Ervaringen met A-wiskunde in 4 VWO

A. van Streun
R.U. Groningen

Samenvatting

In de cursus 1984/'85 zullen honderden wiskundedocenten voor het eerst hun leerlingen van 4 VWO leren wiskunde toe te passen. Enige ervaringen uit het project "Heuristisch wiskunde-onderwijs" worden in dit artikel voor die wiskundedocenten op een rijtje gezet. Hoe kunnen docenten hun "A-leerlingen" stimuleren en motiveren na de teleurstellingen uit de onderbouw? Welke vaardigheden moeten voor het aanpakken en oplossen van toegepaste problemen worden ontwikkeld?

Summary

Because of a change in the fourth-form mathematics course of the secondary school many teachers of mathematics have to teach the useful applications of mathematics to real problems. What are the experiences in the research-project "Heuristic Education of Mathematics?" How can the teacher stimulate and motivate the non-specialist students? Which applied problem-solving abilities should to be developed?

Oriëntatie

In de cursus 1984/'85 zal het wiskunde-onderwijs in 4 VWO wat worden bijgestuurd in de richting van meer toegepaste of meer realistische of meer contextrijke wiskunde. Dit met het oog op het vak wiskunde-A in 5 en 6 VWO. Sommige wiskundesecties hebben besloten om het vierde leerjaar te gaan vullen met HEWET-IOWO-pakketjes, andere wiskundesecties houden het bij hun gewone leerboek, eventueel aangevuld met een pakketje. Auteursteams en uitgevers passen methoden aan door toevoeging van extra "toegepaste" sommetjes of door eigen pakketjes. Een enkele uitgever heeft het gewaagd om al in een vroeg stadium, varend op het kompas van het HEWET-team, een geheel nieuw leerboek voor te bereiden en uit te brengen.
De realiteit in het overgrote deel van de scholen is, dat in de komende cursus de leerlingen in 4 VWO voor het eerst met het leren toepassen van wiskunde zullen worden geconfronteerd. In de bestaande "grote" methoden voor de onderbouw t/m klas 3 VWO komt dat aspect van het wiskunde-onderwijs (nog) niet uit de verf. In dit artikel wordt iets verteld van de ervaringen uit het onderzoeksproject "Heuristisch wiskunde-onderwijs" in 4 VWO. Twee jaar lang zijn de leerprocessen van leerlingen, die voor het eerst met meer toepassingsgerichte wiskunde in aanraking kwamen, geobserveerd. De didactiek en het lesmateriaal ("Getal en Ruimte", HEWET-pakketjes en project-materiaal) werden systematisch gevarieerd. Hoewel het onderwijsexperiment in 1984/'85 is gepland, zijn de ervaringen tot nu toe interessant genoeg om door te geven aan docenten die de volgende cursus in 4 VWO gaan lesgeven.
Eerst wil ik iets opmerken over het "toepassen" van wiskunde, daarna volgt een "typering" van het werk van enkele leerlingen, afgesloten met enkele conclusies t.a.v. de didactiek van het nagestreefde wiskunde-onderwijs.

