tijd had gereden?

e. *Hoe* kun je aan de grafieken zien dat Alima eerder halverwege Losser-Enschede was dan Yoeri? Hoeveel minuten?

f. Hoeveel kilometer moest Yoeri nog fietsen op het moment dat Alima bij school uit de bus stapte?

g. Hoe laat (ongeveer) was Alima's voorsprong het grootst?

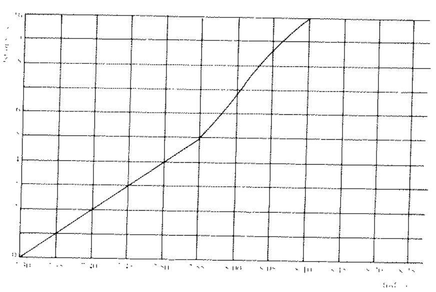
h. Beredeneer dat er een moment geweest moet zijn waarop Alima's voorsprong *precies* één kilometer was.

Fig. 6

Valkuilen, waarin ontwerpers noch leraren erg hebben, en die pas in de les blijken, zijn ook een logisch probleem. Bewustmaking is hier onvermijdelijk. Laten we op wat ik hier bedoel ook een etiket plakken: 'Het logisch gevaar van de starre rooster'. U ziet hier op al deze bladen (fig. 5, 6, 7) de intervallen van 5 minuten aan die van 1 km door middel van hokjes gekoppeld. Het kan niet anders of talloze malen worden vragen omtrent afstanden met tijden beantwoord en omgekeerd — altijd in de vaste koppeling 1 km = 5 minuten.
Het is vaak niet kilometers of tijdsintervallen tellen, maar hokjes tellen. 1 km en 5 minuten vallen onder het begrip 'hokje'. Al wordt de verwisseling van tijd en afstand telkens gecorrigeerd — er is geen reflectie op en dat wreekt zich later in andere contexten bij het telkens verwisselen van de twee variabelen.
Dus 'halverwege' Losser-Enschede (fig. 4, 6) wordt 'halve tijd'. Dat dit verschil wel bewust kan worden gemaakt, laat een voorbeeld uit ander werk van sectie III van de SLO zien (fig. 8). Een waardevol voorbeeld, te mooi om door commentaar te bederven.

Fietsen (5)

Nogmaals Yoeri's grafiek.



Geeske lag om 10 voor 8 precies 2 kilometer op Yoeri voor. Ze kwam gelijk met Yoeri aan op school. Onderweg heeft ze met een constante snelheid gereden.

a. Hoe laat was Geeske van huis vertrokken?

b. In de krant 's avonds leest Yoeri een berichtje dat voor hem van belang kan zijn:

> In verband met asfalterings-werkzaamheden is morgen de weg Losser-Enschede voor alle verkeer, in beide richtingen afgesloten. Het betreft het gedeelte van de weg gelegen tussen kilometerpaal 7 en 8 (vanaf Losser). De blokkade begint om 8 uur 's morgens en zal ongeveer een uur duren. Automobilisten en langzaam verkeer wordt aangeraden met oponthoud rekening te houden.

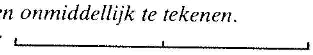
Zou het nodig zijn dat Yoeri eerder van huis gaat morgen? Waarom? Zo ja, hoeveel minuten?

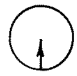
Fig. 7

Fred en Frank

Fred en Frank zijn twee joggers die van Hengelo naar Enschede lopen. Fred loopt de helft van de afstand hard en wandelt de andere helft. Frank loopt de helft van de tijd hard en wandelt de andere helft. Beiden joggen even snel en ze wandelen ook even snel.

► Wie is er het eerst in Enschede?

De leraar meldt in zijn verslag:
Leonie en Yvonne; twee meisjes uit de eerste klas. Deze leerlingen begonnen onmiddellijk te tekenen.
Yvonne: 

Leonie: 

(Dit stelt een klok voor, maar ze zag zelf dat deze tekening weinig zou opleveren.)

