Oneindig als wiskundig begrip

Een geval apart

W.J.H. Fewpact*
OGLO

Samenvatting

Lijkt 'oneindig' didactisch gezien een begrip met een aparte status? In de meeste leerboeken neemt het geen opvallende plaats in. Toch is een juist gebruik van het begrip bij een aantal onderwerpen van cruciaal belang. Een geval apart, zou je kunnen zeggen.
In dit artikel wordt nader ingegaan op het begrip 'oneindig'.

Summary

How to treat the mathematical concept 'infinity'?
What ideas do children have about infinity?
In most textbooks not too much attention is paid to this concept. But it plays a crucial role when treating certain subjects in mathematics. So how should 'infinity' be treated from a didactical point of view?
These questions are discussed in this article written bij ten teacher-trainers and others working in the field of math-education.

Inleiding

"Wat is, denk je, in de wiskunde de betekenis van oneindig?"
Dirk-Jan, één van de leerlingen (VWO-4) die we deze vraag voorlegden, gaf als antwoord:
"Een zo groot getal dat in werkelijkheid net niet mogelijke dingen mogelijk maakt."
Deze typering geeft iets aan van de sterk getalsmatige associaties die veel leerlingen bij het begrip oneindig hebben. Maar tegelijkertijd wordt ook iets aangegeven van het uitzonderlijke karakter van dat 'getal': het maakt 'net niet mogelijke dingen' mogelijk. Blijkbaar neemt oneindig als wiskundig begrip een aparte plaats in voor Dirk-Jan.
Lijkt 'oneindig' didactisch gezien een begrip met een aparte status? In de meeste leerboeken neemt het geen opvallende positie in. Toch is een juist gebruik van het begrip bij een aantal onderwerpen van cruciaal belang. Een geval apart, zou je kunnen zeggen. In dit artikel gaan we nader in op het begrip oneindig.

Voorstellingen van oneindig en de betekenis daarvan voor wiskundige leerprocessen

Wat kun je je voorstellen bij oneindig?
Kun je je eigenlijk wel iets voorstellen bij oneindig? Natuurlijk! Allerlei zaken als ontelbaar veel, onmeetbaar, altijd, telkens terugkerend,... en zelfs het formele teken heeft in het leven van alledag een betekenis gekregen (denk maar aan een fototoestel).
Hoewel 'oneindig' veeleer associaties oproept met iets dat verschrikkelijk groot of ontzettend ver weg is, kun je je er ook iets bij voorstellen dat buitengewoon klein is. Je kunt je een plankje of iets dergelijks inbeelden waarvan je de helft neemt; van die helft neem je weer de helft, daarvan weer de helft, enzovoorts. Als je nu maar altijd met dat halveren doorgaat ontstaat er iets dat ontzettend klein is en toch niet niks. Nochtans lijkt er met zulke voorstellingen wel iets raars aan de hand te zijn. Het heeft er veel van weg alsof je je iets onvoorstelbaars probeert voor te stellen, iets dat uit de aard der zaak niet aanschouwelijk is. Het is dan ook niet zo verwonderlijk dat oneindig bij veel mensen associaties met iets onvoorstelbaars oproept. Zijn zulke intuïtieve denkbeelden rond oneindig uit te bouwen tot een fundamenteel besef van het wiskundige begrip oneindig? Een belangrijke vraag. Indien dat het geval is, is daarmee een belangrijke bron voor de opbouw van een wiskundig leerproces aangeboord. Bij wiskundige begrippen als 'breuk' of 'vermenigvuldigen' bijvoorbeeld kun je je iets voorstellen uit de reële wereld wat de wiskundige essentie van die begrippen onverlet laat, bepaalde eigenschappen ervan in beeld brengt, en als het ware een embryonale vorm van die begrippen oproept of vertegenwoordigt. Zulke voorstellingen stellen je beter in staat om zulke begrippen te bevatten. Geldt dat bij oneindig ook?
Wat is de wiskundige betekenis van oneindig eigenlijk?
Of: "Een verzameling getallen heeft ∞ als kleinste bovengrens als zij niet naar boven begrensd is, dat wil zeggen als geldt:

$$\underset{v \in V}{\forall} \; \underset{v^* \in V}{\exists} \; (v^* > v)$$

Of: "Een verzameling is oneindig als zij gelijkmachtig is met een echte deelverzameling."
Dit laatste is bijvoorbeeld te zien in het volgende nomogram.

