Tachtig jaar, leren met plezier

F. van der Blij
OW & OC Utrecht

Samenvatting

Na een bespiegeling over de rol en waarde van de getallen bij het beschrijven van de leeftijd van iemand, en meer in het bijzonder die van Freudenthal, stelt de auteur voor onderzoek te verrichten op een tot op heden verwaarloosd gebied van het wiskunde-onderwijs: hoe reageert de onderwijzende als de leerling – eindelijk – uitroept "aha, ik begrijp het"? Welke emoties maken zich dan van de docent meester?

Summary

What does 80 mean when we celebrate today Freudenthals 80th birthday? How meaningful are different ways to describe someones age? The age of Freudenthal leads in a natural way to natural, rational and even negative numbers, but not to real and complex numbers.
In the second part the author suggests as a research-subject the following question:
What is the (emotional) reaction of the teacher when the student – finally – exlaims: "Aha, I do understand it"?

Deze dag staat in het teken van HF80. Ieder kan een eigen interpretatie geven. Sommigen zullen de combinatie interpreteren als een computercommando, anderen als een merknaam voor geluidsapparatuur, weer anderen als naam van een schilderij of van een compositie. Voor ons is HF natuurlijk niemand anders dan H.F. En 80 is gewoon tachtig jaar. Waar denken we aan bij 80, een tachtigjarige oorlog? Oorlog waartegen? Of denken we aan alle getallen die te schrijven zijn als het verschil van twee vierdemachten? Doen we de wiskundige Freudenthal een plezier uit te zoeken hoe je een vierdimensionale doos $3 \times 3 \times 3 \times 3$ kunt vullen met zo min mogelijk blokken, waaronder er echter een $1 \times 1 \times 1 \times 1$ moet voorkomen?

Nee vandaag geen getaltheorie, geen meetkundige combinatoriek. Een gewone vraag: wat bedoelen we als we zeggen dat H.F. nu 80 is? Wat voor een soort getal is die tachtig? Eenvoudig, we telden 80 jaren, verleden week was Freudenthal 79 en we hopen dat hij over één jaar 81 zal zijn. Tachtig is meer dan 79 en minder dan 81. Maar dan ben je een heel jaar 80. Je verjaardag vieren, dat wil zeggen de dag markeren dat je precies 80 jaar bent. En omdat Freudenthal op 17 september geboren werd en het nu 21 september is, is hij nu dus 80 jaar en 4 dagen oud. Of tachtig jaar en dagen? Hoe zit dat? Laten we het houden op 80 jaar, 0 maanden en 4 dagen. Dus op Oud-Engelse manier: 80/0/4.
Maar wat wil één maand in dit verband zeggen?

Een kind van 1 jaar en 2 maanden oud, hoe oud is dat eigenlijk? Juli en augustus hebben samen 62 dagen, maar februari en maart 59 tenzij . . .
Een jaar is 365 dagen, tenzij . . . Eén jaar en twee maanden kan 424 of ook 428 dagen zijn. Laten we maar liever in dagen gaan tellen. Freudenthal is vandaag 23.224 dagen oud. Heus, ik probeerde alle schrikkeljaren goed te tellen. Geen mooi getal 23.224, ik ga noch statistiek, noch getaltheorie gebruiken om er iets meer over te zeggen, ik blijf maar even in het basisonderwijs. Hoeveel uur is professor Freudenthal oud en hoeveel minuten? Het is 557.376 uren en dus 33.442.560 minuten. Voor u de som opgeeft: "hoeveel seconden" krijgt u al de vermanende vinger van Freudenthal.
We zijn met onzin bezig. Om over uren te kunnen spreken zouden we toch moeten weten hoe laat hij geboren is. Geboorteminuut kun je daarover spreken? Geboorteseconde is in ieder geval onzin.
Met deze getallen kun je wel sommen maken, maar als je een betekenis aan de getallen geeft, wordt het onzin. Zo juist zeiden we 80, dat wil zeggen meer dan 79 en minder dan 81. Zo'n betekenis kunnen we ook nog geven aan het aantal dagen 23.224, maar voor het aantal uren, minuten moeten we ruimere grenzen geven. Zonder kennis van het geboorteuur komen we op 33.442.560 minuten met een maximale fout van $24 \times 60 = 1.440$ minuten. Of toch niet? Want zo laat is het nog niet, de maximale fout verandert in de loop van de dag. Een raar getal; en natuurlijke getallen,

