Botje bij botje leggen

of: een formule is niet heilig

A. Roodhardt
Chr. S.G. Oostergo, Dokkum

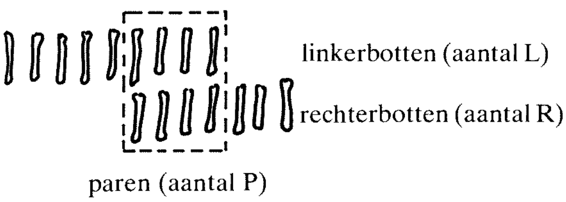
Samenvatting

De leerlingen van de onderbouw kregen tot nu toe vrij weinig mogelijkheden de kunstjes op "echte" situaties toe te passen. Materiaalschaarste? Hieronder een poging daaraan iets te doen. Het is een gekuist verslag van een klassegesprek in een 3-havo groep in het eerste deel van de cursus.

Summary

Applying mathematical 'tricks' in real situations has always been a problem in the lower years of secondary education.
This article tells about experiences with an application from archeology: how to estimate the total number of animals judging from the number of bones found.

Een archeoloog vindt een partij botten van huisdieren. In de loop der tijd zijn er natuurlijk botten zoekgeraakt, of vergaan. Toch wil hij graag een idee hebben van het aantal dieren dat er oorspronkelijk was.
Voor een bepaalde diersoort zoekt hij de meest voorkomende botten bij elkaar. Bijvoorbeeld de dijbenen van de achterpoten. Hij kan nagaan welk linkerbotje bij welk rechterbotje past.
Dit is het resultaat:



D: *Hoeveel dieren zijn er geweest?*
Ll: *12.*
D: *Kun je het antwoord ook geven in een vorm met* L, R *en* P?
Ll: L + R − P.

Sommige mensen moeten altijd moeilijk doen en die schrijven natuurlijk: L − P + P + R − P.
Door enig wegstrepen vinden ze weer aansluiting.

D: *Ben je zo'n soort berekening als:* L + R − P *wel eens eerder tegengekomen?*
Na enige aarzeling:
Ll: *Bij Venn-diagrammen.*

Aantal $(V \cup W)$ = *aantal* (V) + *aantal* (W) − *aantal* $(V \cap W)$.
D: *Waarom zullen er waarschijnlijk meer dieren zijn geweest?*
Ll: *Van sommige dieren kunnen beide botten verdwenen zijn.*
D: *Een archeoloog heeft een formule bedacht om het oorspronkelijke aantal dieren uit te rekenen. Dat aantal noemt hij* N.

$$N = \frac{L^2 + R^2}{2P}$$

Hiermee wordt een aantal berekeningen gemaakt en die bevestigen het vermoeden: $N \geqslant L + R - P$.
De resultaten maken wel enige indruk, getuige de reactie.
Toch knap van zo'n man.

We gaan nu proberen de formule in discrediet te brengen.
Noem eens wat gekke getallen om de berekening op toe te passen.
Bruikbaar antwoord:
Er zijn alleen maar linkerbotten. Dan is R = 0. *Maar dan is P ook 0.*
(Triomfantelijk). *Je mag niet door 0 delen!*

We behoeden de archeoloog voor een afgang, door te vermelden dat bij de formule P ≠ stond. Toch blijft er enig onbehagen bestaan over het feit dat de formule niet steeds toepasbaar is.
D: *Is dat dan zo erg?*
Ll: *Nou nee, alleen maar linkerbotten is wel heel toevallig. Dat zal bijna nooit voorkomen.*

We willen toewerken naar een betrouwbaarheidstest.

Een zak botten in de grond stoppen en over 100 jaar weer kijken.

De rest van de klas heeft niet zoveel geduld en een enkeling vindt dat zo'n telling, als die mogelijk was, nog geen zekerheid geeft.

Met enige hulp komt er:

D: *Als je een geval hebt waarin je het werkelijke aantal weet, dan moet de berekening (ongeveer) hetzelfde aantal geven. Weet je zo'n geval?*
Ll: *Ja, als er niets is verdwenen.*
D: *Hoe zit het dan met* L, R *en* P?
Ll: L = R = P *en* N *zou* P *moeten zijn.*
D: *Controleer dat eens.*

Ll: $N = \frac{P^2 + P^2}{2P} = \frac{2P^2}{2P} = P.$ *Waarachtig!*

Het vertrouwen in de archeoloog neemt weer toe. Meer speciale gevallen komen er niet uit.

We proberen nu de kwetsbaarheid van de formule aan de orde te stellen.

Een archeoloog heeft zijn vondst op een tafel gedeponeerd en begint te sorteren. Hij onderbreekt zijn werk om een kopje koffie te gaan drinken.
We willen een grap met hem uithalen door een botje te pikken.
Welk botje zullen we nemen?

Men heeft een natuurlijk gevoel voor de mate van boosaardigheid, want er blijkt een voorkeur te bestaan voor een bot van een paar.

