

Gebruikswiskundig en toegepast wiskundig

Sieb Kemme
RU Groningen

Samenvatting

De introductie van wiskunde A leidt tot veel nadenken over het wezen van dit vak. Het wordt vaak gekarakteriseerd als 'toegepaste wiskunde', of zoals leerlingen het zeggen: "wiskunde die je kunt gebruiken". Dit artikel poogt een onderscheid te maken tussen 'toegepaste wiskunde' en 'gebruikswiskunde', een onderscheid vooral in het uitvoeren van (wiskundige) handelingen.

Summary

The introduction of the new Math A-curriculum leads to much discussion among math-educators. One of the aspects that characterizes the experimental material is that mathematical concepts are introduced by applications. For this reason the author wishes to define this math as users-math as opposed to mathematics applicable.

Inleiding

In het OW & OC-pakket 'Matrices' staat het volgende fragment over het optellen van matrices:

$$\text{Dus vb: } A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \text{ en } B = \begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{pmatrix}$$

$$\text{dan is: } A + B = \begin{pmatrix} a + p & b + q & c + r \\ d + s & e + t & f + u \\ g + v & h + w & i + x \end{pmatrix}$$

In het algemeen kun je matrices alleen optellen als zij dezelfde afmetingen hebben. Soms echter kun je best een ander soort 'optelling' rechtvaardigen. Kijk maar eens naar het volgende voorbeeld.

Twee concurrerende sportzaken verkopen hardloopschoenen. De ene heeft de volgende schoenen in voorraad:

	maat 38	40	42	44	46	48
Adidas Marathon	2	3	3	1	0	0
Adidas TRX	4	2	0	1	0	1
Nike Daybreak	2	4	6	1	1	0
Nike Tailwind	0	0	2	1	0	2
N. Balance 620	1	1	2	2	1	0
N. Balance 430	0	4	3	1	0	0

De andere zaak heeft de volgende voorraad

	maat 50						
N. Balance 620	0	3	1	2	0	0	1
N. Balance 430	4	1	2	1	0	1	0
Brooks Vantage	0	6	3	1	2	1	2
Brooks Hugger GT	2	3	3	1	1	3	2
Puma Marathon	2	4	4	2	1	0	0

► 59. De zaken fuseren. Wat wordt de nieuwe voorraadmatrix?

Dus in bepaalde gevallen is ook 'optelling' van ongelijke matrices wel mogelijk.

Bij de laatste zin vliegen mijn HEWET-nascholingscursisten steevast in de gordijnen.

"Absolute onzin"

"Je moet de matrices natuurlijk eerst aanvullen met nullen en ze zo gelijksoortig maken, dan kun je ze pas optellen."

"Denk je nou echt dat die schoenhandelaar daar eerst nullen neer gaat zetten?"

"Hé, ik heb me nooit gerealiseerd dat dat ook kan."

"Wat staat er nou? Kun je ongelijksoortige matrices nu wel of niet optellen? Wat moet ik nu tegen leerlingen zeggen? De tekst is zo toch heel onduidelijk?"

Een breed scala van reacties. Van uiterst afwijzend tot acceptierend. Vooral de laatste reactie is een hamvraag waar ik in de cursus natuurlijk niet omheen kan. Tenslotte wordt er van mij verwacht dat ik de broodnodige duidelijkheid weet te geven op het programma en de uitwerking daarvan voor de klas. Ik bedenken een list:

“Ik zou een voorraadmatrix geen matrix noemen maar gewoon een voorraadtabel. Een matrix is een kale rechthoek van getallen, zonder dat daarbij staat wat de rijen en kolommen voorstellen. Natuurlijk kun je dan alleen maar gelijksoortige matrices bij elkaar optellen, want je weet niet welke kolom of rij je met welke kolom of rij zou moeten combineren als ze ongelijksoortig zijn. Bij voorraadtabellen staat precies aangegeven welke maat een kolom voorstelt en welk merk een rij. Er is nu dus geen enkele reden om gelijksoortigheid te eisen.”

