

In de greep van groeispiralen

Jan de Ruiter

Lerarenopleiding Ubbo Emmius, Groningen

Samenvatting

Geïnspireerd door het hoofdstuk 'Spiralen' uit het IOWO-boek 'Exponenten en Logarithmen' ging de schrijver op zoek naar achtergronden van spiraalvorming, met name bij schelpen.

De centrale vraag was daarbij: Als elke volgende kamer (van een schelp) uit de vorige ontstaat, waarbij verkleving van de kamers optreedt en het volume steeds met dezelfde factor toeneemt, ontstaat dan een logaritmische spiraal?

Inleiding

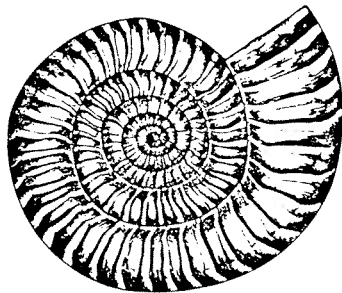
In de planten- en dierenwereld komt veel spiraalvorming voor.

Met deze opmerking begint het hoofdstuk SPIRALEN in het leerstofpakket 'Exponenten en Logarithmen' van Jan de Lange (IOWO, uitgave zomer 1978).

Aan de orde komen dan logaritmische spiralen en hun veelvuldige en veelsoortige voorkomen in de natuur (zie blz. 38 - 45 en blz. 65 van het leerstofpakket).

Dit hoofdstuk heeft altijd een bijzondere aantrekkingskracht op mij gehad. Ik denk omdat de inhoud nogal spectaculair is, zowel biologisch als wiskundig gezien: bij allerlei groeiprocessen in de natuur blijken logaritmische spiralen, of benaderingen daarvan, te ontstaan, als gevolg van een bepaald soort exponentiële groei.

Enige voorbeelden uit het leerstofpakket die mij erg aanspreken:



afb. 1

AMMONIET, een uitgestorven dier, sinds 65 miljoen jaar. De schelpen konden wel zo'n 2 meter groot worden. Als naaste verwant leeft nu nog de nautilus.

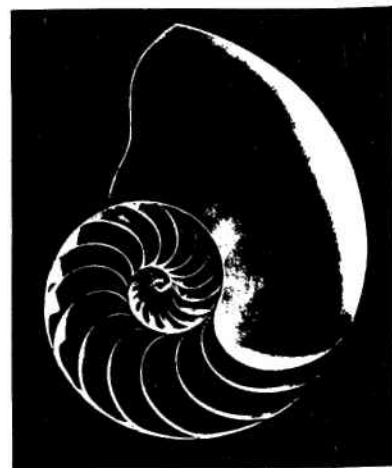
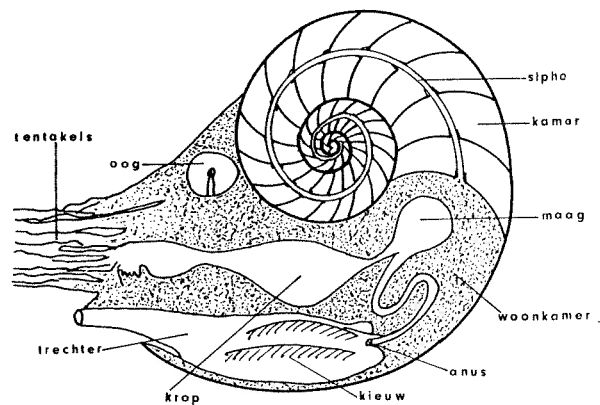
Summary

Shells offer a wide variety of beautiful spiral curves. One of the text-books that pays considerable attention to logarithmic spirals is the IOWO-publication 'Exponents and Logarithms'.

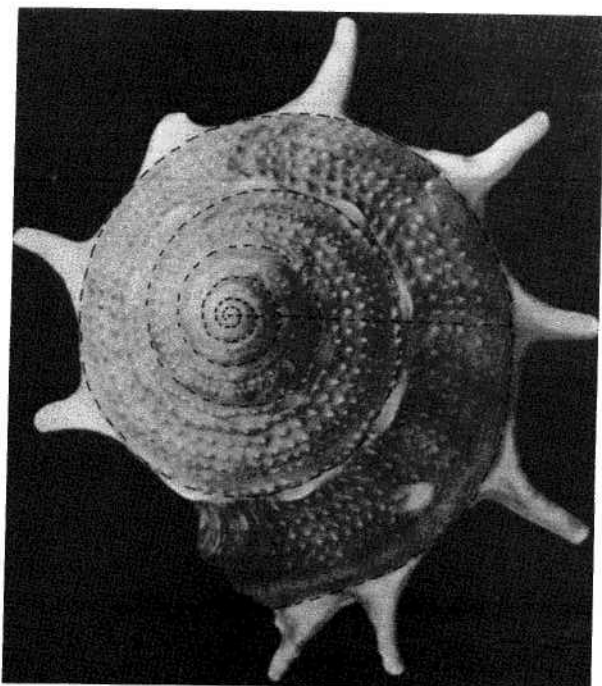
The author was intrigued by the subject and started a search for answers about the causes of logarithmic growth with shells.