Daarna was er grote behoefte om, zowel de gebruikte tijd als de afstand te weten.
Ze probeerden wat met getallen te rekenen, maar konden niet tot een conclusie komen. Leonie nam toen Yvonne's tekening weer en zei:
"Frank komt met rennen verder dan de helft van de afstand."
Ze kon het zelf niet beargumenteren, maar toen ging bij Yvonne een licht op: "Als Fred in het midden is, dan heeft hij minder dan de helft van de tijd gebruikt."

De tekening werkt bij Yvonne als een positieve katalysator: Al kijkend naar het plaatje

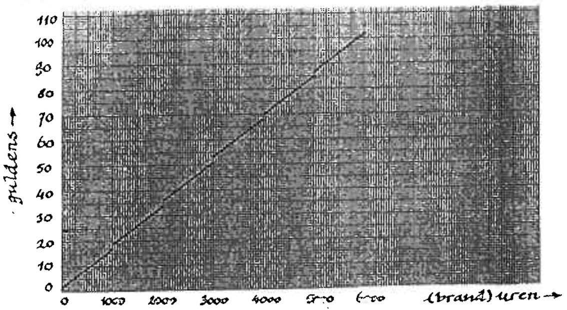
kwam ze tot een goede redenering.

Fig. 8

Lampen (1)

Een gloeilamp verbruikt stroom, als hij brandt.
Een lamp van 75 Watt kost ongeveer 1.5 cent per uur aan elektriciteit, ofwel *f* 15,- per 1000 branduren.
Na die 1000 branduren (ongeveer) geeft hij het meestal op; dan moet je een nieuwe kopen.
Prijs (pakweg) *f* 2,-.

De grafiek geeft je de kosten, afhankelijk van het aantal branduren.



a. Waarom zijn er 'sprongetjes' in de grafiek te zien?

De laatste jaren zijn er een aantal energie-besparende lampen in de handel gekomen, zoals de Philips SL-lamp. Deze verbruikt veel minder elektriciteit, maar geeft evenveel licht als de 75 Watt gloeilamp.

De SL-lamp brandt ongeveer 1000 uur voor *f* 4,-. De lamp zelf kost rond de 30 gulden én gaat zo'n 5000 branduren mee. Dan moet er een nieuwe komen.

b. Teken de kostengrafiek van de SL-lamp.

c. Trek conclusies uit de grafieken.

Fig. 9

Lampen (2)

Jet: *"In de afgelopen jaren is elektriciteit steeds duurder geworden. Ik denk dus dat de komende jaren ook wel zo zal zijn."*

a. Als we ervan uitgaan dat de prijs van de lampen voorlopig niet verandert, is Jet's uitspraak een argument om SL-lampen te kopen, of juist niet? Hoe kun je dat met de grafieken duidelijk maken?

De elektriciteitsrekening is altijd opgebouwd uit twee soorten kosten. Ten eerste de kosten voor de verbruikte stroom en ten tweede 'vastrecht'. Dat vastrecht is een bedrag dat je altijd betalen moet, ook al heb je helemaal geen stroom verbruikt.

b. Als het vastrecht-bedrag met een tientje omhoog gaat, heeft dát invloed op de beslissing om SL-lampen te kopen?

c. Waarom zou het niet veel zin hebben om in een ruimte waar de lamp niet veel brandt, bijvoorbeeld in de WC of in de kelder, de gloeilamp door een SL-lamp te vervangen?

Jack: *"Bij mij snijden de grafieken van de gloeilamp en van de SL-lamp bij ongeveer 200 branduren.*
Dus moet ik eerst 2200 uur een gewone gloeilamp gebruiken. Als die 2200 uur dan voorbij is, dan draai ik de gloeilamp eruit en zet ik er zo'n SL-lamp in. Da's 't voordeligste, geloof ik."

d. Je ziet dat Jack een beetje begint te twijfelen aan z'n conclusie. Wat vinden jullie ervan?