De list lijkt te werken. Al vind ik zelf niet dat ze een schoonheidsprijs verdient. Daarvoor lijkt het teveel op een bedachte truc om de situatie te redden. Toch realiseer ik me later dat er veel meer van dit soort ogenblikken in het experimentele OW & OC-materiaal zitten waarbij je op een soort houtje-touwtje manier bezig bent en dat dit zelfs niet zomaar een trekje is van de OW & OCers, maar wezenlijk bij het wiskunde A-programma hoort. Dat is voldoende reden om er wat verder op door te borduren.

Het onderscheid

Een schoenhandelaar die gewoon voorraadtabellen bij elkaar optelt noemt ik *gebruikswiskundig* bezig. Het systematisch in een tabel zetten van de voorraadgegevens is een elementaire wiskundige techniek. Kenmerkend bij deze manier van werken is dat in de tabel alle gegevens (maten, merken, hoeveelheden) nog aanwezig zijn. De wiskundige technieken blijven verbonden met de situatie.

Een schoenhandelaar die zich realiseert dat het begrip-penapparaat van matrices heel geschikt is om de situatie weer te geven en vervolgens door middel van het toevoegen van nullen alles gelijksoortig gaat maken om matrices met elkaar te kunnen combineren (bv. omdat hij een computer gebruikt die alleen maar gelijksoortige matrices kan optellen), noemt ik *toegepast wiskundig* bezig. Hij verandert het een en ander aan de gegevens (voegt nullen toe) om die geschikt te maken voor de toepassing van een wiskundige techniek. De betekenis van de kolommen en rijen hoeft nu niet altijd bekend te zijn om matrices te kunnen optellen. Daarmee verliest het geheel aan betekenis, maar komt er een reeds ontwikkelde wiskundige techniek ter beschikking. Voordat we dit onderscheid verder uitwerken eerst nog een tweetal voorbeelden.

Een keuterboer

Een boer heeft koeien en kippen. Hij is nogal eenzaam en om de verveling wat te verdrijven, telt hij de

koppen en de poten om na te gaan hoeveel koeien en hoeveel kippen hij heeft. Hij telt 35 koppen en 112 poten. Hoeveel koeien en kippen heeft de boer? Een beetje ervaren wiskundige ziet natuurlijk meteen dat je dit kunt oplossen met behulp van een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden. Stel x is het aantal koeien en y is het aantal kippen, dan is:

$$\begin{cases} x + y = 35 \\ 4x + 2y = 112. \end{cases}$$

Vermenigvuldig de eerste vergelijking met 2 en de laatste met -1 en tel dan de boel bij elkaar op:

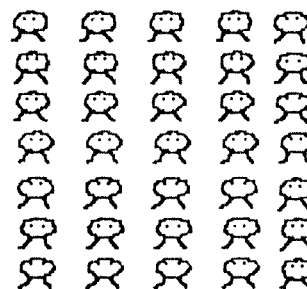
$$-2x = -42$$

dus:

$$x = 21 \text{ en } y = 14$$

Wat stelt x ook alweer voor? O ja, het aantal koeien, de boer heeft dus 21 koeien en 14 kippen. Een echte keuterboer.

Zo lost de boer dat probleem zelf natuurlijk niet op. Eerst tekent hij, schematisch en systematisch, die 35 koppen en onder iedere kop zet hij alvast maar meteen 2 poten:



Nu heeft hij al 70 poten ondergebracht. Er zijn nog 42 over. Daarmee kan hij nog 21 koppen van 2 extra poten voorzien, die koppen hebben dan 4 poten. Er zijn dus 21 koeien en 14 kippen.

Een fabrikant

Een fabrikant verkoopt 5 produkten: A, B, C, D en E. Produkten B en E worden direct vanuit de grondstoffen gemaakt.

Voor de produktie van A zijn 4 eenheden van B en 1 eenheid van C nodig.

Voor de produktie van C: 2 eenheden van B en 3 van E.

Voor de produktie van D: 6 eenheden van A, 2 van C en 3 van E.

Hij wil 16 eenheden A, 3 eenheden C, 5 eenheden D en 6 eenheden E produceren.

De vraag is natuurlijk hoeveel eenheden van B en E daarvoor nodig zijn.

dige wiskundeprogramma. Denk maar eens aan het gebruik van de a, b, c-formule en de differentiaalrekening om maxima en minima van een functie te bepalen. Met de komst van het wiskunde A-programma zal echter het gebruiks-wiskundig bezig zijn een grotere rol gaan innemen in het programma.

