De kunst van het diepte-zien

Marco Swaen
Vakgroep Didaktiek van de Wiskunde, U.v.A., Amsterdam

Samenvatting

Meetkunde is weer terug in het VWO-bovenbouwprogramma. Maar een kans wordt wel gemist: veel te veel onderwerpen in te weinig tijd zodat verschraling onverbiddelijk zal optreden. Liever wat minder onderwerpen die wat meer uitgediept worden, dat is het pleidooi van de auteur. Hij licht zijn bedoelingen toe aan de hand van drie voorbeelden.

Summary

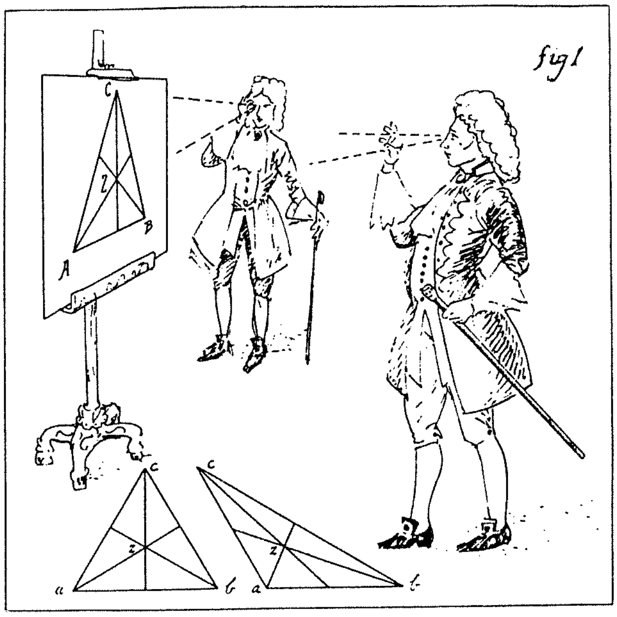
Space-geometry is back in the curriculum at upper secondary level. A very compact program is the result: too many subjects and not enough time. Why not less subjects that can be taught with ample time and more in-depth? Throw away vectors, parameter-representations and enjoy three-dimensional geometry at it best. Three examples make the intentions clear.

Veel gehoord is het misverstand dat wiskunde een droog vak zou zijn. Weliswaar hebben wiskundigen de gewoonte hun moeizaam gedane ontdekkingen in sobere bewoording aan het papier toe te vertrouwen, áchter de nuchtere woorden gaan echter slapeloosheid en ontbering, gaan heftige teleurstellingen en pijnlijke vergissingen, gaan momenten van wanhoop, maar ook van diep geluk schuil.
De wiskunde heeft vele gezichten, de wiskunde kent uitgestrekte vlakten waarin niets voorspelbaars gebeurt, waar sedert eeuwen dezelfde karige begroeiing het landschap bepaalt. Maar de wiskunde kent ook woeste bergketens, met diepe kloven en majestueuze toppen, waar ons ongekende vergezichten worden vergund, terwijl wij ons een weg zoeken langs gevaarlijk slingerende paden.
Waarom krijgen de leerlingen alleen dat ene geasfalteerde parkeerplaatsje van de letterrekenarij te zien, waar het stof zich ophoopt omdat er nog nauwelijks auto's komen?