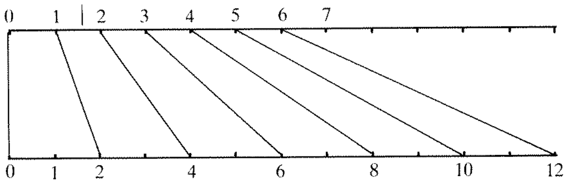

fig. 1

Hoe laat je je leerlingen greep krijgen op de wiskundige essentie van oneindig zoals die besloten ligt in dergelijke omschrijvingen? Het is duidelijk dat je bij het onderwijzen van het begrip oneindig niet heen kunt om de intuïtieve noties van de leerlingen. Anderzijds is het zeer de vraag of zulke noties wezenlijke aanknopingspunten bieden voor een expliciete behandeling van oneindig. Wat voor voorstellingen leven er zoal bij jonge mensen? Hoe kan in het onderwijs bij deze voorstellingen worden aangesloten? Zijn er factoren te onderscheiden die het leerproces gunstig kunnen beïnvloeden? Op deze vragen wordt in het vervolg van dit artikel ingegaan. Een onderzoek naar de intuïtieve noties van jonge mensen bij oneindig geeft daarbij veel stof tot nadenken; voor wat betreft leerprocessen lijken een aantal voorzichtige conclusies mogelijk. Vooralsnog stellen we het volgende vast.
Als het begrip oneindig expliciet aan de orde wordt gesteld zijn er al heel wat wiskundige ervaringen aan vooraf gegaan. Zo is er in de loop der (school-)tijd het besef gegroeid van het altijd maar doorlopen van de rij der natuurlijke getallen, later bekrachtigd in de bekende stippeltjesaanduiding:
$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4, \ldots\ldots\}$
Er is inzicht ontstaan dat op een getallenlijn tussen twee breuken, hoe dicht ook bij elkaar gelegen, altijd weer een andere breuk (en zelfs een heleboel breuken) te vinden is. In de meetkunde kan ervaren zijn dat het met het aantal punten op een lijnstuk ook vreemd gesteld kan zijn. In onderstaande figuur ligt elk punt van de lijn CD op precies één lijn getrokken vanuit punt E. Datzelfde geldt voor elk punt van AB. De conclusie lijkt dan gewettigd dat er precies evenveel punten op AB en CD liggen. Op het oog ziet het er toch anders uit.

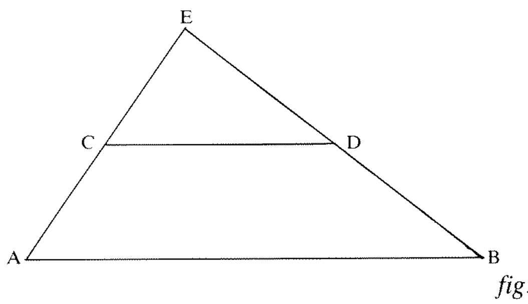

fig. 2

Bij een nadere en expliciete behandeling van oneindig zullen het vooral dergelijke wiskundige ervaringen zijn, die bewustgemaakt en nader onderzocht moeten worden. Het ligt dan ook voor de hand dat bij het werken aan problemen als het bovenstaande veeleer op grond van wiskundige voorstellingen en ervaringen, dan op grond van alledaagse voorstellingen gehandeld en gedacht wordt. Dit is fundamenteel anders dan bijvoorbeeld het oplossen van de opgave $3 \times 4 = \ldots$, waarbij voorstellingen als 3 groepjes van 4 kinderen of 3 bomen met elk 4 takken de weg naar de oplossing kunnen wijzen.

Het lijkt erop dat, bij de uitgroei van de intuïtieve notie van oneindig tot een volwaardig wiskundig begrip, er een moment is dat kinderen boven die intuïtieve kennis en huis-tuin-en-keuken-weetjes moeten uitstijgen. Geconfronteerd met het tekortschieten van die kennis moeten zij een meer reflectief standpunt innemen, waarbij de wereld der wiskunde zelf onderwerp van onderzoek en beschouwing wordt. Niet de reële wereld maar de ideële wereld, de wereld der wiskundige ideeën, is nu uitgangspunt van de onderzoekingen. Dit kan een voorzet zijn om oneindig als 'denkding' op te vatten, als element van een formele wereld-in-aanbouw die van tijd tot tijd verder uitgebouwd wordt.

Ideeën rond het grootste getal bij jonge kinderen

Peuters, kleuters en getallen; welke noties?
Het getalbegrip van de kleuter komt mede tot stand door de communicatie met anderen. Gijsbert, wiens rekenproblemen in Willem Bartjens zijn beschreven (zie jaargang 1) kon aan het eind van de eerste klas nog niet verder dan vijf tellen. Kennelijk had Gijsbert niet meer geleerd. Misschien omdat hij de capaciteiten niet had, maar waarschijnlijk ook omdat Gijsbert uit een taalarm milieu kwam. Natuurlijk kwamen situaties en voorvallen met kwantitatieve aspecten voor in Gijsberts kleutertijd, maar hij pikte er weinig uit op. Ze werden ook niet besproken of doordacht. Zo verwierf Gijsbert een mager getalbegrip.
In peuter- en kleutertaal worden kleine hoeveelheden soms al met telwoorden aangegeven. Grotere hoeveelheden, zes of meer bijvoorbeeld, zijn voor veel kleuters of peuters niet te tellen. Daarop past het woord 'veel'. Voor 'veel' worden ook andere aanduidingen gebruikt. Freudenthal beschreef dat zijn kleinzoon Bastiaan veelvuldig de formulering ". . . als de hele wereld" bezigde. De jongen bedoelde daar dan 'zeer veel' of 'zeer groot' mee.
Jonge kinderen hebben wel een bepaalde notie van zeer veel, van zeer groot, en dergelijke, maar hun taal wordt door ons, volwassenen niet altijd direct begrepen. Bastiaan gebruikte ". . . als de hele wereld." Andere kinderen vinden andere oplossingen als ze hun intuïtieve noties verwoorden. Al tellend zeggen ze bijvoorbeeld: één, twee, drie, één twee, drie, één, twee, drie; zo benoemen ze grote hoeveelheden met behulp van hun eigen, nog beperkte taal; ze geven daarmee als het ware een oneindig voortdurende cyclus aan. Kinderen kennen cyclisch verlopende processen: bij dagelijks terugkerende gebeurtenissen of bijvoorbeeld bij de klok.