Daar zijn in ieder geval de volgende twee oorzaken voor aan te geven:

- Wiskunde A beoogt voor te bereiden op een studie in de gamma-wetenschappen. Juist in deze tak van wetenschap neemt een gebruikswiskundige benadering een essentiële plaats in. Een wiskundige aanpak is voor veel problemen zo nieuw dat de wiskundige methoden daarvoor eenvoudigweg nog niet zijn uitgevonden. Achteraf leidt dat dan vaak wel tot een ontwikkeling van nieuwe gelegitimeerde wiskundige technieken. Zie de ontwikkeling van de lineaire programmering en de grafentheorie.
- Het optreden van praktijksituaties in de leerstof, hetgeen bij wiskunde-A onvermijdelijk is, brengt automatisch met zich mee dat gebruikswiskundige oplossingen zich kunnen gaan voordoen. De situatie bevat vaak zoveel specifieke mogelijkheden tot een geheel eigen aanpak dat de gebruikswiskundige benadering zich als het ware opdringt.

Het hier gegeven onderscheid is vooral een onderscheid in het uitvoeren van (wiskundige) handelingen om tot de oplossing van een probleem te komen.

Bij toegepast wiskundig handelen is er eerst het zoeken naar een passende wiskundige techniek. Vaak zal dat gebeuren op basis van herkenning met vroegere soortgelijke problemen. Daarna is er een 'vertaal'-handeling: het kiezen van variabelen, het opstellen van een vergelijking. Het probleem kan bij dit vertalen (ongemerkt) worden aangepast aan de eisen van de gekozen wiskundige techniek. In de economie, bijvoorbeeld, aarzelt men niet om van discrete variabelen over te gaan op continue variabelen om daarmee de differentiaalrekening te kunnen toepassen. Door deze vertaal-handeling wordt het probleem binnen de wiskunde gehaald. Vervolgens wordt de wiskundige techniek losgelaten op het nu wiskundige probleem. De zo verkregen wiskundige oplossing moet tenslotte weer worden terugvertaald naar de oorspronkelijke praktijk.

Deze interpreterende fase kan aanleiding zijn tot het bijstellen van het wiskundige model doordat de uitkomsten niet kloppen met de werkelijkheid.

Bij een gebruikswiskundige aanpak ontbreken die vertaal- en terugvertaal-fasen. De gegevens worden op een handige manier gerangschikt zodat ze toegankelijk worden voor een eveneens handig gekozen oplossingsmethode (systematisch tellen, tekenen,...). In iedere fase van het oplossingsproces blijft echter duidelijk wat nu precies wat voorstelt binnen de praktijk. Gebruik van bekende wiskundige technieken is niet per se uitgesloten. Maar deze technieken zijn aangepast aan de situatie en niet andersom. Duidelijk is dat te zien aan de keuze van de namen voor de variabelen. Deze namen blijven herkenbaar voor wat ze voorstellen. Het lijkt wel of de wiskundige techniek bij de situatie wordt uitgevonden. Zo kan de maximale winst van een gegeven winstfunctie van een discrete variabele direct uit de definitie bepaald worden met

behulp van differentievergelijkingen.

Het verschil tussen beide vormen van wiskunde is natuurlijk ook een historisch verschil. Veel toegepast wiskundige technieken zijn ontstaan vanuit een gebruiks-benadering in een specifieke situatie. Geleidelijk aan blijkt de uitgevonden specifieke methode, met enige aanpassing, ook van toepassing te zijn voor meer situaties. Met behulp van autonome wiskundige theorieën krijgen die methodes tenslotte een wiskundige legitimiteit, van waaruit duidelijk wordt onder welke voorwaarden de methoden succesvol bruikbaar zijn. Deze technieken worden daarmee als wiskundig waardevol geaccepteerd. We schamen ons er niet voor om ze in het eindexamen op te nemen.