A simple computer program that gives the possibility to make fine drawings of spirals was one of the results.

Twee plaatjes van de nautilus schelp.



afb. 2



afb. 3

GUILDFORDIA TRIUMPHANS, een schelp die in de stille oceaan bij Japan voorkomt op dieptes van 50-100 m. De stekels lossen op zodra ze worden 'ingehaald' door het nieuwgevormde gedeelte, er blijven dan kleine uitsteeksels over. De grootte van deze schelp is 3,5-7 cm, de kleur geelbruin.

Hoe komt het nu dat logaritmische spiralen ontstaan?
In het leerstofpakket lezen we:

Het verschil tussen lineaire en exponentiële groei ligt in het al of niet meedoen van het reeds voorhandene bij de nieuwe toename.

Bij de lineaire groei maakt het niets uit of de voorgaande groei pas begonnen of bijna voltooid is; onafhankelijk hiervan komt er steeds dezelfde portie bij.

Bij de exponentiële groei daarentegen draagt alles wat reeds eerder gegroeid was, actief bij tot de verdere uitbouw.

Dit aandeel van de voorafgaande aanwinsten in het productieproces noemt men in het cybernetisch spraakgebruik: positieve terugkoppeling (feed-back). In de geldmarkt heet het: samengestelde interest. Voor de Ammoniet komt het hierop neer, dat elke nieuwe kamer procentueel langer, wijder en volumineuzer wordt.

Tal van processen in het levend weefsel zijn gekenmerkt door exponentiële groei.

Wanneer een orgaan aan één kant exponentieel groeit, komt de exponentiële curve niet enkel op papier te voorschijn, maar ook in de uiterlijke gestalte van het orgaan zelf. Dit is het geval bij de slagtanden van de olifant en van de uitgestorven mammoeth (tanden van 4 à 5 meter), bij wie de exponentiële groei zich concentreerde aan de onderzijde van de tand. De bek van de papegaai wordt door verhoogde exponentiële groei aan de bovenkant naar beneden gekromd. De spiraal van de slakkenhuizen ontstaat door maximale exponentiële groei aan de buitenomtrek. De strepen op de Nautilus-schaal zijn dubbel-gebogen; dit wijst op sterke exponentiële groei aan de zijkanten en iets gereduceerde exponentiële groei aan de buitenomtrek.

Ook bij planten wordt de exponentiële groei soms zichtbaar; zo b.v. in de dennekegel, die zijn zaadchubben in spirale rijen rangschikt en bij de zonnebloem, die zijn vruchten in spiralen inplant op de bloembodem. Idem bij de bladinplanting op de stam van de ananasvrucht.

Voor de leerling is deze toelichting in eerste instantie wel voldoende, denk ik. Maar voor mij blijven er nog wel enige vragen over, zoals:

- Hoe komt het dat bij de getoonde voorbeelden sprake is van exponentiële groei?
- Waarom levert deze exponentiële groei logaritmische spiralen op?

Mij intrigeert het of er bij deze vragen wiskundige benaderingen mogelijk zijn, die, in meerdere of mindere mate, antwoord geven, of op zijn minst verhelderend werken.

Beide vragen bleven eigenlijk zo'n beetje liggen, tot ik een oud nummer van 'Pythagoras' (april 1975) tegenkwam, dat helemaal aan spiralen was gewijd.

Daarin trof ik het volgende aan:

Fig. 10 en 11 zijn microfoto's van kleine schaaldieren (foraminiferen). Fig. 12 is een tekening uit het boek waarin Ernst Haeckel talloze fraaigevormde micro-organismen afbeeldde (Kunstformen der Natur).

Wanneer bij een eenkamerig jong exemplaar een deel van het groeiende protoplasma uit de schaalmond naar buiten treedt, dan bouwt het dadelijk een nieuwe en grotere kamer aan de bestaande vast. Al naar gelang de ligging van de opening en de kromming van de schaalwand, ontstaan de meest uiteenlopende erfelijk vastgelegde en vaak zeer gecompliceerde vormen van de schalen. Ons interesseren hier alleen de spiraalvormige.

Anomalina Polymorphina
(microfoto)



Fig. 10.

Truncatulina uvigerina
(microfoto)



Fig. 11.

Elke nieuwe kamer is groter dan de voorafgaande: het groeiproces is een vermenigvuldigingsproces. De aangroeiing is evenredig met de hoeveelheid reeds aanwezig protoplasma. De grootte der opeenvolgende kamers vormt een meetkundige rij.