Prille noties ontwikkelen zich door de creatieve bewerking van de kinderen zelf tot rijpere noties. Taal is hierbij belangrijk. Wie geen woorden ergens voor heeft, kan niet met anderen van gedachten wisselen.

Een grootste getal? Je moet het kunnen benoemen.
Wat is het grootste getal dat je kent? Deze vraag werd gesteld aan enkele kinderen.
- Daniëlle (6,1): negenduizend.
- Maarten (8,4): een miljard negenhonderd negenennegentig.
- Brugklassers (12/13 j): miljard; triljoen; triljard; oktiljoen, quadriljard.

Als brugklassers de vraag schriftelijk beantwoorden, schrijven ze ondermeer:
- "Een één met 50 nullen, ik weet niet welke naam dat getal heeft."
- Cijferreeksen die uit negens bestaan, die veelal in drietallen zijn gegroepeerd.
- Cijferreeksen met een 1 en veel nullen, al of niet gevolgd door enz. of . . .
- Combinaties als 999000 triljoen, 100 miljard.

W.: Dus negenduizend is het grootste getal dat je kent.
Een groter getal is er niet?
D.: Ik ken niet verder.

Een stukje uit het gesprek tussen Willem Faes en zijn dochter Daniëlle (Willem Bartjens, jrg. 4 nr. 2).

Dit wijst erop dat Daniëlle wel weet dat er grotere getallen zijn, maar dat ze ze niet kan benoemen. Als aan Maarten gevraagd wordt om zijn grootste getal op te schrijven, schrijft hij letterlijk wat hij zegt.

fig. 3

Uit: Willem Bartjens jrg. 4 nr. 2

Lise (14 j) merkte op: "miljoen (6 nullen), miljard (8 nullen), biljard, maar ik weet niet wat dat is. Ik weet niet of er nog meer getallen zijn." Een voorzichtige conclusie 'geen naam, dan bestaat het voor haar ook niet'?
Alhoewel wij weten dat er geen grootste getal bestaat, hebben wij toch de behoefte om 'oneindig' te benoemen en er een symbool voor te bedenken.
Is dat oneindig nu het grootste getal? Nee, en toch als je je iets bij oneindig wilt voorstellen zal desondanks dat grotere c.q. het grootste getal intuïtief een rol blijven spelen.

Opschrijven of uitspreken?
We moeten beseffen dat het begin van de telrij 1,2,3,4 . . . door jonge kinderen gewoon uit het hoofd geleerd zal moeten worden. Gelukkig vinden kinderen dat leuk, net zoals ze graag allerlei rijmpjes en liedjes van buiten leren. Op een gegeven moment zien ze de patronen en het systeem in het taalgebruik, zoals twee-tig, drie-tig, vier-tig, vijftig etc.

We kunnen zoiets ook op ons eigen niveau constateren als we proberen in de grote getallen te tellen. Hoe zit dat nou? Tien, honderd, duizend, miljoen, miljard, biljoen enz., zijn daarbij onze handvaten.
Het systeem 'joen' – 'jard' wordt afwisselend gebruikt met wat latijnachtige voorzetsels ervoor. Hoe kun je zo'n oneindig lang lied – al heeft het enige structuur – uit je hoofd leren?
Kent men echter de notatiewijze van onze getallen dan is zowel de kwestie van de naamgeving als die van de oneindigheid van de telrij in principe opgelost. De kilometerteller doet het volgende: $\boxed{0}\boxed{2}\boxed{9}\boxed{9}\boxed{9}$ één km verder $\boxed{0}\boxed{3}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}$ één km verder $\boxed{0}\boxed{3}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}$. Elke stap (i.c. 1 km) noteert één getal, dat uniek is in de telrij. Het plaatswaardensysteem staat garant voor een ijzeren orde in de oneindige rij van de getallen. Je hoeft de getallen niet eens uit te spreken op de ons bekende manier: "drieduizendnegenhonderd en éénenveertig" (3941) zou je gewoon kunnen afroepen als "drie, negen, vier, één", hetgeen een consequent en uniform benoemingssysteem zou zijn, echter met talloze bezwaren in de spreektaal.