Het "toepassen" van wiskunde

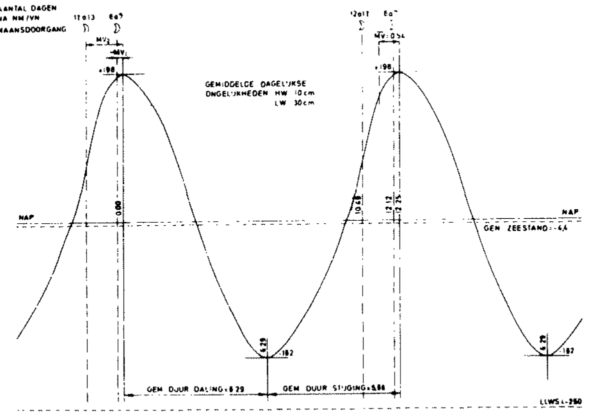
Het leerplan in 4 VWO geeft een centrale plaats aan het onderwerp functies, inclusief het differentiëren. Mijn commentaar spitst zich daar op toe, omdat de problematiek bij het ontsluiten van nieuwe denkvelden, zoals de kansrekening en de ruimtemeetkunde, duidelijk anders ligt. Te vergelijken met een nieuw terrein als "Matrices" in 5 VWO. "Functies" in 4 VWO bouwt voort op de beheersing van variabelen, eerste- en tweedegraadsvergelijkingen, eerste- en tweedegraadsfuncties en de grafieken van die functies. De opgaven in de onderbouw op dit gebied zijn vrijwel allemaal in een *analytische representatie* gegeven, dat wil zeggen in de vorm van een vergelijking of een functievoorschrift. Er wordt dan gevraagd naar een *numeriek* antwoord (een oplossing van de vergelijking, een maximale waarde e.d.) of een *grafische representatie*. Bij het toepassen van wiskunde hebben zowel de gegevens als het gevraagde veelal een ander karakter. De beschrijving van een *situatie*, die meer of minder realistisch en voorstelbaar is voor de naar een oplossing zoekende gebruiker, speelt een belang-

rijke rol.
In mijn dagelijkse werkomgeving (het Mathematisch Instituut in Groningen) zijn enkele tientallen wiskundigen bezig met het toepassen van wiskunde. De beschrijving van *een realistische situatie* door een "klant" kan betrekking hebben op wervelingen rond een vliegtuigvleugel, op de optimale vorm van het zeil van een zeilboot, op de besturing van een kunstmaan, op het systeem van een c.v.-installatie, op de experimentele opzet van een onderwijskundig experiment, enz. enz.
De stap van de *situatie* naar een *wiskundig model*, waar analytische, statistische of numerieke methoden op los kunnen worden gelaten, blijkt altijd weer veel denkwerk te vragen. Een stap, die leidt tot verschraling van de werkelijkheid. Een stap, die nodig is om de situatie binnen het bereik van wiskundige methoden te brengen. De terugkoppeling, als laatste stap, van het model naar de situatie geeft uitsluitsel over de vraag of het model nog iets zinnigs kan zeggen over de werkelijkheid.
Wat is er van deze stap, van een *situatie* naar een *wiskundig model*, terug te vinden in de leerboeken en pakketjes voor 4 VWO? Wat wordt er onder "toepassingen" verstaan?

Een analytisch beschreven situatie interpreteren

In natuurkunde- of economieleerboeken kom je ze vaak tegen. Een natuurkundige of economische situatie, die door een formule of een functievoorschrift wordt beschreven. De leerling moet dan iets uitrekenen en/of interpreteren.
Een voorbeeld uit "Sinus":

► 53. *Het hoog- en laagwater langs de Nederlandse kust heeft wèl dezelfde periodiciteit (12,4 uur) maar* niet *dezelfde hoog- en laagwaterstanden. Daar zijn nogal wat verschillen in. Zo kan een periode van getijdebeweging in Den Helder benaderd worden door:*
$d(t) = 0{,}75 \sin \frac{1}{2}t$
maar in Vlissingen heb je:
$v(t) = 2 \sin \frac{1}{2}t.$
Teken beide grafieken in één plaatje.
Wat zijn de nulpunten; de maxima en minima?
Hoe lang per periode staat het water in Den Helder hoger dan +0,5 m N.A.P.? En in Vlissingen?



