

Even krijten



G. Schoemaker

OW & OC, R.U. Utrecht

Samenvatting

Aangroeiende cirkels, bollen, vierkanten en rechthoeken blijken meer met differentiaalrekening te maken te hebben dan velen denken. Zelfs het 'bewijs' van de produktregel valt zo meetkundig te leveren. De 10e "Even Krijten". Wie schrijft de elfde?


"Interpreteer de begrippen differentiequotiënt en afgeleide op een meetkundige manier aan de hand van een zelfgekozen wiskundig voorbeeld."

Zo luidt één van de eerste vragen uit een test van de Duitse onderzoekster Gabrielle Kaiser.

In een groep wiskundedocenten hebben we deze test besproken, die tot doel heeft na te gaan of leerlingen hun kennis van differentiaalrekening flexibel kunnen toepassen.

De docenten gaven unaniem antwoorden als: "Een koorde die overgaat in een raaklijn aan een kromme, oftewel riko van een koorde en hellingfunctie, volgende vraag."

Op dat moment schoot me de vraag van een leerling te binnen. De afgeleide van πr^2 is $2\pi r$ en dat is ook de omtrek van de cirkel. Is dat toevallig zo? Sommige docenten kenden deze nog niet.

Ik tekende  $\frac{\Delta\theta}{\Delta r}$. Men knikt oja, leuk.

Volgende som

Op school zou je dat zorgvuldiger moeten doen. Als je het geluk hebt dat een leerling die vraag stelt. Wat zou je dan doen, niet alleen als antwoord aan die ene leerling, maar juist ook aan de klas?

Even overzichtelijk opschrijven:

	opp	afgeleide	omtrek
cirkel met straal r	πr^2	$2\pi r$	$2\pi r$

Probeer het eens bij een vierkant met zijde x .
Probeer het eens bij een rechthoek met zijde x en $3x$.

Summary

Calculus, and more specific, differentiation has almost always been identified with tangents, chords and graphs.

Another way to look at it is in a strictly geometrical way: growing circles, spheres, squares and rectangles may contribute to a better understanding of differentiation.

Probeer het eens bij een kubus.


	opp	afgeleide	omtrek
cirkel met straal r	πr^2	$2\pi r$	$2\pi r$
vierkant zijde x	x^2	$2x$	$4x$
rechthoek zijden, $x, 3x$	$3x^2$	$6x$	$8x$
	inhoud		opp
kubus ribbe x	x^3	$3x^2$	$6x$

Als dan eens een leerling vroeg: "Wat is de formule voor de bol?"

Bij $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ en $0 = 4\pi r^2$ klopt het wel!

Hoog tijd om eens nader naar de cirkel te kijken.

$\Delta\theta = \pi(r + \Delta r)^2 - \pi r^2$ kun je tekenen als een schil.

 Je kunt het vereenvoudigen tot $2\pi r \cdot \Delta r + \pi \cdot (\Delta r)^2$.

De $2\pi\Delta r$ kun je interpreteren als een rechthoek met lengte $2\pi r$ en breedte Δr . De schil is bij benadering gelijk aan een ceintuur met lengte $2\pi r$ en breedte Δr .

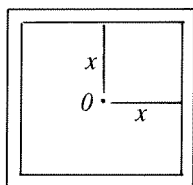
Het differentiequotient is $\frac{2\pi r \cdot \Delta r + \pi \Delta r^2}{\Delta r} =$
 $= 2\pi r + \pi \cdot \Delta r$.

Je kunt het ook schrijven als $2\pi(2 + \frac{1}{2}\Delta r)$, de omtrek van een cirkel tussen de beide getekende cirkels. De limiet voor Δr naar nul is $2\pi r$, de lengte van de ceintuur, oftewel de omtrek van de cirkel.

Genoeg voor vandaag. Volgende som.

Een volgende les:

Laten we ook eens kijken naar een vierkant.



Het groeit in twee richtingen.

De schil is hier $(2x + 2\Delta x)^2 - (2x)^2 = 8x\Delta x + 4\Delta x^2$, te interpreteren als een rechthoek $\Delta x(8x + 4\Delta x)$.

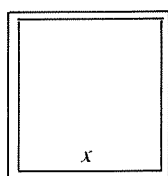
Het differentiequotient is $8x + 4\Delta x$.

Buitenste vierkant heeft omtrek $8x + 8\Delta x$.