"Wat is het grootste getal dat jij kent?"
- *"Ik weet hoe ik miljard moet schrijven, maar als ik een 1 met 50 nullen zie weet ik niet welke naam dat getal heeft."*
- *"100000000 biljard + 10000000 triljard + ... enz."*
- *"Dat kan ik niet onder woord zeggen."*
- *"Miljard."*
  "Ja, ik geloof het wel. Alle getallen, ontelbaar, een 1 met allemaal nullen erachter en je kan er altijd nog een nul achter zetten."
- *"Eén biljard."*
- *"Niet onder woorden te krijgen: 1000000000000000 000000000000000000000000."*
- *"Oktiljoen."*

"Zijn er nog grotere?"
- *"Ja zeker."*
- *"Ja."*
- *"Dat je gewoon geen getal kunt voorstellen, want er zijn altijd grotere."*

Hierboven staan een aantal antwoorden op de vraag "Wat is het grootste getal, dat jij kent? Zijn er nog grotere?", die aan een aantal 13/14-jarige leerlingen van HAVO/VWO gesteld werd. Wat gemeenschappelijk is, is dat ze intuïtief begrijpen dat je de reeksen cijfersymbolen voort kunt zetten en dat er inderdaad geen eind aan komt, maar dat de naamgeving een probleem vormt. Het is daarom heel zinvol deze kwestie ook na de basisschool nog eens aan de orde te stellen, zeker als het verbonden wordt met het schrijven van de getallen als machten van 10.

Wat is het grootste getal dat je kent? Zijn er grotere?
Een vraag met een conflict. Kinderen willen daar wel doorheen. Walter (8 jaar) is heel beslist: "110 is het grootste getal, want zo lang kan een mens leven." Met zo'n antwoord is de vraag: "Zijn er grotere" eigenlijk overbodig. Andere kinderen noemen een getal en op de vragen "zijn er grotere" bouwen ze daarop verder: 1000, ... 2000, ... 4000, ... 9000 en dan stokt het. . .

Maarten werkt modulo miljard-duizend:

> *W.: Als ik nou een miljardnegenhonderdnegenennegentig pepernoten heb, en ik doe er één pepernoot bij, heb ik dan meer?*
> *M.: Nee, minder, Weet je waarom? Omdat het dan weer nul wordt.*

Uit het gesprek van Willem Faes met zoon Maarten (Willem Bartjens jrg. 4 nr. 2).

Het verschijnsel "op een bepaald moment starten we weer bij nul" roept in bijna elke groep studenten wel bij iemand de reactie op: "dat dacht ik vroeger ook!"

Zijn er grotere? We vroegen het brugklasleerlingen. De meesten vinden het bestaan van grotere getallen dan hun eigen 'grootste' aannemelijk ("zal wel", "ja, ik denk het wel") of zijn van dat bestaan overtuigd ("ja, 'tuurlijk"). Enkele leerlingen antwoordden uitvoeriger:
"Ik denk het wel, ik heb nooit de moeite genomen om jaren achter elkaar te tellen."
"Misschien wel, maar niet dat ik weet, zover kan ik niet tellen dus."
"Ja, maar die getallen ken ik niet." "Weet ik niet; ontelbaar?"
Drie leerlingen antwoorden: "Nee."
Anderen zeggen: "Er komt geen eind aan."

Er komt geen eind aan

Even terug naar groot, groter, dus niet 'grootste'. Bekijk deze axioma's van Peano voor de verzameling natuurlijke getallen.

N1. *N bevat een natuurlijk getal, aangeduid door 1 (één!).*
N2. *Aan elk natuurlijk getal $a \in N$ is op eenduidige wijze een natuurlijk getal a^+, de opvolger van a, toegevoegd.*
N3. *Er bestaat geen $a \in N$, waarvoor $a^+ = 1$.*
N4. *Uit $a^+ = b^+$ volgt $a = b$.*
N5. *(Axioma van volledige inductie): Is A een deelverzameling van N met de volgende eigenschappen: $1 \in A$; uit $a \in A$ volgt, dat tevens $a^+ \in A$, dan geldt $A = N$.*

(Uit: F. Loonstra, Inleiding tot de Algebra, Wolters Noordhoff 1958).

De redenering dat er geen grootste getal is, omdat het steeds mogelijk is bij het vermeende grootste er 1 op te tellen, is zo helder als glas. Wie nu nog twijfelt, moet wel dom zijn. Het "zo kun je wel eeuwig doorgaan" komt om de hoek. In een gesprekje over de schrijfwijze 1000.000 en 1000.001, 1000.002 volgt de opmerking: "Zo ga je door tot er weer een 0 bijkomt. En zo kun je eeuwen door blijven gaan." Dit lijkt een toevallige associatie met tijd, via de gedachte aan het doortellen. Toch roept 'oneindig' vaak het begrip tijd op, of een vage associatie hieraan.

- Een kind verbaasde zich over de golven die uitliepen op het strand. Steeds kwamen er weer aanrollen. En dat ging maar door en door . . .
- Eb en vloed, dat blijft maar terugkomen, twee keer per dag.
- Een waterval . . . ; die stopt nooit.

Eén meer, twee meer, en al maar (zo) door vormen hier de aanzet tot het begrip oneindig in samenhang met een tijdsduur zonder einde.

De lagere school-leerlinge, die dagen, wekenlang bezig was met het invullen van de opvolgende natuurlijke getallen op een strook, kreeg een indruk van oneindigheid, of die nu aan de tijd of aan de getallenrij, of wellicht aan de combinatie van beide gebonden was. Ze zei op een zeker ogenblik: "En zo gaat dat door", hiermee wellicht een basis leggend voor een later brugklasinzicht in $\mathbb{N} = \{0,1,2,3, \ldots\ldots\}$.