Bij een gebruikswiskundige aanpak ligt dat veel gevoeliger. We kunnen ons afvragen of dit nog wel wiskunde is. De aanpak blijft immers verbonden met de situatie. Is het dan niet gewoon economie? Of biologie? Of aardrijkskunde? Of natuurkunde? Wat is nu nog het verschil met het natuurkunde-onderwijs? Daar ben je voortdurend gebruiks-wiskundig bezig. Al deze vragen hebben het karakter van een territoriumconflict. Een gebruikswiskundige manier van werken bevindt zich per definitie in een grensgebied. De een heeft goede redenen om aan te geven dat het niet bij de wiskunde hoort, een ander dat het voor biologie te wiskundig is. En daarmee dreigt een belangrijk onderdeel van het onderwijs, het op een effectieve en efficiënte manier oplossen van praktijksituaties, buiten de boot te vallen. Of het nu bij biologie of bij wiskunde gebeurt is niet zo belangrijk. Het moet ergens gebeuren. Het beste is bij allebei.

Didactische verschillen

Het onderwijzen van gebruikswiskundige oplossings-technieken is betrekkelijk nieuw in het wiskunde-onderwijs. We hebben er nog maar weinig ervaring mee. Een gebruikswiskundige aanpak vraagt inventiviteit en vooral inlevingsvermogen in praktische situaties. Het is daarom nog helemaal de vraag of het te onderwijzen is. Toch wil ik proberen een aanzet te geven tot de didactiek van gebruikswiskundige activiteiten door het contrast daarvan aan te geven met de toegepast wiskundige. Zie hiervoor het schema op de volgende pagina.

Tot slot

Nog een paar opmerkingen:

- Het onderscheid tussen gebruiks- en toegepast-wiskundig is wat uit elkaar getrokken om beide begrippen goed duidelijk te kunnen maken. In de praktijk zullen beide manieren van werken door elkaar lopen en kun je beide in afwisseling of in combinatie bij de oplossing van een probleem tegenkomen.
- Ik heb gebruiks-wiskundig een 'houtje-touwtje' manier van werken genoemd. Dat klinkt wat denigrerend. Zo is het niet bedoeld. Integendeel. Ik sla een dergelijke manier van werken minstens zo hoog aan als de binnen de wiskunde meer gebruikelijke toegepaste manier. Vanuit de wiskundige inhoud bekeken is de gebruiks-aanpak misschien

Toegepast wiskundig

- wiskundige techniek moet vooraf geleerd worden en voldoende losstaan van specifieke praktijksituaties.
- 'sterke' wiskundige technieken, dat wil zeggen: wiskundige technieken met een theoretische verantwoording en bestaan los van iedere toepassing.
- leren toepassen van technieken: leren vertalen van praktijk naar wiskundig model.
- rechttoe rechtaan pad naar wiskundige oplossing.
- de gekozen symbolen verliezen hun directe relatie met de praktijk.
- toetsing van de relevantie van de wiskundige oplossing achteraf.
- leerlingen zijn minder geïnteresseerd doordat verband met praktijk niet direct zichtbaar blijkt.
- leren herkennen van geschikte wiskundige technieken in relatie met praktijkproblemen.
- de relatie tussen het probleem en de oplossingsmethode is duidelijker.

Gebruikswiskundig

- de wiskundige techniek ontwikkelt zich met de oplossing.
- 'zwakke' wiskundige technieken, dat wil zeggen: geen wiskundige legitimatie, van een eenvoudig karakter.
- inlevingsvermogen in de mogelijkheden van de situatie ontwikkelen.
- geen zekerheid vooraf dat de methode tot een oplossing zal leiden.
- in iedere fase van de oplossing blijft bekend wat de symbolen voorstellen.
- de relevantie spreekt voor zich.
- minder interesse-problemen, wiskunde lijkt direct toepasbaar.
- doet beroep op creatieve vermogens om zelf methode te ontwikkelen.
- geen relatie van te voren aan te geven, dus onduidelijker.

niet zo interessant. Wat inlevingsvermogen en creativiteit betreft staat het echter op een hoger plan.

- Gebruikswiskunde op school stelt speciale eisen aan schoolteksten en docent. De boeken zullen geschikte praktijkproblemen moeten bevatten die

volgende echt zijn en waarvan de wiskundige oplossingstechniek niet bij voorbaat vaststaat. De docent zal ingespeeld moeten raken op een meer open vraagstelling die meer door de leerling zelf bedachte oplossingsmethoden toelaat.