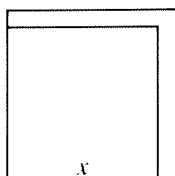
Binnenste vierkant heeft omtrek $8x$.

En nu zijn omtrek en afgeleide wel gelijk.

Een vierkant met zijde x kun je op twee manieren laten aangroeien:



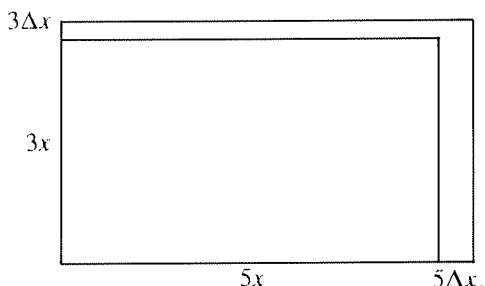
schildikte is $\frac{1}{2}\Delta x$



schildikte is Δx

Een rechthoek met zijden $5x$ en $3x$.

De aangroeiing van de lengte is $\frac{2}{3}$ maal die van de breedte.



Oppervlakte schil lees je zo af in de tekening:

$$3x \cdot 5\Delta x + 5x \cdot 3\Delta x + 3\Delta x \cdot 5\Delta x.$$

Het differentiequotient is $30x + 15\Delta x$, de halve omtrek van de oorspronkelijke rechthoek is $8x$.

De boosdoeners zijn de factoren 5 en 3. Bij het vierkant met schildikte $\frac{1}{2}\Delta x$ was dat de factor $\frac{1}{2}$.

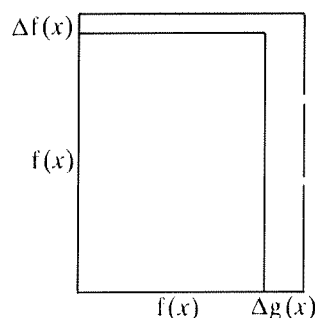
Probleem:

Hoe hoog moet ik een cilinder met straal r kiezen opdat de afgeleide functie van de inhoud (naar r) en de oppervlakte overeenstemmen?

Heeft het zin, zulk gevogel in de wiskundeles? Dat hangt ervan af wat je vindt dat wiskunde voor een bezigheid is. In ieder geval heeft dit gedoe ook enig nut voor enige lessen later. De ervaring met de rechthoek is bruikbaar en noodzakelijk bij de volgende illustratie van de produktregel: zie 'Differentiëren 2' blz. 37.

Het komt hierop neer:

Wat is de afgeleide functie van $f(x) \times g(x)$?



De oppervlakte van de aangroeiing van de rechthoek is:

$$\Delta f(x) \cdot g(x) + \Delta g(x) \cdot f(x) + \Delta f(x) \cdot \Delta g(x)$$

De boosdoeners zijn nu $f'(x)$ en $g'(x)$ enz.

Zie 'Differentiëren 2' blz. 37, 38, 39 en 40.

Verkrijgbaar bij Educaboek.

Zie ook Ruimtemeetkunde 2, hoofdstuk 1, eveneens verkrijgbaar bij Educaboek.

NATO Advanced Study Institute

Learning physics and mathematics via computers

WERKCONFERENTIE TE SAN MINIATO, ITALY 15-26 juli 1985

Het doel van de werkconferentie is het ontwikkelen van strategieën om te komen tot effectief gebruik van elektronische hulpmiddelen, vooral microcomputers, in het leerproces in de vakken natuurkunde en wiskunde. Mogelijkheden en beperkingen van deze media zullen de revue passeren in relatie tot cognitieve processen, ontwikkelingspsychologie en didactiek.

Deelnemers zullen worden ingedeeld in groepen waarbinnen een gemeenschappelijke belangstelling is voor onderwerpen uit de natuurkunde en wiskunde van de tweede fase voortgezet onderwijs. De groepen, ingeleid door sprekers, hebben tot doel nieuwe pedagogische benaderingen te ontwikkelen van deze onderwerpen.

Het totaal aantal deelnemers is rond de negentig, waarvan ongeveer vijf Nederlandse.

Belangstelling voor deelname aan de Nederlandse afvaardiging moet vòòr 15 maart 1985 doorgegeven worden aan het:

Centrum voor Onderwijs en Informatietechnologie,
t.a.v. dr. J. Moonen,
Postbus 217,
7500 AE ENSCHEDE.

Er is een bescheiden budget waaruit de onkosten voor een gedeelte kunnen worden vergoed.