Fig. 12.



afb. 4

De eerste vraag was hiermee wel opgelost: het gaat om kamers, met protoplasma erin dat exponentieel vermeerderd (omdat het celdeling betreft) en dan naar buiten treedt.

Ten aanzien van de tweede vraag was ik nog niet geheel tevredengesteld. *Als elke volgende kamer uit de vorige ontstaat, waarbij verkleving der kamers optreedt en het volume steeds met dezelfde factor toeneemt, ontstaat dan een logaritmische spiraal?*

Toen ik me deze vraag had gesteld, begon ik pas echt nieuwsgierig te worden!

Een wiskundig model voor groeispiralen

De kamers (of lobben) mogen dan 3-dimensionaal zijn, ik wil in eerste instantie weten of het mogelijk is een 2-dimensionaal wiskundig model op te zetten en te kijken of er een logaritmische spiraal uitrolt. Ik ga dus eigenlijk met een doorsnede aan het werk.

Als uitgangspunt nemen we de vorming van kamers: *door uitreding van protoplasma ontstaat uit elke kamer een nieuwe kamer, verkleefd aan de vorige.*

Stel er is aanvankelijk één kamer. Laten we zeggen dat dit onderstaande vierhoek is (we werken 2-dimensionaal en op de vierhoek kom ik vanwege de plaatjes van o.a. de nautiluschelp):



fig. 5

Aan deze kamer wordt een nieuwe (en grotere) kamer vastgebouwd. Het vastbouwen gebeurt natuurlijk netjes door de natuur, dus ik neem maar aan dat verkleving optreedt door het *samenvallen van twee zijden*. De nieuwe kamer is ook groter, maar zal, lijkt mij, wel dezelfde vorm hebben als de eerste kamer. Ik neem dus aan dat de nieuwe kamer *gelijkvormig* met de vorige is.

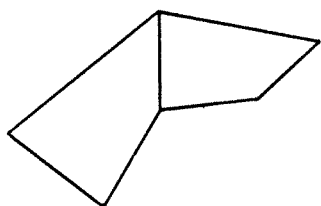


fig. 6

Enzovoort.

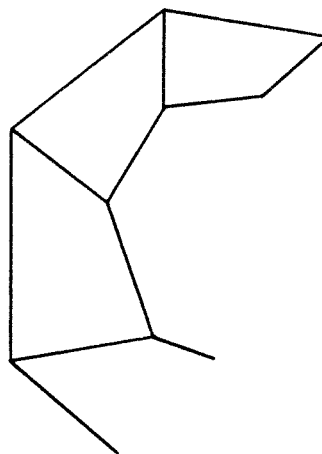


fig. 7

We gaan nu de onderlinge gelijkvormigheid der kamers nader bestuderen.

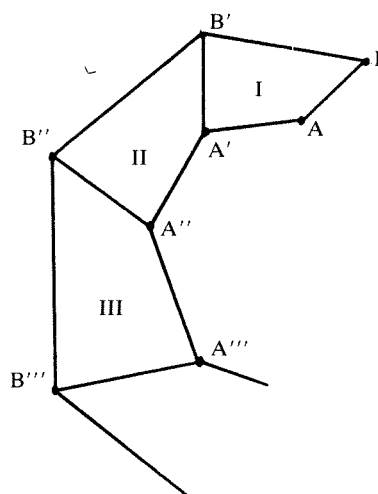


fig. 8

Kamer I is gelijkvormig met kamer II, kamer II met kamer III, enz. Er is dus een gelijkvormigheidsafbeelding T die I in II overvoert. Omdat de oriëntatie bewaard blijft, moet T een *draaistrekking* zijn volgens de theorie der gelijkvormigheidsafbeeldingen. Net zo is er een draaistrekking T' die II in III overvoert. Omdat T en T' op twee punten hetzelfde effect hebben, nl. op de punten A' en B' , volgt: $T = T'$.

Conclusie:

We hebben gevonden dat er een draaistrekking T is met $I \xrightarrow{T} II \xrightarrow{T} III \xrightarrow{T} \dots$

Deze draaistrekking T heeft een centrum O , een draaihoek α en een vermenigvuldigingsfactor k . Hoek α is de hoek tussen AB en $A'B'$, $k = \frac{A'B'}{AB}$. Punt O is door middel van een constructie te bepalen, maar deze constructie hoeven we niet uit te voeren.

N.B.

Dat er een constante factor in de grootte van de kamers zit, volgde al uit het exponentieel zijn van de groei, maar het is leuk om te zien dat de verkleving en de gelijkvormigheid van opeenvolgende kamers dit samen ook afdwingen!

