De programmeerbare zakrekenmachine in het wiskunde-onderwijs

H.A. Lauwerier
M.I., U.v.A., Amsterdam

Samenvatting

Het wiskunde-onderwijs moet opnieuw ingrijpend aangepast worden vanwege de maatschappelijke revolutie die veroorzaakt is door de intrede van de computer. Als consequentie daarvan zou de programmeerbare zakrekenmachine een essentiëel onderdeel van het wiskunde-onderwijs moeten gaan vormen. Daarbij zal het voornamelijk gaan om het creatieve gebruik van de computer.

Summary

It is necessary to change math-education drastically, because of the revolution in society caused by the introduction of the computers.
Working with programmable pocketcalculators is a must in math-education at secondary level. Examples are given how this can be done, using the computer in a creative way.

Inleiding

Dit artikel houdt een pleidooi in om de programmeerbare zakrekenmachine als essentieel onderdeel van het wiskunde-onderwijs in te voeren. Niet alleen om er sommetjes mee uit te rekenen, maar ook, en vooral als hulpmiddel, om inzicht te verwerven in een fundamenteel begrip als de limiet en om ideeën op te doen. Kortom 'het creatieve gebruik van de computer'. Dit artikel biedt maar heel weinig ruimte om te vertellen wat men voor leuke en nuttige dingen met zo'n zakrekenmachine en ook met de grotere personal computer kan doen. Uitvoerig materiaal is in voorbereiding en deels reeds gereed bij de Universiteit van Amsterdam.
Uiteraard kunnen een aantal van de hierin ontwikkelde ideeën ook elders in vroegere publikaties aangetroffen worden, als Pythagoras en de Wiskrant. Dr. Korthagen van de 'vakgroep didaktiek', aan wie ik overigens veel dank verschuldigd ben voor zijn commentaar op een eerdere versie van dit artikel, maakte mij attent op een artikel van Prof. Van der Blij in de Wiskrant, 2e jrg. nr. 7, mei 1977, p. 15-16, getiteld 'Hoe het groeit' waarin het model (2) van de geremde groei al ter sprake komt.

Het is inmiddels wel duidelijk geworden, dat met de intrede van de computer een maatschappelijke revolutie ingezet is die zich reeds uitgestrekt heeft tot de school. Een vak als (burger)informatica vindt hier en daar al ingang. De jongere generatie bedient zich met de nodige virtuositeit van allerlei zak- en spelcomputers op een wijze die bij de oudere generatie bewondering of afgrijzen teweegbrengt.

Het is mijn stellige overtuiging dat het wiskunde-onderwijs opnieuw ingrijpend gemoderniseerd, of tenminste aangepast moet worden om de jonge scholier te kunnen voorbereiden op een toekomstige plaats in de gecomputeriseerde maatschappij, waarin hij profijt kan trekken uit wat hij op school geleerd heeft.

Voor de duidelijkheid van dit betoog beperk ik mij tot het huidige wiskundeprogramma VWO van de klassen 3, 4, 5 en wanneer ik het heb over computers, bedoel ik vooral de kleine handige programmeerbare zakrekenmachine (zelf gebruik ik de HP41) en soms de grote personal computer met een grafisch beeldscherm. Ik stel mij voor dat in de, wellicht zeer nabije, toekomst elke scholier in de wiskundeles de beschikking heeft over zo'n kleine programmeerbare pocket calculator waarop kleine programmaatjes uitgevoerd kunnen worden. Met de personal computer kan natuurlijk veel meer. Dat is vooral geschikt voor onderwijs in kleine groepen.

Voor mij is de zakrekenmachine het moderne equivalent van de logaritmetafels van vroeger en de rekenliniaal van een iets recenter verleden. Men zou kunnen denken dat het werken met de computer overgelaten zou kunnen worden aan een leraar informatica en dat goed wiskunde-onderwijs het beter zonder computer zou moeten stellen. Dat is een ernstige vergissing. Zoals fiets en auto onze bewegingsmogelijkheid verruimen en ons fysiek in staat stellen de wereld te ontdekken, zo stelt de computer ons in staat de wereld van de wiskunde in theorie en toepassing te verkennen in ruimere mate dan vroeger het geval was. Nu behoeven we geen volledige cursus verbrandingsmotoren en autotechniek te volgen om toch gezellig te kunnen toeren. En evenmin behoeven we eerst een volledige cursus Pascal of microprocessoren te volgen om leuk met de computer te kunnen 'spelen'.