Hier de "echte" gemiddelde getijkromme van Vlissingen.
Welke verschillen zie je met de grafiek van opgave ► *53?*

De leerling moet uit het verhaaltje het gegeven analytische model lichten en met gebruikmaking van geleerde technieken de grafieken van de twee functies tekenen, de bijzondere punten berekenen en een ongelijkheid oplossen. Om op het idee van die ongelijkheid te komen is een interpretatie van de situatie in termen van de grafiek nodig. De laatste vraag ("Welke verschillen.....") koppelt vanuit het model terug naar de werkelijkheid.
De "toepassingen" van "Getal en Ruimte" (deel 4V, 4e druk), van "Sigma" (eerste herziene druk) en van "Gamma" (Functies 1, voor HAVO 4) zijn grotendeels van dit type. Het nieuwe boek van "Moderne Wiskunde" voor 4 VWO is op dit moment nog niet beschikbaar. Ook in de HEWET-IOWO-pakketjes komt dit type opgave, waarin het wiskundig model al is aangegeven, veel voor. Ongetwijfeld een nuttige vooroefening op het echte gebruik van wiskunde in toegepaste situaties. De fixatie van leerlingen aan de letter x *kan* dan tegelijk worden bestreden.
Onze ervaring in 4 VWO is dat door een systematisch variëren van de situaties en de notaties de leerlingen na een tijdrovende gewenningsperiode dit type opgaven wel aankunnen. Mits de wiskundige begrippen en technieken, waar de opgave een beroep op doet, voldoende worden beheerst.

Van een situatie naar een analytische representatie

De essentiële stap van de beschrijving *van* een *situatie naar* een *analytische representatie* van die situatie blijkt veel moeilijkheden op te leveren. De ervaring met ingeklede vergelijkingen doet dat al vermoeden. Die worden door auteurs en docenten niet alleen verwaarloosd omdat ze vaak wat gekunsteld aandoen, maar ook omdat een flink aantal leerlingen daar geen weg mee weten. Neem uit 4 VWO de volgende proefwerkopgave:

1. *De bioscoopeigenaar in Adorp ziet de bezoekersaantallen de laatste jaren dalen. Op het ogenblik komen er bij een toegangsprijs van f 12,– ongeveer 170 bezoekers. Uit gegevens van concurrerende bioscopen meent hij te kunnen opmaken dat bij een lagere toegangsprijs het aantal bezoekers zal toenemen.*
Neem aan dat bij iedere gulden prijsverlaging het bezoekersaantal met 30 zal toenemen.
   a. *Onderzoek of de inkomsten toenemen als de prijs één gulden lager wordt.*
   b. *Stel dat de prijs met x gulden daalt. Druk het bezoekersaantal uit in x.*
   c. *Schrijf ook de opbrengst R (de totale inkomsten) als functie van x.*
   d. *Bereken de prijs, waarbij de opbrengst R maximaal is.*

De tweede vraag stelt niet weinig leerlingen al voor grote problemen. Speelt een onvoldoende beheersing van het begrip variabele uit de onderbouw hier een rol? Leerlingen, die met tabellen de situatie gaan aanpakken, kunnen toch de stap naar de functievoorschriften niet altijd maken.

In de analyse van empirisch verzamelde data is de situatie niet alleen in woorden, maar ook in tabellen vastgelegd. Welke functie/formule beschrijft het verband zo goed mogelijk?

De tussenstap via een grafiek wil nog wel eens helpen. Een voorbeeld uit "Functies en grafieken":

► 42. *In Europa zijn we gewend de temperatuur in "graden Celsius" uit te drukken. In de V.S. gebruikt men nog vaak "graden Fahrenheit". Hieronder zie je een tabel die het verband aangeeft.*

Celsius	−10	0	10	20	30
Fahrenheit	14	32	50	68	86

a. Bij een temperatuur van a°C *hoort een temperatuur van* b°F. *Schrijf* b *als functie van* a.
b. Beschrijf ook de inverse functie.
c. Bij welke temperatuur maakt het niet uit of je die in graden Celcius of Fahrenheit opgeeft?

Het doorbladeren van boeken/pakketjes geeft een karige oogst van dit type opgave. Een tabel, een grafiek of een verhaal vertalen naar een eerstegraadsfunctie, een tweedegraadsfunctie, een periodieke functie, een exponentiële of logaritmische functie. Voor het gebruik van functies in werkelijke toepassingen toch een centrale activiteit. Een activiteit, die (evenals het opstellen van een differentiaalvergelijking bij een gegeven situatie) een beroep doet op flexibel opereren met wiskundige kennis. Is dat voor veel van onze leerlingen in de bovenbouw van HAVO-VWO wel haalbaar? Kunnen alle leerlingen dat leren? Een aantal docenten uit de experimenteerscholen van het HEWET-project beantwoorden die vraag nu al ontkennend. Maar wat blijft er dan van het toepassen van dit brok wiskunde (de analyse) over?