Ons zwaarmoedig gestemde wiskunde-onderwijs veerde op toen het bericht afkwam dat er weer ruimtemeetkunde in de bovenbouw gegeven zou gaan worden. Echter het zweempje hoop wordt thans in onbedwingbare zucht naar volledigheid gesmoord. Ieder onderwerp dat gedurende de laatste veertig jaar ooit op de ministeriële lijstjes heeft gestaan, schijnt aan bod te moeten komen in de welgeteld vijftig lesuren die men voor de ruimtemeetkunde heeft uitgetrokken. Men zou de gedachte aan onmisbare kennis en vaardigheid eens van zich af moeten zetten. Alles wat wij geleerd hebben lijkt onmisbaar. De lijst is veel te lang, de sier en franje die haar nu nog omgeven, zullen door de tijdnood onverbiddelijk worden weggeloogd.
Gooi toch weg die belegen parametervoorstellingen en die krakkemikkige vectoren. Val de leerlingen toch niet meer lastig met de inhoudsberekening van omwentelingslichamen. Weg uit de kale vlakte. Ruim baan voor ruimtemeetkunde met diepte.
Bij de vaststelling van het programma zou men ook eens moeten denken aan de indruk die de gekozen onderwerpen na vele jaren achtergelaten zullen hebben op de leerling. Denkt de leerling met plezier of met afkeer terug aan de wiskundeles? Herinnert zij/hij zich slechts eindeloos gewroet in een onwillige cijferletterbrij, of koestert zij/hij na al die jaren nog zo een mooi vergezichtje, nog altijd stralend al is het beeld niet meer zo scherp?
Tot zover mijn pleidooi in woorden voor een zuiniger doch diepzinnig programma ruimtemeetkunde. De lezer zal zich misschien afvragen wat ik toch bedoel met die woeste hoogten en lokkende verten. Daarom wil ik nu drie voorbeelden geven van m.i. diepzinnige ruimtemeetkunde, drie pareltjes van vergezichten die, in het nodige aantal lesuren, naar mijn oordeel, ook binnen het bereik van onze leerlingen liggen. Alle illustreren zij het volgende motief: gegeven een tekening die wij in eerste instantie lezen als een meetkundige situatie in het platte vlak. Als zodanig is de situatie vrij ondoorgrondelijk. Op het moment echter dat wij diepte zien in de tekening, haar ontmaskeren als de weergave van een situatie in de ruimte, wordt de tekening helder. Diepte en inzicht vallen samen, is er op het gebied der ruimtemeetkunde een mooiere metafoor denkbaar?

Voorbeeld 1

Bij parallelprojectie worden vormen onderling evenwijdige projectiestralen op een plat vlak afgebeeld. Tekenen wij op een zonnige dag een vierkant op een glasplaat en bekijken de schaduw van dat vierkant op de grond, dan bestuderen wij aldus de parallelprojectie van het vierkant. De evenwijdigheid der invallende zonnestralen zorgt ervoor dat de overstaande zijden ook in de schaduw parallel blijven aan elkaar; de schaduw van het vierkant is een parallellogram. Zouden wij met streepjes één der zijden van het vierkant in bijvoorbeeld drie gelijke stukken verdelen, dan zouden wij tegelijkertijd met de schaduw van die streepjes de overeenkomstige zijde van het parallellogram in drie gelijke stukken verdelen; verhoudingen langs een rechte lijn blijven behouden. In het bijzonder is de schaduw van het midden van een lijnstuk het midden van de schaduw van dat lijnstuk.



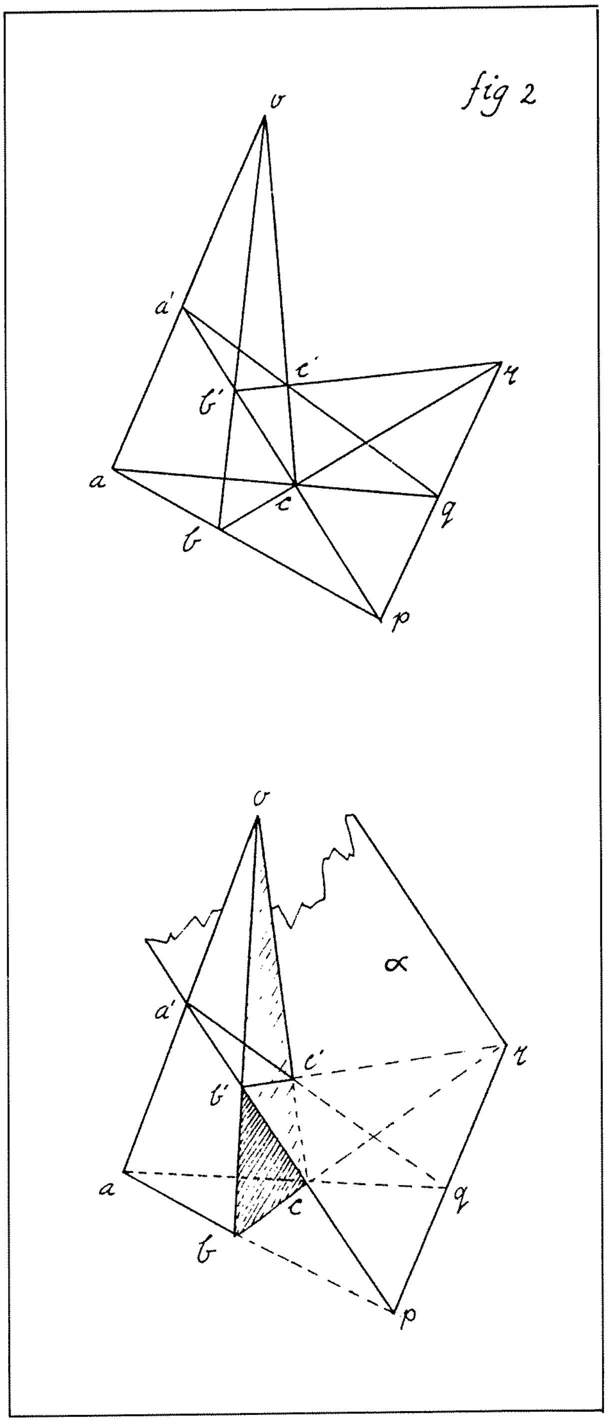
Van een gelijkzijdige driehoek weten wij dat hij drie spiegelassen bezit, die ieder een hoekpunt met het midden van de overstaande zijde verbinden. De symmetrie dwingt deze assen door één punt te gaan. Enige gelijkvormigheid leert ons dat de assen op elkaar een verhouding 1:2 insnijden.