Mijn opvatting is dat de computer weliswaar een nuttig instrument is om bepaalde wiskundig geformuleerde problemen numeriek op te lossen, maar ook dat de computer een creatief en inspirerend instrument is dat ons kan helpen moeilijke wiskundige begrippen en structuren duidelijk te maken. In het wiskunde-onderwijs gaat het dus om het creatieve gebruik van de computer.

Het creatieve gebruik van de computer

In het moderne wiskunde-onderwijs dient de leerling met de ene hand de computer en met de andere hand de pen te hanteren. Om duidelijk te maken welke consequenties dit heeft, ga ik even terug in de geschiedenis van ons onderwijs. In mijn jeugd, de dertiger jaren, was het wiskunde-onderwijs nog geheel in de ban van de landmeetkunde. Veel energie werd gestoken in het op juiste wijze hanteren van logaritmetafels en het logaritmisch maken van trigonometrische formules. Wie zich in die tijd met toepassingen van de wiskunde bezig hield, had dan ook te maken met de problematiek van plaatsbepaling op hemel en aarde, navigatie enz. Het alternatief was levensverzekeringswiskunde. Ingenieurs en fysici gingen hun eigen gang. Sindsdien, in een periode van zeg een veertig jaren, is zich een geweldige maatschappelijke ontwikkeling aan het voordoen waarin de wiskunde, mede dankzij de computer steeds meer een centrale positie is gaan innemen.

Het is verheugend dat het wiskunde-onderwijs deze maatschappelijke signalen in een vroeg stadium heeft onderkend, met als gevolg een grondige modernisering van het wiskundeprogramma. Helaas gaan de ontwikkelingen in de maatschappij zo snel dat het onderwijs het niet kan bijbenen en het wiskunde-onderwijs is m.i. dringend opnieuw aan vernieuwing toe. Wat gisteren nog modern leek, is nu al ouderwets. In het huidige onderwijs is nauwelijks iets terug te vinden van het soort problemen die vooral in de natuurwetenschappen leven. Veel te veel aandacht wordt besteed aan het ontwikkelen van vaardigheden die in de praktijk niet meer nodig zijn. Ik denk hierbij in het bijzonder aan het uitrekenen van allerlei integralen, het oplossen van differentiaalvergelijkingen, aan het analyseren van functies en grafieken die alleen in het wiskunde-onderwijs optreden.

In de praktijk is niemand meer geïnteresseerd in dit soort zaken in andere dan de meest eenvoudige gevallen. Er zijn immers formuletabellen en computers beschikbaar. Kortom, in het wiskunde-onderwijs zijn weer nieuwe stofnesten aan het ontstaan die nodig opgeruimd moeten worden. Er komt dan meteen ruimte om dingen te bestuderen die in de praktijk hard nodig zijn.

Het opstellen en analyseren van een wiskundig model

In de praktijk bedienen vakken als economie, biologie, psychologie, farmacie, om er maar een paar te noemen, zich in toenemende mate van soms uiterst eenvoudige wiskundemodellen waar het schoolse wiskunde-onderwijs bijna geheel aan voorbijgaat. Het gaat o.a. om modellen van het type:

(1) $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-p+1})$,

z.g. iteratieve processen waarbij een rij (x_n) bepaald wordt door een of meer (p) beginvoorwaarden. Bij dergelijke modellen kun je een klein beetje differentiëren maar integreren is er niet bij. Pas met behulp van de computer zijn deze modellen populair geworden. Het volgende heel eenvoudige model laat zien wat er mogelijk is wanneer de leerling de beschikking heeft over een programmeerbare zakrekenmachine. Het model is:

(2) $x_{n+1} = ax_n(1-x_n), \qquad 0 < x_n < 1.$

De biologische achtergrond van dit model is als volgt. We stellen ons een insectenpopulatie voor die zich elk 'seizoen' voortplant en een nieuwe generatie levert. Het aantal insecten noemen we P_n waarbij de index n slaat op het rangnummer van de generatie. Wanneer de insecten zich ongeremd zouden voortplanten en elk insect gemiddeld a eieren legt die zich tot nieuwe volwassen individuen ontwikkelen, zou het aantal insecten in de volgende generatie P_{n+1} gelijk aan aP_n zijn. Dit geeft het volgende model van ongeremde groei mits $a > 1$ is:

(3) $P_{n+1} = aP_n, \qquad a > 1.$

De oplossing hiervan is:

(4) $P_n = a^n P_o$.