Sonja, Mieke en Herman

Laten we de ontwikkeling van drie leerlingen met een A-pakket 4 VWO eens volgen. Het zijn Sonja, Mieke en Herman, die alle drie met een onvoldoende voor wiskunde zijn overgegaan naar 4 VWO. In klas 3 hebben zij in het kader van de keuzebegeleiding evenals hun klasgenoten een vragenlijst van het CITO ingevuld over hun houding t.o.v. het wiskunde-onderwijs. Mieke scoorde extreem negatief op de schaal "Plezier in wiskunde(lessen)". Ook Sonja scoorde negatief vergeleken met de grote middenmoot. Het was haar minst geliefde vak. Alle drie benadrukten de moeilijkheid van en de angst voor het vak sterker dan de grote groep van leerlingen. Alleen Herman vond het vak redelijk relevant, de beide meisjes zagen dat anders.
Te zamen zijn zij redelijk representatief voor de leerlingen, die met een A-pakket in 4 VWO het vak wiskunde volgen. Uit de 4 projectklassen in de cursus 1983/'84 zijn zó nog wel tien andere drietallen te lichten, waaraan een soortgelijke ontwikkeling valt op te merken. De *keuze* uit hun schriftelijk werk en uit hun reacties concentreert zich op de "toepassingen".

De benzine- en de dieselauto

Het eerste proefwerk (23-11-1983) begint met:

1. Iemand heeft de keuze uit twee auto's:
Auto B heeft een benzinemotor; de vaste kosten zijn f 4000,– per jaar (belasting, verzekering, e.d.), de overige kosten zijn f 0,40 per kilometer.
Auto D heeft een dieselmotor; vaste kosten f 5000,– per jaar en overige kosten f 0,20 per kilometer.
a. Bereken het aantal kilometers dat in een jaar gereden wordt als de totale kosten van beide auto's aan elkaar gelijk zijn.
b. Teken in één figuur de grafieken van de totale kosten – functies b(x) en d(x) van de twee auto's, x in kilometers en de functiewaarden in guldens.
c. Bij welk(e) aantal(len) kilometers is auto D voordeliger dan auto B?

Herman (cijfer 7,5) blijft redeneren *binnen* de geschetste situatie. Het verschil in vaste kosten is *f* 1000,–. kilometer verdient de diesel *f* 0,20 terug. Na 5000 kilometer zijn de kosten dus gelijk. Bij meer dan 5000 kilometer is de diesel goedkoper. Hij gebruikt de grafiek niet, maar produceert die na een mislukte poging achteraf.

Sonja (cijfer 5,2) schrijft de vergelijkingen $y = 0{,}40n + 4000$ en $y = 0{,}20n + 5000$ op. Vervolgens laat ze de dieselauto stil staan en berekent dat na 1000 km de benzine-auto eveneens *f* 5000,– heeft gekost. De grafieken pakt zij aan met een tabel, gedistilleerd uit de twee vergelijkingen, waarna zij het antwoord (c) uit de figuur afleest.

Mieke (cijfer 8,3) begint onmiddellijk met de vergelijking $0{,}40k + 4000 = 0{,}20k + 5000$ en lost die correct op. De grafieken lukken niet, omdat zij met 0, 1, 5 kilometer aan het rekenen slaat. Kennelijk is Mieke de situatie (het aantal verreden kilometers per jaar) uit het oog verloren. Ook (c) lukt niet.