De oneindigheid van de cirkelgang.
Of de oneindigheid zich in menselijke breinen vaak als cirkelgang manifesteert is de vraag; de volgende incidenten leren in ieder geval wel, dat 'cyclische ideeën' van oneindig voorkomen bij jong en oud.

Sander (5 jaar) babbelt onder het eten over de steeds terugkerende activiteiten van alledag, wakker worden, opstaan, wassen, aankleden, eten, spelen, naar school . . . , en zegt dan opeens: "Altijd maar door . . . eigenlijk is alles rond!"
Het "altijd maar door" van Sander lijkt te duiden op een aanwezige notie van oneindig, het 'alles is rond' op een cyclisch idee ervan. Naar het ontstaan van dat 'ronde idee' bij Sander kun je alleen maar raden. Is het zijn ervaring met de rondgaande beweging bij het kleuren, die van rollende wielen? Of is de gedachte misschien ingegeven door zijn 'bekendheid' met de klok?

Maarten (8,4) toont ook een soort cyclisch begrip als hem gevraagd wordt naar het grootste getal: "En als je zoveel pepernoten hebt en je doet er eentje bij, dan wordt het weer nul." Maarten rekent modulo 1000.001.000.

> *W.: Als ik nou een miljardnegenhonderdnegenennegentig pepernoten heb, en ik doe er één pepernoot bij, heb ik dan meer?*
> *M.: Nee, minder. Weet je waarom? Omdat het dan weer nul wordt.*

Bij Maarten lijken zich al heel wat ideeën van ons getallensysteem gevormd te hebben: hij construeert zijn grootste 'kilometergetal' met opvolger ('nul'), dus een systeem dat de mogelijkheid biedt om al maar door te tellen.
Van oudere kinderen zijn dergelijke 'cyclische gedachten' (nog) niet bekend. Wel is gebleken dat veel brugklassers bij het construeren van grote getallen, groter dan ze zelf kunnen benoemen, overgaan tot het denken en schrijven in reeksen van negens of nullen.

Bij een onderzoekje naar ervaringen met 'oneindig' onder veertien studenten wiskunde l.o., werden nog wèl een paar cyclische noties over oneindig aan onze verzameling toegevoegd.
Eén van de studenten vertelde, dat zijn eerste idee van oneindig ontstond in een biologieles over de kringloop van het water. Een andere student maakte zijn 'ronde voorstelling' van oneindig in een wiskundeles waar de grafiek van tan x aan de orde werd gesteld. Hij zag in gedachten de grafiek links van $\frac{\pi}{2} + k. \pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) om-

hoog gaan naar $+\infty$ en via $-\infty$ van onderen weer terugkomen rechts van die lijn. Een soortgelijk beeld had hij van het periodeverloop op de x-as: in een soort cirkelgang langs de x-as naar rechts en "via" $+\infty$ en $-\infty$ weer terug langs de negatieve x-as. (Zie ook "Ideeën over oneindig van VWO-leerlingen en NLO-studenten").
Kunnen dit soort ideeën betekenis hebben voor ons wiskunde-onderwijs?

Ideeën over oneindig van VWO-leerlingen en NLO-studenten

Rekenen met oneindig: enkele voorbeelden.
Derde klassers VWO vroegen we:
In de formule $y + x = 4$ past bij elke $x \in \mathbb{R}$ een $y \in \mathbb{R}$. Wat is het grootste getal dat y kan voorstellen?
Veel antwoorden kwamen neer op "zo groot als je maar wilt", "oneindig", of "elk getal uit $\mathbb{R}$". Daarnaast vielen antwoorden op waarin als het ware met "oneindig" werd gerekend.
Jasper: "y kan alles voorstellen, maar x wordt altijd het tegenovergestelde + 4."
Peter: "y kan zo groot zijn als het maar kan als er maar een getal x wordt bijgeteld zodat je 4 krijgt."
Eva hield een redenering aan de hand van voorbeelden (in de stijl van de Wageningse Methode): "$x = 25$, $y = -21$. Als $y = 4$, $x = 0$. Maar het kan ook bijv. $y = 25$, $x = -21$ etc. dus eigenlijk oneindig." Zou ze met haar 'oneindig' het aantal mogelijke oplossingen bedoelen, in plaats van het gevraagde, grootste getal?
Suzanne lijkt naar een antwoord toe te redeneren: "Kan alles zijn, 100, duizend enz. maar dan wordt x wel negatief", maar ze trekt geen verdere conclusie.
Ard daarentegen gaat juist een stapje verder dan de vraag, met zijn antwoord "oneindig, als x dan min oneindig plus 4."
Leticia schrijft kortweg "grootste getal = oneindig."