aantallen leken zo eenvoudig. Terug naar het 'jaren tellen'? De Psalmist schrijft: "Leer ons onze jaren tellen, opdat we een wijs hart bekomen."
Zullen we zeggen 80 $\frac{4}{365}$ jaar? Dan kunnen we goed met breuken gaan rekenen. Aardig is dan weer om 1 jaar en 2 maanden te schrijven als $1\frac{2}{12}$jaar, of klopt het weer niet?
Liever decimale breuken.
Dan vinden we 80, 010958904 . . . jaar. Wat een raar getal, zit er regelmaat in de cijfers achter de komma? Even wat denken en rekenen:

$$\frac{4}{365} = \frac{1}{100}\left(1 + \frac{35}{365}\right),$$

en onze rekenmachine geeft:

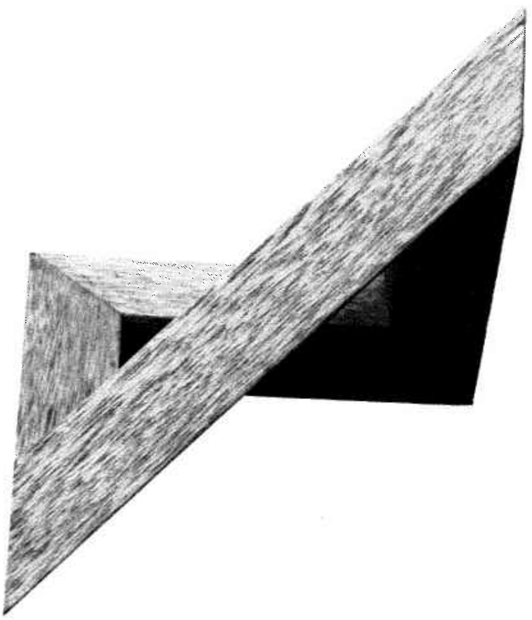
80, 01095890411 . . .

Wat listig manipuleren geeft ons zelfs:

80, 0109589041096...

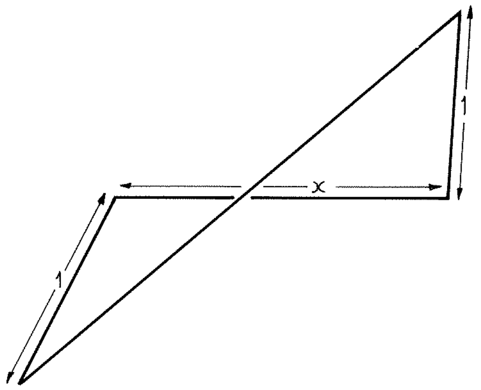
Zou die 1095 en verder op 1096 al op periodiciteit wijzen? Hoeveel decimalen moeten we verder gaan voor we het zeker weten? We zijn aardig wiskunde aan het doen. Maar gezien onze opmerking over het geboorteuur hebben de decimalen allang iedere betekenis voor onze bewering verloren.
Wanneer Freudenthal later heilig verklaard zou worden, merken we nu al op dat hij dan nu, volgens sommige tradities een negatieve leeftijd zou hebben. De verjaring van heiligen wordt namelijk vaak vanaf de sterfdag geteld. Dan zou Freudenthal nu, naar we hopen, bijvoorbeeld −20 jaar zijn. Maar van dat getal weten we eigenlijk helemaal niets. Mocht u de context te religieus voor de openbare universiteit vinden, leest u dan hoofdstuk VIII uit de reizen van Pater Key door Raoul Chapkis nog maar eens aandachtig na!

De leeftijd van iemand voert op natuurlijke manier tot natuurlijke, rationale en zelfs negatieve getallen. Maar niet tot reële getallen, niet tot complexe getallen, niet tot hypercomplexe getallen (een ouderwetse verzamelnaam voor aardige zaken zoals kwaternionen en octaven).



Wanneer je getallen invoert via leeftijden, dan is er geen behoefte aan reële getallen. Sterker, wanneer je getallen invoert via zintuiglijke waarnemingen, getallen als maat voor gewicht, voor lengte of inhoud, steeds zijn rationale getallen toereikend.