Voorrijkosten en uurloon

De laatste opgave van dit eerste proefwerk:

4. Een service-bedrijf brengt bij reparatie voorrijkosten en uurloon in rekening. Voor een reparatie van 2 uur werd mij 152 gulden in rekening gebracht. Een collega kreeg een rekening van 113 gulden, voor een reparatie van vijf kwartier.
a. Welke voorrijkosten (een vast bedrag) en welk uurloon rekent het servicebedrijf?
b. Mijn oom kreeg van dat zelfde bedrijf na een reparatie van een half uur een rekening van 84 gulden. Hij protesteerde tegen dat bedrag. Terecht?

Het verschil in tijd (0,75 uur) komt overeen met *f* 39,–. Aldus Herman. Het uurloon is nu *f* 52,–. Enz.
Mieke schrijft op:

$$\begin{array}{ll} 2\,\text{uur} \rightarrow 152\,\text{gulden} \\ 1\tfrac{1}{4}\,\text{uur} \rightarrow 113\,\text{gulden} \end{array} \quad \frac{\triangle x}{\triangle y} = \frac{39}{0{,}75} = 52$$

Waarna ze de functie f(x) = 52x + 48 opstelt en tenslotte concludeert, dat het uurloon 52 gulden is en de voorrijkosten 48 gulden.

Sonja is aan deze laatste opgave niet toegekomen. "Volgens mij komt het, doordat ik zoveel tijd nodig heb om eindelijk tot een antwoord te komen. Ik doorzie de som niet, terwijl ik de methodes wel ken". De herkansing gaat al veel beter.

De snelheid van een raket

Het proefwerk over "Veranderingen" valt bij de "A-leerlingen" niet zo best uit. Eén opgave heeft een wat "toegepast" karakter.

Er wordt een raket gelanceerd. Voor de eerste 5 seconden is de hoogte boven de grond in meters gegeven door $h(t)=t^3$, $t \in [0,5]$.

a. Bereken de hoogte boven de grond na 5 seconden en de stijgsnelheid op dat moment.

Na 5 sec. is de brandstof op. Vanaf dat moment geldt voor de hoogte het voorschrift $h(t) = -5t^2 + 125t - 375$, $t \in [5, ?]$.

b. Bereken de waarde die t heeft in het hoogste punt. Hoe hoog is het projectiel op dat moment?

Mieke (cijfer 5) kon zich niet meer "herinneren" hoe opgave (b) moest. Zij schrijft: "Ik weet meestal niet hoe ik moet beginnen. Vooral met een repetitie niet. Achteraf denk ik bij een heleboel sommen: Oh ja, zó moest het!".

Herman (cijfer 5,5) berekent bij (a) de gemiddelde snelheid (125 : 5 = 25 m/s) en over (b) schrijft hij "Ik wist niet goed hoe te beginnen".

Sonja (cijfer 7−) lost (a) en (b) goed op, uitgezonderd een rekenfoutje ($5^3 = 15$). Zij schrijft dat zij (b) in het begin niet wist, maar later wel zag hoe het moest.

De maximale oppervlakte

Bij het eerste proefwerk over het functie-onderzoek van veeltermfuncties en toepassingen blijken grote verschillen tussen de leerlingen. Neem opgave 2:

2. *Van een rechthoek ABCD is de zijde AB=10 en de zijde AD=6. Op AB ligt het punt P, op BC ligt het punt Q, op CD ligt het punt R en op DA ligt het punt S zó dat AP=CQ=CR=AS. Hoe lang is AP als de oppervlakte van de vierhoek PQRS maximaal is? Wat is die maximale oppervlakte?*

Mieke (cijfer 5½) onderzoekt in de eerste opgave geheel conform de bekende procedure een vierdegraads functie en tekent de grafiek. In de derde opgave wordt een omgekeerde gedachtengang gevraagd (een maximum f(1) = 6 van een functie $g(x) = x^3 + ax + b$ is gegeven), waar ze geen touw aan vast kan knopen. Over de tweede opgave merkt ze op: "Direct in het begin al wist ik niet, wat ik moest doen. Ik heb die sommen nog nooit gesnapt. Een volgende keer zou ik vast nog niet weten wat ik moest doen". Haar oppervlaktefunctie doet inderdaad nogal willekeurig aan:

$O(x) = x(10 - x)(6 - x)$ wat wordt uitgewerkt tot $(10x - x^2)(6x - x^2) = 60x^2 + x^4$.