Leerlingen van een VWO-4 klas kregen na enkele lessen over exponentiële functies o.a. de volgende vragen:
$y = 3^x - 5$. Wat is de grootste waarde die y kan voorstellen? Hierbij zijn sommigen met hun rekenmachientje aan de slag gegaan, waarop dan het antwoord volgde: $y = 5{,}23.10^{99}$ $x = 209$. Enkele gaven het antwoord "weet ik niet."
Ilona antwoordt: "het grootste getal dat er bestaat" en Suzan schrijft: "dat maakt niet uit; 'het grootste getal' bestaat niet."
Tanja rekent; ze geeft als antwoord "(y is) enorm groot -5, x = enorm groot."
Petra gaf het opmerkelijkste antwoord: het oneindigste getal tot het oneindigste getal. Neem voor dit getal x; dan is het x.
We vroegen deze leerlingen ook:
Wat is het grootste getal y waarvoor geldt $x + y = 4$?
Ook daar kwamen antwoorden die wijzen op een soort rekenen met oneindig:
- oneindig; als x enorm klein is moet y enorm groot $+4$ zijn;
- y kan oneindig groot zijn zolang x 4 kleiner is;
- $4 - x$ oneindig negatief gekozen $= y$ als grootste waarde;
- als x negatief is en een erg groot getal, is y datzelfde getal $+4$, en dan positief.

Een gedachtengang zoals bij het eerste antwoord heeft wellicht ook ten grondslag gelegen aan de antwoorden "net niet oneindig" en "er is geen antwoord op: y kan oneindig groot zijn." Het lijkt of die leerlingen schromen om met 'oneindig' om te gaan als ware het een benoembaar, grijpbaar getal. Hoe worden deze half intuïtieve noties actueel in de wiskundeles, als limieten in beeld komen?

Limieten (be)grijpbaar maken met behulp van een zakrekenmachientje (ZRM).
Soms hebben limieten van quotiënten in onze schoolboeken de nare eigenschap dat zowel teller als noemer naar oneindig gaan als je de variabele naar oneindig laat gaan. Al snel kan het ezelsbruggetje op de proppen komen: gaat de teller sneller, dan is het oneindig; en gaat de noemer sneller, dan is het nul bijvoorbeeld:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2^x} = 0 \qquad \text{en} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \infty$$

Hoe het precies zit, wordt vaak overgelaten aan feeling van de leerling of aan een sterk vertrouwen in de leraar. Het gaat in deze opgaven niet alleen over oneindig. Het is ook een probleem, dat oneindig vèr kan liggen: het is niet voor te stellen wat er precies met dat quotiënt aan de hand is.

Met de opdracht: "onderzoek $\frac{x}{2^x}$ met behulp van je ZRM en kijk wat er gebeurt als x naar oneindig loopt", wordt het probleem enigszins voorstelbaar en komt de uitkomst binnen handbereik. De leerling moet zelf x-waarden kiezen en via zijn of haar eigen strategie een antwoord vinden.
Een leerling deed het volgende:

x	10	50	100	200	400	300	330
$\frac{x}{2^x}$	918-0,3	4,4-14	7,9-29	1,2-58	E	1,5-88	1,5-97

Dat 7,9 - 29 betekent: $7{,}9 \times 10^{-29}$, was geen probleem, hoewel dit een extra complicatie had kunnen zijn. De E gaf kennelijk het teken aan de leerling om te zoeken naar het laatste getal voordat E verscheen. Dit is mogelijk 'ruis', hoewel . . . ? Op de vraag in VWO-4: "Is er een maximum voor de y-waarden bij $y=2?$" antwoordden verscheidene leerlingen "Ja: $x = 332$, $y = 8{,}75.10^{99}$ maar ook het antwoord: "Nee, volgens mij, maar de rekenmachine wil niet verder" kwam voor.

Noties van oneindig in VWO-4.
- Oneindig is iets wat mensen niet meer kunnen tellen.
- De verst mogelijke afstand (grootte, dikte, enz.) en nog verder.
- Een getal dat geen einde heeft, het kan altijd groter.
- Iets waarvan ik me de grootte (of de kleinte) niet kan voorstellen. Dit waren enkele antwoorden uit VWO-4 op de vraag: "Wat versta jij onder het begrip oneindig?"

Er waren veel antwoorden in de trant van "zonder einde", of "waar geen eind aan komt", sommige met een toelichting: hoe lang je ook doorkijkt; je kan zover als je wilt; het gaat altijd verder en verder, niet te bevatten voor een mens.

We vroegen deze leerlingen ook: "Wat is, denk je, in de wiskunde de betekenis van oneindig?"
- Oneindig is zo groot in de wiskunde dat er op rekenkundige manieren niet aan gekomen kan worden. Simpeler: het is algebraïsch niet berekenbaar! (Paul).
- Het kan steeds groter of kleiner.
- Dat hangt van het geval af maar over het algemeen iets dat zo groot is dat je het op kunt schrijven. Het moet dus opschrijfbaar zijn, anders kun je er niet mee werken.
- Zoveel, dat het iets is wat toch nooit voorkomt en op m'n rekenmachine wil hij niet verder dan $x.10^{99}$. Misschien nadert dat het oneindig in de wiskunde.
- Een zo groot getal, dat in werkelijkheid net niet mogelijke dingen mogelijk maakt (Dirkjan).
- Een getal dat niet bestaat.
- Heeeeeeeeel groot of heeeeeeeel klein.
- Een heel groot getal, waarvan men de precieze grootte niet weet.
- Alle getallen die er zijn maar die zoveel zijn, dat je nooit kunt ophouden met tellen.