Het is heel instructief het model (3) met de computer te vervolgen, bv. voor $a = 2$ om aldus een gevoel te krijgen van wat eigenlijk exponentiële groei is. In het pakket 'Exponenten & Logaritmen' van het OW & OC wordt dit uitvoerig behandeld. Maar hier houden we ons juist bezig met het ook biologisch realistischer model van de geremde groei. Men zou de coëfficiënt a in (3) de vruchtbaarheidsfactor kunnen noemen. Het principe van de remming op de groei is dat deze vruchtbaarheidsfactor afneemt naarmate het aantal P_n toeneemt. De eenvoudigste manier om dit wiskundig te modelleren is te veronderstellen dat a een dalende lineaire functie van P_n is:

$$a = \alpha - \beta P_n, \qquad \alpha > 0, \beta > 0.$$

Daarmee wordt het model van de geremde groei:

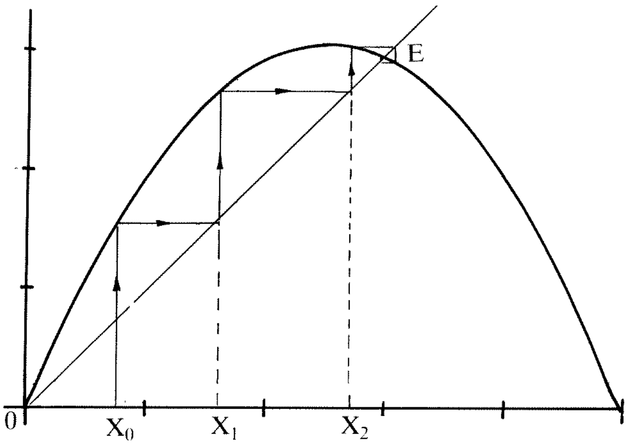
$$P_{n+1} = P_n(\alpha - \beta P_n).$$

Om dit model in de vorm (2) te brengen is alleen maar een zaak van schalen, van keuze van eenheden. Stellen we:

$$P_n = \alpha x_n/\beta$$

dan krijgen we precies model (2) en dit model is zo uiterst fundamenteel, dat we er iets uitvoeriger bij stilstaan.

De eerste opmerking is dat het niet mogelijk is voor x_n een expliciete oplossing als functie van n te vinden behalve wanneer $a = 2$ of $a = 4$.



Men is dan aangewezen op grafische en numerieke hulpmiddelen.
Grafisch kan het proces vervolgd worden door in één grafiek de functies $y = ax(1-x)$ (bergparabool) en $y = x$ (diagonaal) te tekenen. De snijpunten 0 met $x_n = 0$ voor alle n en E met $x_n = 1 - \frac{1}{a}$ zijn de z.g. biologische evenwichten. Een eenvoudige analyse laat zien dat het evenwicht 0 stabiel is voor $a < 1$ en instabiel voor $a > 1$. D.w.z. voor $a < 1$, onvoldoende vruchtbaarheid, sterft de populatie op den duur uit, maar voor $a > 1$ treedt, althans aanvankelijk, groei op. In het evenwicht E is de populatie in evenwicht met de draagkracht van het milieu. Een kleine analyse laat zien dat dit evenwicht stabiel is voor $1 < a < 3$. Wat er voor $3 < a \leq 4$ gebeurt, is wiskundig bijzonder interessant. De rij kan convergeren tot een z.g. periodieke cyclus, of kan op een chaotische wijze divergeren. Het model (2) is in recente jaren onderwerp van veel onderzoek geweest, waarbij wiskundigen en theoretische fysici gestimuleerd door experimenteel met de computer behaalde resultaten op tal van belangwekkende zaken gestoten zijn. Het zou te ver voeren hier verder op in te gaan. Feit is dat heel eenvoudige modellen (2) een gecompliceerde wiskundige structuur hebben.