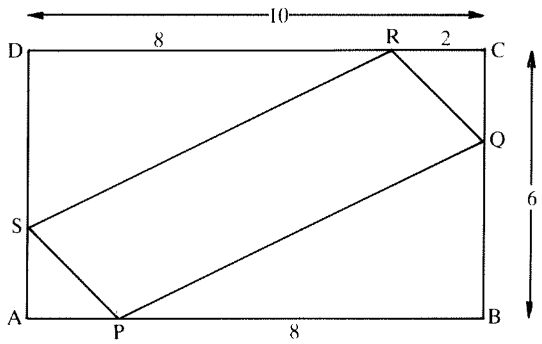
Ook Herman (cijfer 3) weet er geen weg mee. Achteraf vertelt hij: "Naar mijn mening kon je bijvoorbeeld de afstand van A naar P niet tekenen, omdat je niet wist of hij daar wel lag. Hij kon ver en dichtbij liggen. Ik heb hem daarom niet getekend". In de techniek van het functieonderzoek verdwaalde Herman in zijn rekenpartijen, terwijl ook opgave 3 alleen chaos opleverde.

Sonja (cijfer 6+) verrekende zich in som 1, terwijl som 3 haar onbekend voorkwam, omdat ze geen getallen in de functie zag. Haar reactie op som 2: "Wist ik wel. Gewoon door logisch denken, terwijl ik dat bij de andere sommen niet kan. Ik vind het hardstikke goed van mij zelf. Het was precies zo'n som als in het boek, hoewel je nu wat meer moest rekenen".

Een probleemaanpak

Te veel leerlingen, ook die met een B-pakket, hebben nog moeite met deze toepassingen. De probleemaanpak wordt nog eens doorgenomen aan de hand van een overzicht, dat de leerlingen mee naar huis krijgen.

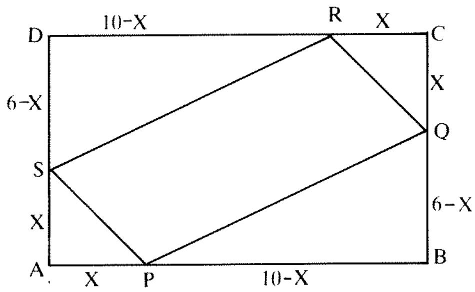
Oriënteren
Zonder *tekening* begin ik niets. Een rechthoek ABCD met AB=10 en AD=6.
Punt P op AB. Punt Q op BC. Hoe?
De lengte van AP is die van CQ. En nu punt R en dan punt S.
Nog eens goed lezen of het klopt, want als de tekening niet deugt, dan gaat de hele opgave de mist in.
Wat is die PQRS voor een figuur? Geen rechthoek...
De oppervlakte is niet met lengte keer breedte uit te rekenen.



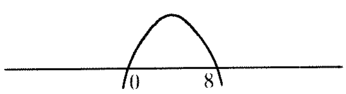
Terreinverkennen
Het zal wel weer met x en O(x) moeten, maar dat is me voorlopig nog te ingewikkeld. Eerst maar eens een *getallenvoorbeeld doorrekenen.*
B.v. AP=2, dan is PB=8 en AS=CQ=CR=2. BQ=4=SD en RD=8. Waar moet ik ook al weer naar toe? De oppervlakte van PQRS wordt gevraagd. *Even de getallen in de figuur er bij zetten. Wat weet ik nu* van de oppervlakten van de driehoekjes? Die kan ik berekenen, want het zijn halve rechthoeken. De totale oppervlakte is ook te berekenen. Dat wordt:
opp. APS=opp. CRQ=$\frac{1}{2}$.2.2=4
en opp. PBQ=opp. SRD=$\frac{1}{2}$.8.4=16.
Nu is de oppervlakte van PQRS natuurlijk gelijk aan

de oppervlakte van ABCD verminderd met de oppervlakte van die driehoekjes. Dus:
opp. PQRS=6.10−2−2−16−16=24.