Bij vergelijking van hun eigen noties van oneindig met hun gedachten, of vermoedens, over oneindig in de wiskunde valt iets op. Wiskundig oneindig werd veelal met getallen in verband gebracht, terwijl het bij eigen oneindigheidsnoties juist lijkt of van tellen en meten moet worden afgezien. De antwoorden van Paul en Dirkjan geven iets aan van het anderssoortige, grensoverschrijdende, dat 'oneindig' bezit, in vergelijking met een werkelijkheid waarin gemeten of gerekend kan worden.

Mijn oneindig en wiskundig oneindig; eerste jaars NLO.
We vroegen ook een twintigtal NLO eerste jaars wiskundestudenten (Ubbo Emmius, Groningen):
Wat versta je zelf onder het begrip 'oneindig'?

Een selectie uit de gegeven antwoorden:
- Iets wat geen einde heeft, het gaat al maar door.
- Onbegrensd.
- Hemel, heelal.
- Een hele grote massa, hoeveelheid.

De overgrote meerderheid van de studenten vertaalt oneindig voor zichzelf in "geen einde" en "het al maar door kunnen gaan".

Ook de tweede vraag werd aan hen voorgelegd:
Wat verstaat men in de wiskunde onder het begrip 'oneindig'?

Een selectie uit de gegeven antwoorden leverde de volgende bloemlezing op:
- Een getal dat niet te omschrijven valt.
- Getallenverzameling zonder grenzen.
- Een functie met asymptoot o.a.
- Onmenselijk groot of klein.
- Dat alle punten meedoen, dus R en dat je nooit alles van de wiskunde kunt weten, dus nooit volleerd.

De meeste studenten koppelen 'wiskundig oneindig' aan een 'getal dat niet in cijfers is uit te drukken' of aan 'een asymptoot' of opnieuw aan 'geen einde'.
Uit de antwoorden ontstaat de indruk dat de studenten de vraag geïnterpreteerd hebben als "waar kom je in de wiskunde 'oneindig' tegen?"

Na schriftelijke beantwoording van de eerste twee vragen volgde nog een derde vraag:
Reageer op:

$$\infty = \infty$$
$$2.\infty = \infty$$
$$\infty.\infty = \infty$$
$$2^{\infty} = \infty$$
$$\frac{\infty}{\infty} \text{ kan ook } \infty \text{ zijn}$$

Een selectie uit de gegeven antwoorden:
- Logisch, maar niet onder woorden te brengen waarom het zo is.
- Alles gaat wel, alleen oneindig gedeeld door oneindig levert problemen.
- Bijv. iets wat je niet kunt bevatten vermenigvuldigd met iets wat je niet kunt bevatten blijft iets wat je niet kunt bevatten.
- Oneindig is geen getal, dus kun je er ook geen bewerking mee uitvoeren. En oneindig gedeeld door oneindig is trouwens 1.

De meeste studenten slaken de kreet "logisch hè" analoog aan het gebruik van het woord "triviaal" in geavanceerde wiskundecolleges (je moet dan veelal heel hard en heel lang werken om het probleem in kwestie en de mogelijke trivialiteit te snappen). Soms (zie het tweede en het derde antwoord) klinkt in de antwoorden het – plastische taalgebruik van de middelbare schooldocent door.

Enkele didactische kanttekeningen

In de 58ste en 59ste jaargang van *'Euclides'* werd ook aandacht besteed aan het begrip oneindig. Een reactie daarop, in nr. 5 van jaargang 60, was kort en krachtig: schaf ∞ af. De argumenten voor dit laatste voorstel zocht de auteur, J. Scheltens, in het berekenen van limieten. Daarbij wordt immers het begrip oneindig als zodanig nooit onderwerp van beschouwing. Inderdaad, als we het ordinale aspect van de (natuurlijke) getallen beschouwen, getallen dus op een rij zetten, dan is de idee van oneindig gemakkelijk te vatten met uitspraken als: er is geen grootste getal, er komt geen eind aan of (denkend aan de positionele schrijfwijze): dat gaat zo maar door. De definitie van $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ en de redenering achter $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ kunnen, zo bewees het wiskunde-onderwijs van de laatste halve eeuw, op basis van die intuïtieve noties ontwikkeld worden voor (en zelfs door) kinderen.
Anders wordt het als het begrip oneindig in verband wordt gebracht met het cardinaal aspect van de (natuurlijke) getallen. In dat geval gaat het om het 'aantal' oneindig. Vanzelfsprekend kun je dat in eerste instantie ook benaderen met het telgetal. Er zijn oneindig veel natuurlijke getallen. Waarom? Tel ze maar en constateer: er komt geen eind aan. Bij