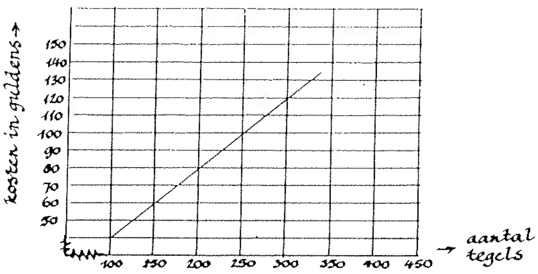
Fig. 10

Ik ga over tot een ander onderwerp: De *vastrechtlogica*. Als plaatjes laat ik u hierbij zien fig. 9-14. Het zijn allemaal rechtlijnige grafieken, die niet door de oorsprong gaan, dus van inhomogene lineaire functies, in de context van betalingen die samengesteld zijn uit een vast bedrag en een variabel bedrag dat lineair van een variabel verbruik afhangt. In de lesverslagen die ik heb bestudeerd blijft dit gemeenschappelijk element ongeëxpliciteerd. De leerlingen ontmoeten ook steeds weer dezelfde moeilijkheden. De leerlingen leggen geen verband tussen 'isomorfe' problemen — althans heb ik geen uitingen ten deze kunnen opmerken. Maar ook het onderwijs schiet hierin tekort. Ik vraag me af of deze tekortkoming niet al in het materiaal, de bundels werkbladen, zit ingebakken. Had het verband tussen deze op de leerlingen als losse taken overkomende bladen niet – althans in de vorm van stimulans tot reflectie – in het materiaal moeten worden gelegd? Was dit materiaal niet een natuurlijke aanleiding geweest voor een soort algebraïsche aanzet: formules zoals 'vastrecht + aantal kilometers maal kilometerprijs', of 'prijs van lamp maal aantal lampen + duizendtal branduren maal prijs per duizendtal branduren'. [3]. Dit is dan 'verhalende algebra' die in de omgang spoedig via afkortingen tot een letteralgebra kan afslijten — een goed voorbeeld van niveau-verhoging en vooruitgrijpend leren. De leraren gaan niet verder dan er terloops tabellen bij te halen, maar tabellen lijken me een te zwak bindmiddel om de vereiste verbanden tussen isomorfe problemen te leggen.

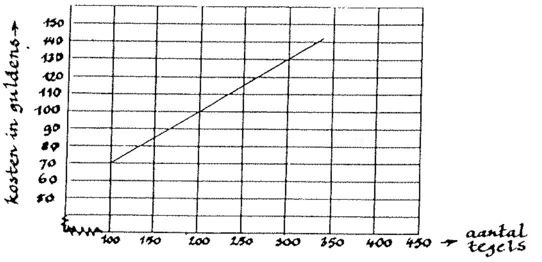
Van de leerlingen wordt gevraagd verbanden te leggen tussen 'verhalen' en 'meetkundige beelden' (grafieken). Dat lukt ook vrij aardig, maar er is een schrijnend gebrek aan verbalisering waardoor ook de interactiviteit nadelig wordt beïnvloed. Soms weten de leerlingen zich aardig te behelpen. Van 'Gasrekenen (1)' (fig. 13) worden de vragen a en b op zijn best beantwoord in termen van het soort "dat zie je aan de guldens" — nog niet eens zo'n gek antwoord omdat de 'guldens' op de verticale as zijn te vinden. De leraar streeft natuurlijk – maar dan vergeefs – naar meetkundige formuleringen als, dat de grafiek op elk punt (in het beginpunt) hoger ligt dan de andere.

De opzet doet me denken aan meetkunde van de kubus te willen onderwijzen zonder termen als 'kubus', 'hoekpunt', 'ribbe', 'zijvlak', 'diagonaal' beschikbaar te stellen. De wiskundige terminologie van de werkbladen blijft zowat beperkt tot de term 'grafiek'. Men is vermoedelijk teruggeschrokken voor 'variabele' en 'functie' — een vrees die mijns inziens overdreven is. Ook 'abscis' en 'ordinaat' heeft men vermeden, maar zelfs 'horizontaal' en 'verticaal', met als gevolg een pover, demonstratief taalgebruik door de leerlingen vertoond (hiero, ditte, datte, die kant op), of zelfs niet eens dit — de observatieverslagen zijn doorspekt met opmerkingen omtrent de vingerbewegingen van de leerlingen. Dit armoedige taalgebruik wordt ook door de leerkrachten niet of nauwelijks opgevijzeld. Abstraheren en generaliseren is in eerste aanleg een

Bouwhuis/Van Tegelen (1)



Deze grafiek laat zien hoeveel je moet betalen voor een bepaald soort tegels als je ze door firma Bouwhuis thuis laat bezorgen, afhankelijk van het aantal tegels dat je koopt.
Hieronder zie je net zo'n grafiek, maar dan die van firma Van Tegelen bv.