Het is nu gemakkelijk in te zien dat de punten A, A', A'', A''',..... een logaritmische spiraal volgen. Daartoe brengen we als volgt een coördinatenstelsel aan:

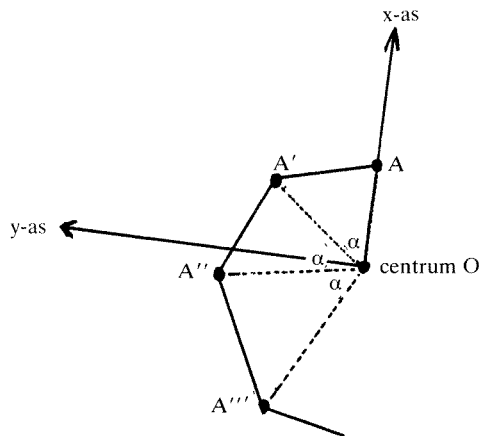


fig. 9

Er geldt: $OA' = k \cdot OA$
 $OA'' = k \cdot OA' = k^2 \cdot OA$
 $OA''' = k \cdot OA'' = k^3 \cdot OA$

enz.

Voor de punten A, A', A'', A''',..... krijgen we dan als poolcoördinaten:

φ	r
O	OA
α	$k \cdot OA$
2α	$k^2 \cdot OA$
3α	$k^3 \cdot OA$

Algemeen:

$$r(n\alpha) = k^n \cdot OA, \text{ met } n \in \mathbb{Z}^+ \quad \dots\dots\dots(1)$$

De punten A, A', A'', A''',..... liggen dus op de kromme met poolvergelijking:

$$r(\varphi) = k^{\frac{\varphi}{\alpha}} \cdot OA$$

en dit is inderdaad een *logaritmische spiraal*.

De kous is hiermee echter niet af! Want wat gebeurt er na één rondgang? Hier zie je het resultaat na één rondgang:
het past niet!

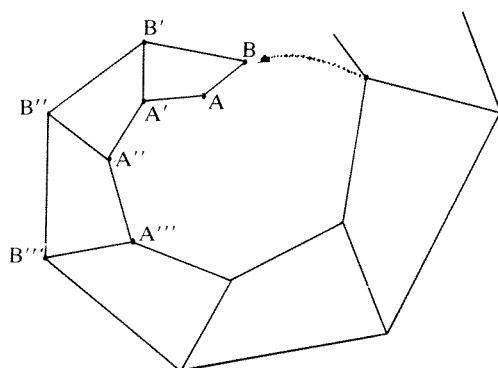


fig. 10

De windingen moeten *aaneensluiten* (zie bijv. ammoniet en nautiluschelp) en we zien hier dat dit niet op hoeft te treden, als we met een willekeurige vierhoek starten. Wil het passen, dan moeten we in de puntenrij A, A', A'', A''',..... vroeg of laat punt B tegenkomen. Het volgende punt in de rij is dan automatisch punt B'.

Wiskundig betekent dit het volgende:

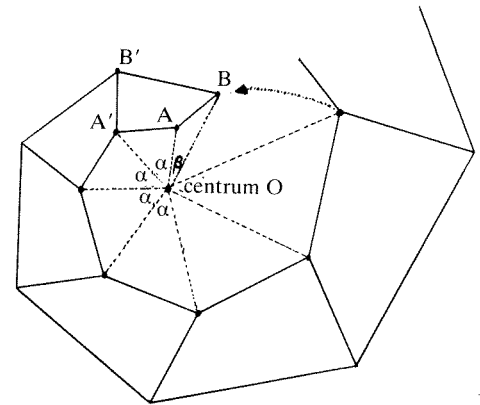


fig. 11

Er moet een positief geheel getal n zijn zodanig dat $n\alpha + \beta = 2\pi$ en $k^n \cdot OA = OB$.

..... (2)

Het 2-dimensionale model levert dus inderdaad een logaritmische spiraal op, mits de beginvierhoek aan zekere voorwaarden voldoet!

We vatten de zaak nog even samen.

Start: vierhoekige kamer.

Hypothesen: volgende kamer vast aan en gelijkvormig met de vorige.

Gevolg: als de beginvierhoek aan voorwaarde (2) voldoet, ontstaat een aaneengesloten groeispiraal, d.w.z. een logaritmische spiraal waarop alle hoekpunten liggen, met vergelijking (1).

Het construeren van groeispiralen

Hoe kunnen we nu van deze aaneengesloten groeispiralen construeren? Dan zouden we dus moeten starten met een vierhoek die aan voorwaarde (2) voldoet. Ik weet echter niet direct wat deze voorwaarde concreet inhoudt voor de beginvierhoek. Voor geïnteresseerden is dit wellicht nog een leuke puzzel.

Veel handiger is de volgende *methode*:

Kies centrum O, beginpunt A, draaihoek α en factor k.

Teken met behulp van gradenboog, liniaal en zakrekenmachine zoveel mogelijk opeenvolgende punten van de logaritmische spiraal met vergelijking (1).

De kamers kunnen daarna direct worden getekend.

Hier volgt een uitgewerkt *voorbeeld*.

We kiezen $OA = 1 \text{ cm}$, $\alpha = 42^\circ$ en $k = 1,1$.