Een plan maken
Het *idee voor de oplossing* bij een gegeven lengte van AP is nu wel duidelijk. Nog een getallenvoorbeeld doorrekenen? Nee, ik denk dat ik het nu wel rechtstreeks met AP=x kan proberen. Dat geeft dan een functievoorschrift voor de oppervlakte. Waarna ik het maximum kan berekenen.



Aan de slag
Neem AP=x. Even kijken naar het getallenvoorbeeld. AP=2 en PB=8, dat is vier maal zo groot. Dus PB=4x. *Klopt dat wel?* Samen zijn AP en PB 10... Dan is 5x=10 en x is altijd 2... *Hoe kwam ik ook al weer* aan die PB=8? Dat was 10−2, natuurlijk PB=10−x!
Ook de andere lengten in de figuur erbij schrijven. Wat is het plan ook al weer?
Opp. APS=$\frac{1}{2}x^2$ en opp. QCR=$\frac{1}{2}x^2$.
Samen hebben ze opp.x^2.
Opp. PBQ=$\frac{1}{2}(10-x)(6-x)$=opp. SRD,
samen $(10-x)(6-x)$.
En opp. PQRS= $60-x^2-(10-x)(6-x)=$
$60-x^2-60-10x-6x-x^2=-2x^2-16x$.
Dus $0(x)=-2x^2-16x$.
Nog even controleren, want je vergist je zo gemakkelijk met al die min-tekens. Als AP=x=2 moet er 24 uitkomen. $O(2)=-8-32=-40$. *Het klopt niet! Even narekenen...* Oh ja, met die haakjes gaat het mis.
$O(x)=60-x^2-(60-10x-6x+x^2)=$
$60-x^2-60+16x-x^2=2x^2+16x$.
Controleren geeft $O(2)=-8+32=24$, *het klopt.*
Wat is er ook al weer gevraagd? Oh ja, voor welke x is O(x) maximaal. Dat kan met het tekenschema van de afgeleide. Maar O(x) is een eenvoudige tweedegraads functie, waarvan de top van de grafiek snel kan worden berekend. Een plaatje:



$O(x)=-2x^2+16x=-2x(x-8)$. Nulpunten voor x=0 en x=8, de top ligt dan bij x=4. Zo klaar...

Terugblik
De vraag beantwoord? Nee, de maximale oppervlakte nog. Die is O(4)=32. En in het vervolg niet vergeten de verschillende stappen goed te *controleren*!

Het bioscoopbezoek

De opgave over het bioscoopbezoek (zie eerder in dit artikel) is de eerste som van het tweede proefwerk over "Toepassingen van de differentiaalrekening". Sonja (cijfer 9) gaat met nieuw zelfvertrouwen op dezelfde weg voort. Zij gebruikt het bezoekersaantal B als functie van de prijs x, door twee getallenparen (12, 170) en (11, 200) er uit te lichten. (De rico is −30 enz.).

Bij Herman (cijfer 9−) breekt het inzicht door dat je je ook bij deze opgaven kunt voorstellen, wat je doet. Hij zegt: "Als ik mij er maar wat bij kan voorstellen, dan weet ik wel wat ik moet doen". Het bioscoopbezoek gaat hij eerst te lijf met tabellen, gevolgd door de generalisatie naar functievoorschriften.
Ook Mieke (cijfer 5) maakt tabellen voor de prijs, het aantal bezoekers $N(x) = 170 + 30x$, maar de opbrengstfunctie gaat als volgt:
$R(x) = 12 - x = 170 + 30x$ wat leidt tot $158 + 31x = 0$.
Zij loopt vast en ziet geen kans met behulp van de tabel weer in het rechte spoor te komen.