Als je de grafieken met elkaar vergelijkt, dan zie je dat ze niet hetzelfde zijn. Dat verschil komt doordat de ene firma geen bezorgkosten laat betalen, en dat de tegels bij de andere firma per stuk iets goedkoper zijn.

Een goede kennis van jullie is van plan om tegels te gaan kopen.
Ze heeft gehoord dat jullie er iets van af weten.
Wat zouden jullie haar aanraden?

Fig. 11

Gasrekenen (1)

Op de volgende bladzijde vinden jullie een drietal grafieken.
Ze laten zien hoe hoog de gasrekening was in 1970 en 1978, afhankelijk van het aantal m^3 gas dat is verbruikt.
De derde grafiek geeft aan hoe hoog de gasrekening in 1983 zal gaan worden. De prijs per m^3 en het vastrechttarief zijn namelijk al bekend.
Ook bij deze grafiek hangt de hoogte van de rekening af van het gasverbruik.

a. Hoe kun je aan de grafieken zien dat de gasprijs in de drie genoemde jaren steeds hoger is geworden?

b. En waaraan zien jullie dat ook het vastrechttarief steeds is toegenomen?

c. Hoeveel m^3 gas moet familie de Wit minder gaan gebruiken om de gasrekening met 500 gulden te drukken? Normaal gesproken zouden ze zo'n 2500 m^3 verbruiken.

d. Hoeveel m^3 gas zou familie de Wit minder moeten gaan gebruiken om de gasrekening te halveren?

e. In 1975 was de gasprijs per m^3 het dubbele van de prijs per m^3 in 1970. Het vastrechttarief was toen al even hoog als in 1978.
Teken de kostengrafiek van 1975.

f. Mevrouw Willemse is de laatste jaren erg 'energie-bewust' geweest. Thermostaat een graadje lager, dubbele beglazing, muurisolatie enzo.
"We zijn zoveel minder gas gaan gebruiken dat we dit jaar waarschijnlijk evenveel moeten gaan betalen als in '78, toen gebruikten we ongeveer 3000 m^3."
Hoeveel m^3 gebruikt mevrouw Willemse dit jaar volgens jullie?

Fig. 13

Welke auto huren?

Els en Willeke zijn van plan om naar Spanje te gaan op vakantie, voor naar hefst 4 weken.
Ze zouden graag met de auto gaan, want dan hebben ze de gelegenheid om ook onderweg in Frankrijk nog een tijdje rond te trekken.
Maar, ze hebben geen auto.
Bij Els om de hoek zit een garage. Daar worden tweede- en derdehands auto's verkocht en – soms – verhuurd.
Els kent de eigenaar van de garage wel. Meneer Zwier. ("Met een auto van Zwier rijdt u jaren met plezier.")

Meneer Zwier wil Els en Willeke wel helpen.
"Ik heb hier een prima Toyota, een degelijk en betrouwbaar automobiel. In goeie staat. Omdat jullie het zijn mag je die meenemen voor f 150,– per week. Benzine en olie enzo voor jullie kosten. Wegenbelasting en dergelijke voor de mijne. Je mag trouwens ook deze Renault meepakken. Ook een klasse wagentje hoor. Moet wel wat meer kosten. Vooruit, laten we het op 200 gulden houden. Per week, natuurlijk. Omdat jullie het zijn."