Uit het bovenstaande volgt nu de stelling der zwaartelijnen voor willekeurige driehoeken. Wij beschouwen de willekeurige driehoek als het schuine beeld van een gelijkzijdige driehoek, als de parallelprojectie. De zwaartelijnen van de willekeurige driehoek verbinden hoekpunten met de middens van hun overstaande zijden, zij zijn dus het beeld van de spiegelassen in de gelijkzijdige driehoek. De assen gaan door één punt, hun beelden, de zwaartelijnen dus, eveneens. De assen snijden op elkaar een verhouding van 1:2 in, verhoudingen langs een lijn blijven behouden, dus de zwaartelijnen snijden op elkaar evenzo een verhouding 1:2 in.

Op dezelfde wijze zijn vele stellingen over driehoeken, parallellogrammen en trapezia tot stellingen over de gelijkzijdige driehoek, het vierkant en bijzondere trapezia te herleiden.

Voorbeeld 2

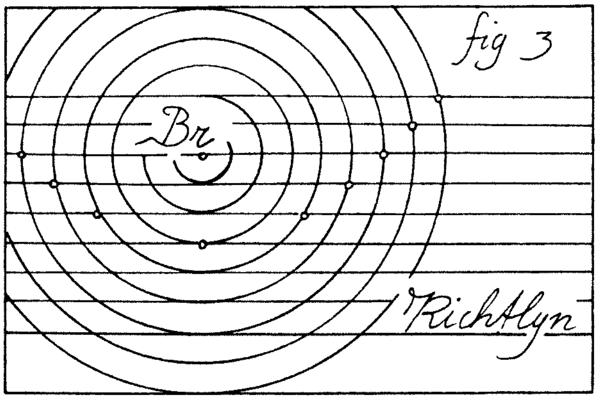
In de meetkunde van de vorige eeuw speelde de stelling van Desargues een belangrijke rol. De stelling zegt dat als van twee driehoeken ABC en A'B'C' de lijnen die overeenkomstige hoekpunten verbinden (dus AA', BB' en CC') door één punt gaan, de snijpunten van (verlengde) overeenkomstige zijden (dus AB met A'B', BC met B'C' en CA met C'A') op één lijn liggen. De lezer die niet vertrouwd is met de projectieve meetkunde zou ik willen aanraden de stelling rustig op zich in te laten werken. Opmerkelijk