We vinden dan m.b.v. een zakrekenmachine, op 1 mm nauwkeurig, $OA' \approx 1,1$; $OA'' \approx 1,2$; $OA''' \approx 1,3$; enz.

Na 8 slagen draaien hebben we bijna één winding. Als we besluiten hier punt B te plaatsen (dit hoeft niet beslist), dan liggen de kamers verder vast en krijgen we deze groeispiraal:

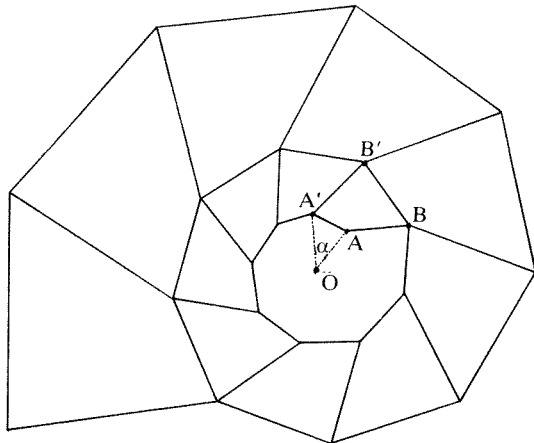


fig. 12

Tussen de figuren 12 t/m 14 is nog wel een verschil op te merken. In fig. 12 en 13 zien we dat de tussenschotjes (septa genaamd bij schelpdieren) armen vormen die naar achteren gebogen zijn. In fig. 14 daarentegen zien we naar voren gebogen armen.

N.B.

In het laatste geval krijgen we een kleine wijziging in voorwaarde (2):

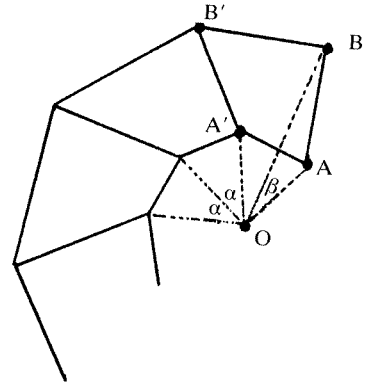


fig. 15

We kunnen ook besluiten punt B eerder of later te plaatsen. Deze groeispiraal ontstaat als we punt B een slag eerder, dus na 7 slagen plaatsen:

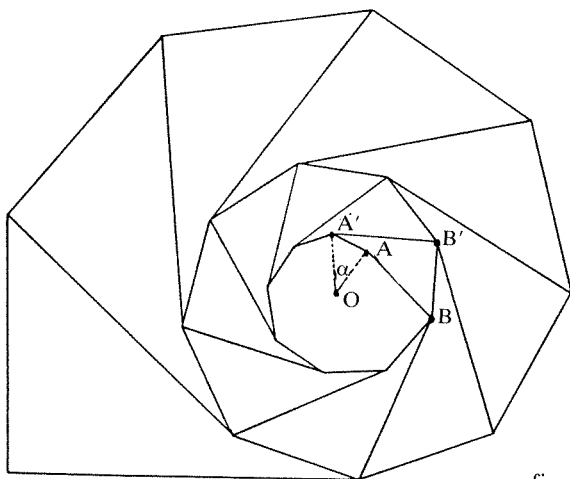


fig. 13

er moet nu gelden:

$$\boxed{n\alpha - \beta = 2\pi \text{ voor zekere } n \in \mathbb{Z}^+} \dots\dots\dots (2^a)$$

Aan de hand van fig. 12 t/m 14 hebben we kunnen zien dat we, na het kiezen van OA, α en k , ook n nog moeten kiezen en dat daarvoor meerdere waarden in aanmerking komen.

We geven nog een tweede voorbeeld van het construeren van een groeispiraal:

$OA = 0,5 \text{ cm}$, $\alpha = 20^\circ$ en $k = 1,05$

En deze, als we punt B na 9 slagen plaatsen:

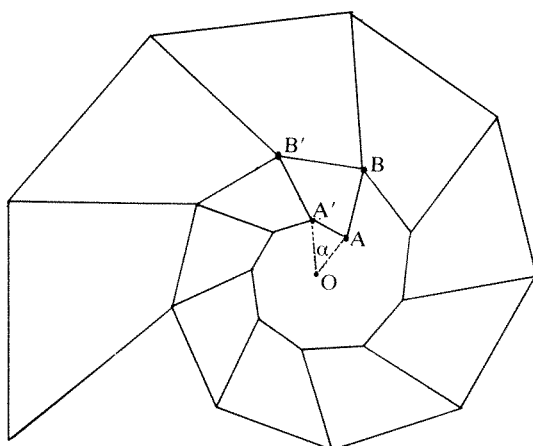


fig. 14

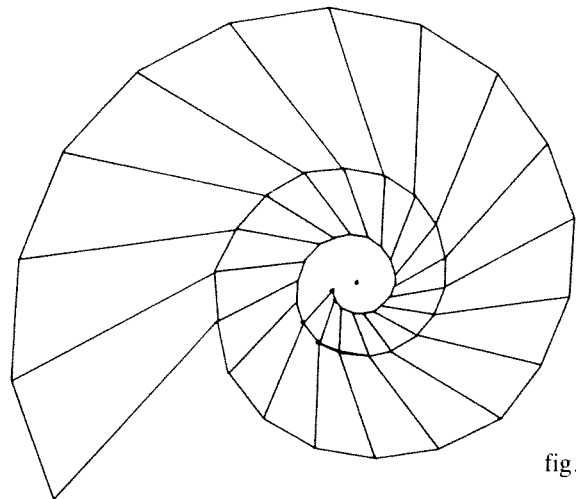


fig. 16

We hebben in fig. 16 $n = 19$ gekozen, maar we hadden ook $n = 16, 17, 18$ of 20 kunnen kiezen.

Het zal duidelijk zijn dat we op deze manier onbeperkt veel groeispiralen kunnen construeren. Het is echter wel monnikenwerk en, willen we meerdere windingen tekenen, dan moeten we zeer klein beginnen. Dit laatste is niet zo eenvoudig met de hand uit te voeren. Een manier om ook de kern van een groeispiraal zo

nauwkeurig mogelijk uitgetekend te krijgen, is de volgende:
gebruik een fotokopiëerapparaat en ga tijdens het construeren een of meer keren over op een verkleining.
Hier volgt een *resultaat* van deze werkwijze:

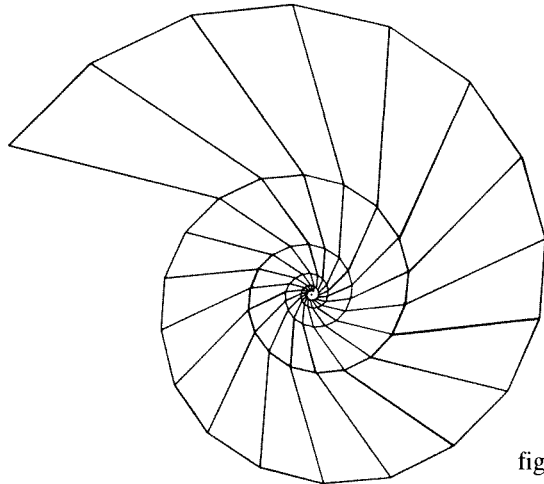


fig. 17

Al met al blijft de hier gevolgde tekenmethode voor groeispiralen vrij bewerkelijk. Het loont dan ook zeer de moeite om dit soort tekeningen door een microcomputer uit te laten voeren.
M.b.v. een SHARP MZ-700 krijgen we dit soort *resultaten*:

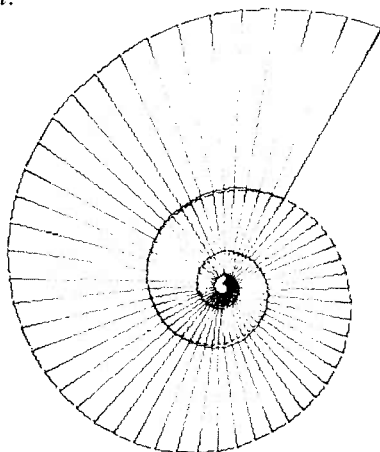


fig. 18

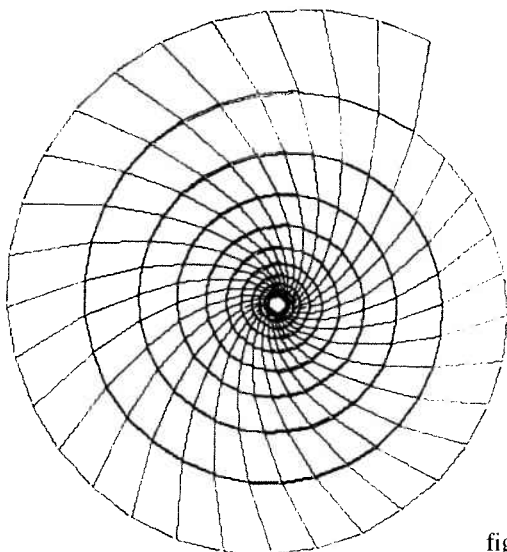


fig. 19

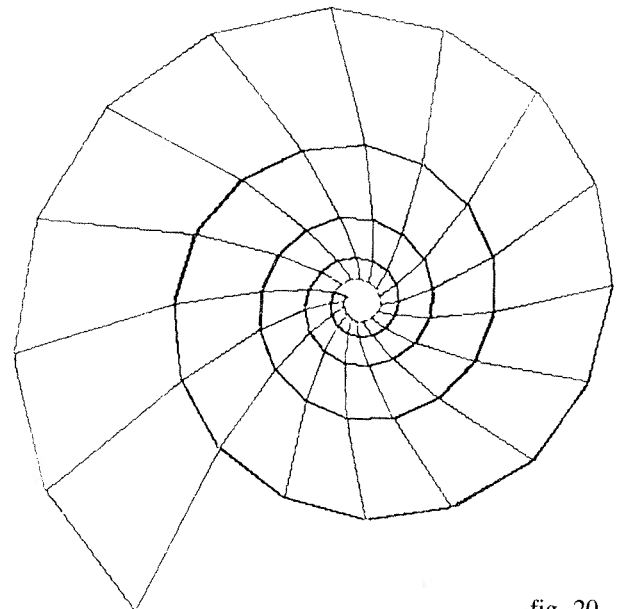


fig. 20

Het bijbehorende programma is zeer eenvoudig, zoals bijgaande listing laat zien:

```

10 PRINT"@"
20 INPUT"STARTWAARDE HOEK:H=?";H
30 PRINT
40 INPUT"STAPGROOTTE HOEK:DH=?";DH
50 PRINT
60 INPUT"STARTWAARDE VAN R=?";R
70 PRINT
80 INPUT"FACTOR K=?";K
90 PRINT
100 INPUT"VOORLOOP DN=?";DN
110 PRINT/P H,DH,R,K, DN
120 PRINT
130 N=DN+INT(360/DH)
140 H1=H+N*DH:R1=(K↑N)*R
150 H=PAI(H/180):DH=PAI(DH/180)
160 H1=PAI(H1/180)
170 X=R*COS(H):Y=R*SIN(H)
180 X1=R1*COS(H1):Y1=R1*SIN(H1)
190 MODE GR
200 MOVE 240,-240:HSET
210 P=X:Q=Y:P1=X1:Q1=Y1
220 X=R*COS(H):Y=R*SIN(H)
230 X1=R1*COS(H1):Y1=R1*SIN(H1)
240 MOVE X,Y
250 LINE X,Y,P,Q,P1,Q1,X1,Y1
260 H=H+DH:R=K*R:H1=H1+DH:R1=K*R1
270 GOTO 210

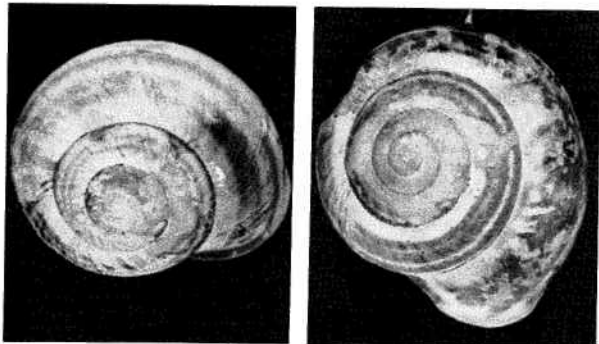
```

Verklaringen op basis van dit model

Op grond van het wiskundige model kan ik concluderen dat kamergroei, onder enige plausibele aannamen, inderdaad tot logaritmische spiralen leidt.

Het model levert ook op dat het aantal kamers in elke winding hetzelfde is; ze liggen niet alleen netjes achter elkaar, maar ook naast elkaar. Bij de ammonieten en nautili zien we dit bevestigd. In fig. 3 zal dit wel inhouden dat het aantal stippen per ronding constant is.

Verder hebben we in het wiskundige model gezien dat de septa armen vormen, die alle naar voren of alle naar achteren buigen. Beide varianten blijken voor te komen in de natuur! Bij ammonieten (reeds lang uitgestorven, maar volop te vinden in fossiele vorm) en bij nautili (nog voorkomend in de Stille Oceaan) zien we naar voren gebogen armen, bij nautili zelfs in zeer sterke mate. Slakkehuisjes zoals we die veelvuldig in de tuin aantreffen, laten duidelijk naar achteren gebogen armen zien (zie afb. 21).



afb. 21

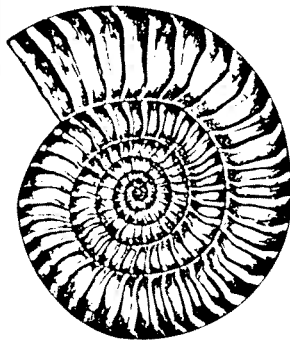
Slotconclusie

Terugblikkend zou ik de volgende opmerkingen willen maken.