Terugkerend tot de biologische interpretatie, zijn inderdaad bij opeenvolgende generaties van een bepaalde vliegensoort periodieke verschijnselen waargenomen, die heel goed passen in een model als (2).
In de frontlinie van het wiskundig onderzoek wordt reeds uitgebreid van de computer gebruik gemaakt om op ideeën te komen, om theorieën te toetsen. Kortom, er bestaat een vak genaamd 'experimentele wiskunde' waarin de computer gebruikt wordt op creatieve wijze, ter stimulering en toetsing van het wiskundig onderzoek.
Het model (2) doet niet alleen dienst in de biologie, maar kan ook heel goed gebruikt worden in de problematiek van b.v. economie, natuurkunde, psychologie, epidemiologie enz. Het is eigenlijk het eenvoudigste type van een hele familie van iteratieve processen, die zich heel plezierig lenen voor experimenteel onderzoek met behulp van de computer en waaraan kwalitatief, op zuiver wiskundige wijze, veel plezier kan worden beleefd.

Wat leert ons dit nu voor de school? Welnu, in de eerste plaats om de computer op creatieve wijze te gebruiken, om nieuwe begrippen te leren hanteren. Ik illustreer dit aan de hand van het limietbegrip, in het bijzonder de limiet van een rij. Wat bedoelen we met $\lim x_n = L$ of met $x_n \to L$ voor $n \to \infty$. Om een leerling aan het limietbegrip te laten wennen dient hij met zijn computer een groot aantal experimenten uit te voeren, daarbij telkens de vraag stellend of er wel een limiet is en voor welke waarden van n de limiet in een bepaald aantal decimalen door x_n benaderd wordt. Na een voorzichtig begin en later wat experimenten met rijen als:

$$\frac{\sqrt{n^2+1}}{n},\ (0.99)^n,\ (-1.01)^n,\ \sqrt{n^2+n}-n,\ (1+\tfrac{1}{n})^n$$

is het dan de beurt aan iteratieve processen als:

(5) $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$, $\quad a > 0$.

de klassieke manier om snel en nauwkeurig $\sqrt{a}$ te berekenen. Maar de door (2) bepaalde rij spant de kroon. Men moet het zelf eens doen voor waarden als $a = 0.5, 1.5, 2.5, 2.9, 3.1, 3.4, 3.8, 4$ elk garant voor weer een ander limietgedag. Voor de aardigheid geef ik hieronder het programma zoals dat in de HP41 gebruikt kan worden. Ter toelichting: het variabele getal x_n staat op adres 00, a staat op adres 01.

LBL	"GG"		
1			
RCL	00	haal	x_n
–		maakt	$1-x_n$
RCL	00	haal	x_n
*		maakt	$x_n(1-x_n)$
RCL	01	haal	a
*		maakt	x_{n+1}
PSE		toont	x_{n+1}
STO	00	berg op	
GTO	"GG"	herhaal cyclus	

De cyclus wordt zo'n 36 keer per minuut doorlopen!
Een ander en verwant voorbeeld van creatief gebruik van de computer, is de beroemde rij van Fibonacci:

1 1 2 3 5 8 13 . .

gebouwd volgens het iteratieve proces:

(6) $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$.

Om experimenteel de structuur in deze rij te onderkennen, vragen we onze computer om telkens x_{n+1}/x_n af te beelden.
Ongetwijfeld tot onze verrassing convergeert deze verhouding vrij snel tot het getal $\lambda = 1.61803399$. De rij gaat dus steeds meer lijken op een meetkundige rij, het model van exponentiële groei. Wat voor bijzonder getal zou λ zijn? We proberen maar eens wat toetsen $\sqrt{\lambda}$, λ^2 en $1/\lambda$ bijvoorbeeld. De volgende verrassing is dat $1/\lambda = 0.61803399$.
Het zal dus wel zo zijn dat $\lambda = 1 + 1/\lambda$ d.w.z.:

(7) $\lambda^2 = \lambda + 1$.