Thuis:
Els ziet de Toyota wel zitten. *"Die is voor die vier weken f 200,– goedkoper dan die Renault".*
Willeke weet dat zo net nog niet. Volgens haar rijdt de Renault veel zuiniger. *"En daar moet je ook rekening mee houden. Wie weet komt dat toch nog voordeliger uit."*

Terug naar meneer Zwier.
"Je hebt gelijk dat die Toyota meer kost aan benzine. Waar gaan jullie heen? Frankrijk en Spanje? Daar is de benzine flink aan de prijs. Reken maar op 18-cent-de-kilometer voor die Toyota. En voor de Renault zal het zo'n 12 cent per kilometer zijn. Hebben jullie al besloten welke?"
"Dat willen we nog even uitrekenen."
"Dan hoor ik het nog wel."
"Tot ziens, meneer Zwier."
"Tot kijk, dames."

Vermoedelijk zullen Els en Willeke zo tussen de 3000 en 5000 km rijden. Wat zou de voordeligste auto zijn om mee op vakantie te gaan?

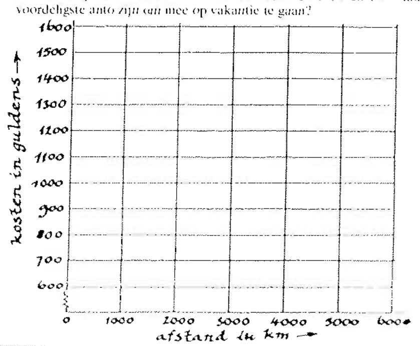


Fig. 12

Gasrekenen (2)

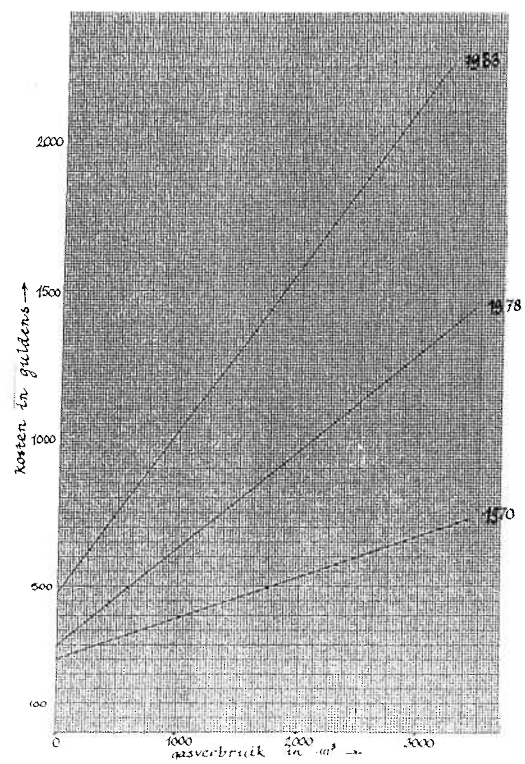


Fig. 14

impliciete bezigheid, die echter door het scheppen of – als dat niet spontaan verloopt – het aanreiken van verbale steun, geëxpliciteerd kan worden terwille van het communiceren met zichzelf (met als gevolg beklijven) en met anderen (terwille van de interactiviteit). Ik vraag me af of, bij het opzetten van de bundels, niet ten onrechte te veel op de neiging tot produktief ingrijpen van de leerkracht ter bevordering van het verbaliseren is vertrouwd.

* Lezing Werkverband Nascholing, Ede 25 april 1985.

[1] *How does reflective thinking develop?:* PME 4 Warwick 1979. Duitse vertaling, met toevoeging: Neue Sammlung *23*, 5, 485-497 (1983).

[2] *Beweisen im Mathematikunterricht.* Schriftenreihe Didaktik der Mathematik. Klagenfurt *2*, 183-200 (1978).

[3] Hieraan is inmiddels in een nieuwe bundel voldaan.

Vrouwen en wiskunde

Op zaterdag 28 september wordt de achtste landelijke dag van de werkgroep "vrouwen en wiskunde" gehouden in het gebouw CUNERA, Nieuwe Gracht 32, Utrecht.
De dag begint om 10.00 uur en eindigt om 16.00 uur. 's Morgens zal de discussie – wiskunde in de toekomst (verplicht?) – voortgezet worden.
Voor verdere informatie: Nora Blom, tel. 020-927416.