- a. Ik heb het idee dat ik, met behulp van dit wiskundige model, meer helderheid heb verkregen met betrekking tot groeispiralen. Kamergroei leidt, onder bepaalde condities, noodzakelijkerwijs tot logaritmische spiralen. Deze groeispiralen vertonen een aantal kenmerken die op grond van het wiskundige model voorspelbaar zijn.
- b. Dit wiskundige model bestrijkt alleen kamergroei, waarbij de as der windingen in één vlak blijft (platte groeispiralen). Bij ammonieten bijv. is dit strikt het geval. In werkelijkheid blijkt bij veel spiraalgroei de as niet in een vlak te blijven. We tonen hier enige voorbeelden van groeispiralen waarvan de platheid steeds verder afneemt:



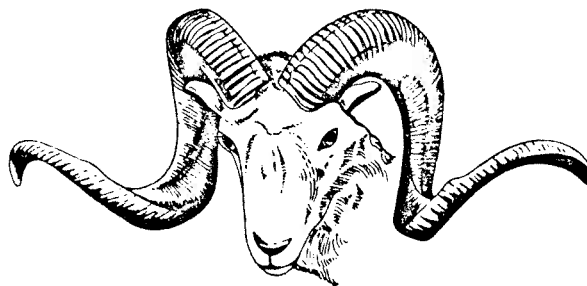
afb. 23: slakkehuis



afb. 22: ammoniet



afb. 24: wulk



afb. 25: Schaap (ovis poli)

- c. Dit wiskundige model voor groeispiralen levert mogelijkheden voor *lesmateriaal* op, zoals:
 - werken met een wiskundig model;
 - binnen een context bezig zijn met gelijkvormigheidsafbeeldingen;
 - groeispiralen construeren met meetkundige hulpmiddelen als gradenboog, passer en liniaal; hierbij zijn meerdere strategieën mogelijk en kan elementaire meetkundige kennis functioneren;
 - groeispiralen construeren met behulp van een microcomputer; het schrijven van een programma hoort hierbij tot de mogelijkheden; dit vergt o.a. het kunnen omzetten van poolcoördinaten in rechthoekige coördinaten.
- d. Er blijven ook interessante wiskundige vragen op *lerarenniveau* over, zoals
 - wat gebeurt er als we in het wiskundige model voor groeispiralen niet met een vierhoekige kamer beginnen, maar met bijv. een driehoekige of ronde kamer?
 - is voorwaarde (2) in directere eisen aan vierhoek $A'ABB'$ om te zetten?
 - de septa vormen armen; wat is er van de wiskundige vorm van deze armen te zeggen, op grond van het model?

- e. Via dit wiskundige model zijn we op een leuk soort *vlakvullingen* gestuit; de mogelijkheden om hierbij decoraties aan te brengen zijn legio. Je kunt bijv., bij gekozen OA, α en k , n heel 'wild' kiezen of meerdere waarden voor n tegelijk nemen.
- f. Het is best mogelijk dat in de literatuur vrij veel te vinden is over wiskundige achtergronden bij groeispiralen. Ik kon het echter niet laten om zelf aan de slag te gaan. Als je erg gegrepen wordt door een bepaalde probleemstelling, waarbij een wiskundige

structuur aanwezig lijkt te zijn, dan is het leuk om zelf aan het prutsen te gaan.

- g. De context heeft op mij zo'n zuigende werking gehad dat ik:
- meerdere kennissen enthousiast heb gemaakt over groeispiralen, met name ammonieten;
 - op een voorlichtingsbijeenkomst voor adspirantstudenten wiskunde en hun ouders voortdurend met een slakkehuisje stond te zwaaien;
 - op een fossielententoonstelling twee ammonieten heb gekocht, die hieronder zijn afgebeeld:



afd. 26: kleine ammoniet
diameter: 8 cm
diameter uiteinde: 2½ cm



afb. 27: grote ammoniet
diameter: 28 cm
diameter uiteinde: 8 cm
gewicht: 5 kg

Met dank aan:

Klaas van Weerden, voor het construeren van groeispiralen m.b.v. een microcomputer; Klaas van Langen, voor het maken van foto's (afb. 21, 24, 26 en 27); Ineke Niemeijer, voor het lenen van een fossiele wulk (afb. 24).

VrouWiskundig.

Onder deze titel hebben leden van de werkgroep Vrouwen en Wiskunde een discussieboek over de positie van meisjes in het wiskunde-onderwijs geschreven. Dit boek is bestemd voor allen die bij het wiskunde-onderwijs betrokken zijn en voor overige belangstellenden.

Ideeën van de werkgroep over het beeld van wiskunde, lesmaterialen, werkvormen, volwassenenonderwijs, het kiezen van wiskunde, informatika en veel vragen voor onderzoek zijn in dit boek beschreven.

Vanaf september 1984 is het boek, uitsluitend schriftelijk, te bestellen bij:

Vakgroep OW&OC
Tiberdreef 4
3561 GG Utrecht.

De prijs bedraagt f 12,50 (exclusief verzendkosten)
Voor de betaling zal met het boek een acceptgirokaart worden meegezonden.

de schrijfsters:
Marja Meeder
Francis Meester
mmv.:
Rijkje Dekker
Coby Geijssel
Thea de Poel.

Het adres van de werkgroep luidt:
Werkgroep Vrouwen en Wiskunde
Postbus 11563
1001 GN Amsterdam