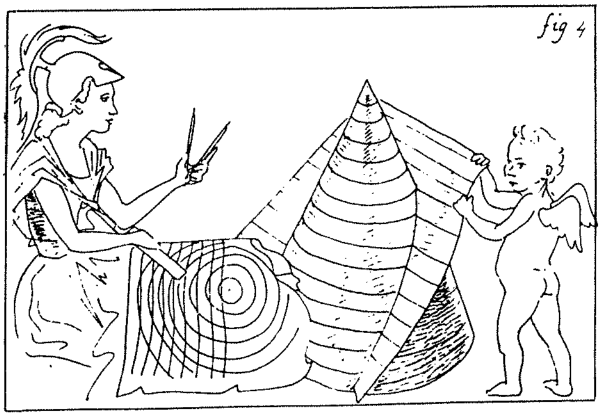
is dat de stelling, bij verwisseling van de begrippen 'punt' en 'lijn' in de formulering, overgaat in haar eigen omgekeerde.
In figuur 2 is de bijbehorende tekening gegeven, met daaronder een ruimtelijke interpretatie van die tekening. Wij vatten ABC op als het grondvlak van een driehoekige piramide, met A'B'C' als doorsnijdingsdriehoek van deze piramide met een vlak alfa. Het feit dat de lijnen die overeenkomstige hoekpunten verbinden door één punt gaan, maakt deze interpretatie mogelijk. Verlengen wij nu overeenkomstige zijden, bijvoorbeeld BC en B'C', dan snijden deze lijnen elkaar op de snijlijn van de vlakken waarin zij gelegen zijn, dus op de snijlijn van het grondvlak en vlak alfa. Op deze lijn moeten dus alle snijpunten der overeenkomstige zijden liggen. Kortom: de snijpunten der overeenkomstige zijden liggen op één lijn.

Voorbeeld 3

Het derde voorbeeld heeft betrekking op de parabool. Men kan een parabool definiëren als een verzameling punten in het platte vlak, die aan zekere eigenschap voldoen. Bij een vaste lijn; de richtlijn, en een vast punt; het brandpunt zijn de punten van de parabool, juist die punten die even ver van de richtlijn als van het brandpunt liggen.



Men kan de parabool ook definiëren als de doorsnijdingskromme van een kegel en een plat vlak, ingeval de hoek die het vlak met de as van de kegel maakt gelijk is aan de hoek die de as van de kegel met een willekeurige rechte lijn op zijn mantel maakt.
Gaan wij uit van de definitie als puntverzameling, dan vinden wij punten van de parabool door bij willekeurige R groter dan nul, een cirkel met straal R om het brandpunt, te snijden met een lijn op afstand R van de richtlijn, en dus evenwijdig aan deze. Immers waar zo'n lijn en cirkel elkaar snijden, is de afstand tot richtlijn en brandpunt blijkbaar gelijk. Gaan wij systematisch te werk, dan trekken wij lijnen evenwijdig aan de richtlijn, steeds 1 lengte-eenheid verder, en cirkels rond het brandpunt met steeds een 1 lengteeenheid grotere straal, en stippen de snijpunten aan. Aldus ontstaat het patroon van figuur 3. Hetzelfde patroon kunnen wij echter ook opvatten als de hoogtekaart van een kegeldoorsnijding, de concentrische cirkels zijn dan de (iso)hoogtelijnen van de kegel, de evenwijdige lijnen zijn dan de hoogtelijnen van het doorsnijdende vlak. De richtlijn is de lijn op het vlak van punten die even hoog liggen als de top van de kegel. De aangestipte punten bevinden zich nu op de lijnen en cirkels die even hoog liggen, dus geven punten van de doorsnijdingskromme aan (zie figuur 4).



Dat de doorsnijdingskromme inderdaad weer een parabool is blijkt uit het feit dat de cirkels even ver van elkaar afliggen als de lijnen, dus dat de kegel even steil is als het vlak.
Ook ellipsen en hyperbolen laten zich zowel als kegeldoorsnijding als door puntenverzamelingen definiëren. Gegeven een vast getal e (groter dan nul) zijn bij gegeven richtlijn en brandpunt de punten van de ellips (als e kleiner dan 1) of hyperbool (e groter dan 1) juist die punten waarvan de afstand tot het brandpunt in een verhouding e:1 met de afstand tot de richtlijn staat. In het patroon betekent dit voor de ellips dat de cirkels dichter bij elkaar komen te liggen, wat indien wij de tekening als hoogtekaart beschouwen betekent dat het vlak minder steil is dan de kegel. In het geval van de hyperbool komen de cirkels juist verder van elkaar af te liggen dan de lijnen, wat voor de hoogtekaart betekent dat de kegel minder steil is dan het vlak.