Wanneer ik de vierbalk van P.S. Bakker, waar je twee congressen lang je hoofd aan kon stoten, na wil maken, moet ik alles opmeten, meetlat en rationale getallen zijn voldoende. Maar als ik hem uit mijn geheugen, nadat ik hem alleen even gezien heb, wil construeren, dan moet ik meetkunde gaan bedrijven. Hoe groot moet ik x maken opdat de balk als een Möbiusband (met een kwart slag) sluit?



Nu moet er gerekend worden, meetkunde, goniometrie gebruikt worden. En dan blijkt dat $x = \sqrt{2}$, en dus een irrationaal getal. Om die balk echt van hout of karton te maken heb ik daar niets aan, tenzij ik snel $\sqrt{2}$ vervang door 1,414 . . . en zo mijn duimstok kan gebruiken.
De irrationale getallen spelen een rol in de theoretische tussenfase, tussen het waarnemen van de structuur enerzijds en de echte constructie anderzijds. Reële getallen, anders dan rationale getallen vinden we niet in het wild. Alleen in ons verstand, in de theoretische tussenfase kweken we ze. En ze bloeien in de wiskunde!

Ik dartelde wel snel door de grondslagendiscussie over de reële getallen rond. Toen Freudenthal naar Nederland kwam, was deze discussie een "hot topic" in het gesprek over de grondslagen van de wiskunde.
Kunnen we voor de natuurbeschrijving volstaan met rationale getallen? Toch hebben we al andere getallen ontmoet, benaderde getallen, onzekere getallen. Sommige zaken lijken goed bepaald te zijn, maar toch niet bekend. Morgen zal de som van alle leeftijden van alle nu in de zaal aanwezigen wel haast niet meer te bepalen zijn. Wel te schatten natuurlijk. En op het ogenblik dat ik deze regels neerschrijf is dit getal nog helemaal niet bepaald. Het aantal minuten daglicht op een bepaalde datum weten we ook niet. Want dat is niet goed gedefinieerd, wanneer begint het daglicht, wanneer eindigt het?
Verder zijn er nog stochastische variabelen, getallen met een waarschijnlijkheidsverdeling. Het aantal bezoekers van een morgen te geven concert bijvoorbeeld. Waar komen die waarschijnlijkheden vandaan? Nemen we het aantal ogen van een worp met twee dobbelstenen. Zijn de waarschijnlijkheden voor b.v.

7 ogen of 12 ogen vastgelegd door ervaringen met veel frequentietellingen, of door heel nauwkeurige mechanica van de vaste lichamen, of worden die waarschijnlijkheden in ons hoofd geschapen?
Ik wil nu maar niet ingaan op bewerkingen met getallen, leeftijden kun je optellen, kun je ze ook vermenigvuldigen? Delen lijkt weer makkelijker. Getallen in de wiskunde zijn veel eenvoudiger. Alleen de definitie voor een encyclopedie-artikel is moeilijk.