Het vervolg laat zich raden. De eerste fase van een theorie kondigt zich aan.

Dit is nog maar het begin, maar de computer kan veel meer, d.w.z. wij moeten er meer mee doen.
Ik hoop aangetoond te hebben dat de computer nuttige diensten kan bewijzen bij de introductie van het limietbegrip. De computer kan ons ook uitstekend helpen bij het analyseren van functies en bij het maken van grafische voorstellingen.

In het besef dat bovenstaande opmerkingen onvolledig en fragmentarisch zijn, meen ik dat het van het grootste belang is de leerlingen op school voor te bereiden op een door de computer beheerste wereld en hen te leren op een zinvolle en creatieve wijze om te gaan met deze rekenautomaten.

Werken in Mozambique

De Eduardo Mondlane Stichting zoekt:

Voor uitzending naar Mozambique zoekt de Mondlane Stichting de volgende kandidaten:

- DOCENTEN WIS- en NATUURKUNDE 2e graad, met ervaring; voor het beroepsonderwijs.
- DOCENT WISKUNDE 1e of 2e graad, met ervaring; voor de leerplanontwikkeling in het beroepsonderwijs.

Aanstelling geschiedt doorgaans op basis van een contract met de Mozambicaanse overheid, voor een periode van minimaal twee jaar.
In aanvulling hierop is suppletie via JVC mogelijk.

Nadere informatie te verkijgen bij:
Eduardo Mondlane Stichting,
Oude Zijds Achterburgwal 173,
1012 DJ Amsterdam.
020 - 237263.

Symposium "Wiskunde: werkelijk spel"

Wiskunde is een activiteit van de spelende mens, en ook een ernstig spel met de werkelijkheid.
Dat is het tweezijdige thema van het Symposium dat vooral voor leraren, maar zeker niet voor hen alleen, georganiseerd wordt in het kader van het Nederlands Mathematisch Congres, dat op 10 en 11 april in Leiden gehouden wordt.

Het Congres: woensdag 10 april 10.00 uur tot donderdag 11 april 17.00 uur.
Het Onderwijssymposium "Wiskunde: Werkelijk Spel": donderdag 11 april, 9.30-15.30 uur.
Plaats: het Gorlaeus-Huygens-complex, Wassenaarseweg 76, Leiden.

In een zevental voordrachten zal de wiskunde in haar relatie met spel en werkelijkheid benaderd worden:
- de speelse kant van de wiskunde (Prof. Dr. Ir. W.L. van der Poel, T.H. Delft);
- het spelende kind, zijn intuïtieve kennis en wiskunde in context (Drs. F.J. van den Brink, OW & OC, R.U. Utrecht);
- andere leerstijl die daarbij in het geding is (Drs. H.G.B. Broekman, P.D.I., R.U. Utrecht);
- de invloed van de computer daarop (?);
- de vraag of wiskunde A wel werkelijk wiskunde is (Drs. D. Kók, V.U. Amsterdam);
- of wiskunde zich niet al te zeer bij de maatschappelijke vorming laat inlijven (Prof. Dr. L.J.R. Westermann, R.U. Groningen).

Prof. Dr. F. van der Blij (R.U. Utrecht) zal tot slot de verschillende gedachten en visies in een lijn proberen te zetten.
Als afsluiting van het hele congres, direct na afloop van het symposium, houdt Prof. Dr. N.G. de Bruijn (T.H. Eindhoven) nog een voordracht over de invloed van de computer op universitaire wiskunde-opleidingen.

Aanmeldingen als deelnemer aan congres en symposium kan door storting van het vereiste bedrag op girorekeningnr. 5685801 van F. Beukers, penningmeester van het W.G.-congres 1985, Leiden onder vermelding van:

hele congres, lid W.G.	*f* 17,50
hele congres, geen lid	*f* 25,–
hele congres, student	*f* 10,–
alleen symposium	*f* 10,–
lunch 10 en/of 11 april	*f* 10,– (ev. 2 maal).

Deelname zonder aanmelding is ook mogelijk; een lunch kan dan niet gegarandeerd worden.

Organisatie van het symposium: G. Bulthuis.