Neem je oude berekeningen en maak ze over met P *één lager. Vergelijk eens wat berekeningen met je buurtgenoten.*

Sommige groepen hebben geschikte getallen gekozen en die komen tot een verrassende ontdekking.

Als P *klein is en* L *en* R *groot, dan maakt dat ene botje een groot verschil voor de uitkomst.*

Conclusie:
De formule is niet altijd betrouwbaar.
Dat botje had net zo goed niet gevonden kunnen worden!

We zetten onze ondermijnende activiteiten voort.

Er bestaat nog een andere formule:

$$N = \frac{LR}{P}$$

Deze formule ziet er aantrekkelijk uit. Maar er ontstaat enige verlegenheid en bij sommigen zelfs verbazing, als blijkt dat deze formule andere antwoorden kan geven dan de eerste.

Twee antwoorden voor dezelfde opgave, dat kan natuurlijk niet. Welke formule is nu de echte?
Misschien zijn ze alletwee fout.

Nu komt voor het eerst de vraag op, hoe die mensen aan die formules zijn gekomen.

Mijn antwoord, dat ik dat niet weet, wordt niet geloofd.

Ll: *Hoeven we eigenlijk ook niet te weten. Dat zal toch wel niet te snappen zijn.*
D: *Geeft de tweede formule weleens hetzelfde antwoord als de eerste?*

Raadpleging van de aantekeningen, aangevuld met een kleine berekening, geeft:

Ll: *Als* L = R = P, *dan krijg je ook*
$$N = \frac{P.P}{P} = P.$$

Uit een aantal berekeningen rijst het vermoeden dat de eerste formule meestal het grootste antwoord geeft. Het kleinste komt niet voor.
We formuleren dit vermoeden in dure taal:
$$\frac{L^2 + R^2}{2P} \geqslant \frac{LR}{P}.$$

D: *Bewijs maar eens dat deze formule waar is.*

Ontzetting!

Ll: *Het moet wel leuk blijven, hoor!*
D: *Als je niet weet wat je moet doen, ga dan wat aan die vormen rekenen. Misschien brengt dat je op een idee.*
Ll: *Wat kun je hier nu aan rekenen?*

De breukvorm blijkt een hindernis te zijn.

D: *Opruimen.*
Ll: *Ja, natuurlijk, met* P *(later* 2P*) vermenigvuldigen.*
D: *Mag dat zomaar bij een ongelijkheid?* (Je bent schoolmeester of niet).
Ll: *Ja,* P *is positief.*

Er ontstaat $L^2 + R^2 \geqslant 2LR$ en daarna $L^2 + R^2 - 2LR \geqslant 0$.
Dat is een merkwaardig produkt: $(L - R)^2$.
We hebben nu $(L - R)^2 \geqslant 0$. Er gaat een lichtje branden.
Klaar, want iets in het kwadraat kan nooit negatief zijn.
Men is zeer zelfvoldaan.
D: *Kun je hieraan ook zien wanneer de formules hetzelfde antwoord geven?*
Ll: *Als* L = R.
D: *Dat is een merkwaardig antwoord, vergeleken met het vorige.*
Ll: *Ja, die* P *speelt helemaal geen rol. We waren te streng.*

Contrôle in de formules bevestigt dit.
Het blijft storen dat er twee formules zijn. Een compromisvoorstel van een leerling kan dan ook niet uitblijven.
Laten we het gemiddelde van de twee formules nemen. Maak daar eens een nieuwe formule voor.

Er komt:
$$N = \tfrac{1}{2}\left(\frac{L^2 + R^2}{2P} + \frac{LR}{P}\right).$$
Kan dat niet wat mooier?
$$N = \tfrac{1}{2}\left(\frac{L^2 + R^2 + 2LR}{2P}\right)$$
en dan:

$$N = \tfrac{1}{2}\left(\frac{(L+P)^2}{2P}\right).$$

De stap naar $N = \frac{(L+R)^2}{4P}$ blijkt voor veel leerlingen een groot rekentechnisch probleem te zijn.

Tot slot laten we een stoet van archeologen opdraven. Ze komen om de beurt binnen met hun persoonlijke formule. De voorgestelde fantasie-formules komen op het bord te staan.

Jullie moeten, zonder berekeningen te maken, een aantal formules als onbruikbaar afwijzen. Maar je moet er wel een goede reden voor hebben.

Er wordt onnodig leed berokkend. Ingewikkeld is verwerpelijk. Zijn ze bang dat ze straks toch nog moeten rekenen?

Een formule als:

$$N = \frac{L^2 + 2R}{2P}$$

wordt niet massaal weggehoond.

Dat lijkt nog niet zo gek.

Gelukkig is er iemand die de algemene mening durft te trotseren en door zijn opmerking bij de rest van de klas respect afdwingt.

Ik vind die formule niet goed, want er is geen 'evenwicht' tussen L *en* R.