aftelbare verzamelingen kan nu het *aantal*aspect ingeruild worden voor het *tel*aspect. Zoals hiervoor werd getoond, gaat die vlieger niet altijd op. Het begrip oneindig met een cardinaal karakter wordt wiskundig nogal verrassend gedefinieerd. (Zie "Voorstellingen van oneindig en de betekenis daarvan voor wiskundige leerprocessen").
'Verrassend' betekent in dit geval dat weinig mensen (leerlingen) op dat idee zullen komen. En dat betekent dat het ze verteld moet worden, zodat van het ontwikkelen van intuïtieve noties naar volwaardige wiskundige begrippen niets terecht kan komen. Van Hilbert wordt gezegd dat hij ten behoeve van zijn studenten een science fiction-wereld schiep, waarin oneindig de bedoelde wiskundige betekenis kreeg. Kort samengevat handelde het om een hotel (gesitueerd op een ver verwijderd melkwegstelsel) met (aftelbaar) oneindig veel kamers. Op een zeker moment, als het hotel helemaal vol is, melden zich oneindig veel nieuwe gasten. De hotelmanager slaagt er dan desondanks in alle nieuwe gasten ook aan een kamer te helpen (op de manier van het nomogram van fig. 1).
Hilbert bedacht niet alleen een prachtverhaal en een duidelijke uitleg, hij gaf tevens een didactische aanwijzing: wie oneindig wil verbinden aan het aantalaspect van getallen, moet buiten deze wereld (lees: the real world) treden.
Naast het ordinaal- en het cardinaal aspect kan men ook het meetaspect onderscheiden. Ook bij het meten kan oneindig in beeld komen. Niet door verschrikkelijk ver weg te gaan, maar juist door dicht bij huis te blijven. Meet maar eens, zo nauwkeurig mogelijk, de diagonaal van het vierkant met zijde 1. Of, nog dichter bij huis, welk (komma-)getal behoort bij de lengte van het derde deel van een plank van 1 meter? Met dit soort 'metingen' (van theoretische aard) betreden we het gebied van de cyclische processen, de iteraties, de lussen in een stroomdiagram.
Wie oneindig wil beschouwen in de sfeer van het 'rekenaspect' van getallen, kan niet voortbouwen op bestaande inzichten en opgedane ervaringen. De verwarring, die bijvoorbeeld "$\infty - \infty = \infty$" teweeg brengt, zette J. Scheltens aan tot zijn voorstel om ∞ maar af te schaffen. Oneindig als 'rekengetal' zonder meer roept inderdaad een dergelijke reactie op. Of we met dit aspect ook al het andere over oneindig uit de didactische aandacht moeten bannen, willen we op basis van alle voorgaande paragrafen sterk betwijfelen. Voor hen, die 'oneindig' didactisch willen onderbouwen in het reken/wiskunde-programma voor leerlingen van 4-18 (om maar eens een greep te doen), zijn in dit artikel ongetwijfeld diverse aangrijpingspunten te vinden.

Noot

"W.J.H. Fewpact" bestaat uit de voorletters van de tien auteurs, allen deelnemers van OGLO. En OGLO staat voor Ontwikkelings Groep Leraren Opleiding. De afkorting ligt gemakkelijk in de mond en OGLO blijkt zelfs acceptabel voor manager en receptioniste van "De Eenhoorn", waar de groep gemiddeld één keer per drie weken – nee, niet vergadert, maar aan de slag gaat.
In het schooljaar '83-'84 startte een groepje van 2 PA-docenten (wiskunde & didactiek), 2 NLO-docenten (wiskunde en wiskundedidactiek), 1 ULO-docent (wiskundedidactiek) onder leiding van een medewerker van sectie 3 (wiskunde en informatica) van de SLO. Men besloot tot het ontwikkelen van onderwijsleermateriaal voor studenten aan de lerarenopleiding. De achterliggende gedachte was, dat het hoog tijd werd dat ook in Nederland bij basisschool- en wiskundeleraren belangstelling werd gewekt voor het hele gebied. Een aangrijpingspunt voor een gemeenschappelijke aanpak vormde het 'voortgezet rekenen'.
Als resultaat verscheen in september 1984 het eerste pakket *'Probleemgestuurd Onderzoekend Leren Onderwijzen'*, bestaande uit een blokboek voor studenten en een reader (verkrijgbaar bij de SLO). Reeds tijdens het startjaar was OGLO gegroeid. Nu, in het tweede jaar van OGLO, zijn er tien deelnemers. Het object van studie is de wereld van het getal. Nog meer dan 'voortgezet rekenen', dat zich afspeelt in het grensgebied van V.O. en Ba.O, vragen getallen en de bewerkingen ermee voortdurend de aandacht van kinderen van 4 tot 18, en dus van hun leraren.
De werkwijze van OGLO is de volgende. Op een introductie door een lid van de groep over bijv. de zakrekenmachine wordt door alle anderen, tijdens de volgende bijeenkomst, schriftelijk en mondeling, gereflecteerd. Introductie, commentaren en reflecties vormen het basismateriaal voor een hoofdstuk van een boek, met de voorlopige werktitel: *'Jonge mensen in de wereld van het getal'*.
De tien OGLO-ers, samen W.J.H. Fewpact hebben het basismateriaal wat betreft het begrip oneindig, bijeengebracht in bovenstaand artikel.