Laat ik deze opmerkingen over getallen, ook Freudenthal schreef kort geleden nog over dit onderwerp, maar dat is het geval met haast ieder onderdeel van het wiskunde-onderwijs, gebruiken om iets te zeggen over 'onderzoek van wiskunde-onderwijs'. In het bovenstaande zagen we als voorbeeld hoe het onderwijs over getallen al op zeer jeugdige leeftijd met het tellen van de levensjaren begint. Daarna komen b.v. via lengtematen of via geldberekeningen de decimale breuken. Dan komen de gewone breuken, de grote vraag dat $4 : 7 = \frac{4}{7}$, de som is het antwoord. Het is als het taalgrapje: Hoe heet Keizer Karels hond? In de taalles is dat al een moeilijk grapje, in de rekenles voor veel kinderen een onoverkomelijk struikelblok. Dat wijst onderzoek van wiskunde-onderwijs uit. Onderzoek gedaan uit nieuwsgierigheid. Net zoals onderzoek naar de komeet van Halley en naar de korstmossen tussen het ijs in het Zuidpoolgebied. Maar het onderzoek naar het wiskunde-onderwijs is niet alleen nieuwsgierigheidsonderzoek. Het onderzoek levert direct resultaten, die stimuleren tot mogelijk veranderen van handelen, niet alleen voor de onderzoeker, maar ook van anderen. Wat bij de komeet, de korstmossen en de zuivere wiskunde geen rol speelt is bij onderzoek van wiskunde-onderwijs centraal.
Toch zit er ook in het onderzoek van onderwijs een deel nieuwsgierigheidsonderzoek. Aansluitend bij veel onderzoek dat al gedaan wordt, zou ik vandaag een onderwerp willen voorstellen, waarover, naar ik vermoed, nog heel veel te ontdekken valt.
Laten we het leren van het kind bezien, beginnend met het nog spontane jonge kind, en daarna doorgaan naar de oudere, meer beheerste leerling. Freudenthal en anderen hebben geschreven dat in het leerproces vaak een discontinuïteit zit. Het ogenblik van begrijpen geeft opwinding. Aha, zit het zo, nu begrijp ik het! Nu kan ik het: Mamma, kijk zonder handen! Spanningen ontladen zich en nieuwe worden opgeladen.
Heeft u dit ogenblik bij uzelf nog wel eens waargenomen? Nieuwsgierigheid bracht ons ertoe dit fenomeen te onderzoeken. Al zullen we misschien ook wel wegen zoeken om dit proces te bevorderen. Zijn er methoden om dit ogenblik sneller te laten aanbreken? Of misschien zelfs voor leerlingen van wie we wanhoopten dat het ooit zou komen, het toch oproepen?
Als dat ogenblik geweest is, is het dan nodig het verworven inzicht nog te consolideren, of wie dat eenmaal gezien heeft vergeet het nooit weer.
(Hoeveel wiskunde-onderwijs zal blijken vergeefs te zijn geweest, tussen basisschool en universiteit, als we het criterium: "dat vergeet je nooit meer" zouden gebruiken!)

Waar ik vandaag u allen voor oproep is complementair onderzoek. Wat gaat er in de docent om op het ogenblik dat de leerling zegt: "ik begrijp het." Is er ook bij de docent emotionaliteit? Natuurlijk wel beheerster dan bij het jonge kind.
Een enkele explosie zie je bij het onderwijs als volwassenen beginnen met een computer te werken. De situatie is zo uitzonderlijk dat de emoties minder onderdrukt worden. Na de beproeving van een gecompliceerd programma roept de (onervaren) maker uit: "Hij doet het! Hij weet hoe hij het doen moet!" Soms zelfs in overmoed: "Hij begrijpt me!" De nieuweling in het computerbedrijf verwondert zich dat de machine zijn lesje geleerd heeft en dit nu kan toepassen, dat de machine het begrepen heeft. Bij de lessen aan menselijke leerlingen zijn de emotionele reacties soms alleen maar net andersom, verbazing en verontwaardiging dat de leerling zo dom is, dat hij het niet snapt.
Bij de computersituatie was de diepste grond van de emotionele vreugde misschien toch wel: "Wat goed van mij, dat ik hem dat geleerd heb." Bij de gewone leerling: "Wat dom van hem, dat hij het niet begrepen heeft."
Of zouden we moeten zeggen wat jammer, wat teleurstellend, dat ik als docent gefaald heb om het hem duidelijk te maken? Wat zou ik graag de emotionele vreugde beleven van het ogenlik dat mijn leerling zegt: "Aha, nu begrijp ik het."
Onderzoek van wiskunde-onderwijs is onderzoek van het leerproces, van de leermiddelen, van de leerling, maar ook van de docent. Wat weten we van de docent op het ogenblik dat de leerling tot inzicht komt? Onderzoek daarna is misschien alleen nieuwsgierigheidsonderzoek; maar wie weet toch ook kwaliteitsverbeterend.

Beste Hans, tachtig jaar is een lange periode. Hoeveel jaren heb je daarvan bewust als leerling doorgebracht? Ik denk zeker wel vijfenzeventig. En hoeveel jaren als docent? Misschien niet eens veel minder! Ik weet dat ook jij de vreugde hebt gekend zowel van: "ik begrijp het, ik heb de vis gevangen" als van "hij begrijpt het." De vreugde heb je ervaren dat anderen om je heen iets duidelijk werd.
Misschien is het wel een passsend verjaardagscadeau, je vandaag te vertellen dat ik, dat wij allen in deze zaal en dat velen buiten deze zaal door jouw woord en geschrift dat wondere ogenblik beleefd hebben: "Aha, nu snap ik het!" En hopelijk geeft dat jou een emotie van plezier!

Happy Birthday to you!