De maximale inhoud

De tweede proefwerksom gaat over de maximale inhoud van een loods, als de totale lengte van de ribben bekend is. In de lessen zijn opgaven, zoals het bekende bakje – te vouwen uit een rechthoekig stuk papier – aan de orde geweest.

2. *Een loods zal worden gebouwd met een geraamte van stalen buizen. Het geraamte krijgt de vorm van een balk, waarbij het grondvlak een vierkant is. Er mag 60 meter buis besteld worden, de afzonderlijke lengten moeten daarbij worden vermeld.*
   a. *Als de ribben van het grondvlak 4 meter worden, wat worden dan de hoogte en de inhoud van de balk?*
   b. *Noem de ribben van het grondvlak x. Bepaal nu het functievoorschrift voor de inhoud I(x).*
   c. *Controleer met een getallenvoorbeeld je functievoorschrift.*
   d. *Bereken de afmetingen van het geraamte van de loods als de inhoud maximaal is. Wat is die maximale inhoud?*
   e. *Had je de afmetingen die je in d. vond al van te voren verwacht? Of had je geen idee hoe het er uit zou moeten zien?*

Mieke komt bij (b) tot $I(x) = l \times b \times h$ met $l = x$, $b = x$ en $h = \frac{1}{4}(60 - 8x)$, maar dat is het laatste wat ze opschrijft. Herman en Sonja werken de oplossingen nagenoeg feilloos uit.

Conclusies

Herman komt uit de problemen, als hij zich de bijbehorende situatie maar kan *voorstellen. Tabellen* helpen hem. In het gereken aan analytische uitdrukkingen blijft hij zich regelmatig verslikken, omdat niets hem in het goede spoor houdt. Mieke *memoriseert* uitstekend de *algoritmische technieken* en voert ze zorgvuldig uit. Bij een kleine variatie in de vraagstelling tast ze in het duister. Sonja heeft ontdekt dat

je bij toegepaste problemen een heel eind kunt komen met *je gezonde verstand* ("logisch denken"). Alle drie zullen ze in 5 en 6 VWO wel met de wiskunde-A uit de voeten kunnen. Alle drie zouden bij het vak wiskunde-1 met moeite een 4 hebben behaald.
In klas 4 VWO heb je ook de echte B-leerlingen, die wel vlot rekenen met analytische uitdrukkingen en snel de wiskundige modellen in toegepaste situaties herkennen. Bij een vak als natuurkunde profiteren zij van de extra aandacht voor toepassingen in de wiskundelessen. (Zie b.v. het meinummer van Faraday).
Hoe kun je als docent – gegeven het lesmateriaal – aan die verschillen recht doen?

Onze ervaring is dat de begrippen variabele en functie *breder* moeten worden uitgebouwd door ze te koppelen aan situaties, tabellen en grafieken. Met name de tabellen en grafieken kunnen helpen bij het *vertalen* van de situatie naar een analytisch model. Veel a.s. A-leerlingen hebben zich in de onderbouw proberen te redden door de nieuwste truc of het laatste algoritme te memoriseren en te reproduceren. Zodra zij in 4 VWO flexibel moeten opereren met variabelen en zelf formules of functievoorschriften moeten opstellen, blijkt het onbegrip en dreigt de negatieve faalangst elke voortgang te blokkeren. Zij moeten met name ook andere werkwijzen ("omwegen") leren en durven gebruiken. Zoals het doorrekenen van voorbeelden, het schetsen van grafieken, het maken van tabellen, het redeneren in de situatie.

Overigens blijft de vraag naar een optimale didactiek van meer toegepast wiskunde-onderwijs nog open. Globaal zijn er drie didactieken in de boeken en pakketjes te onderscheiden:

1. Eerst de wiskundige begrippen en technieken helder uit de doeken doen, daarna de wiskundige technieken oefenen en vervolgens ook toepassingen maken.
2. Leren van realistische situaties, vanaf de eerste introductie tot aan het laatste probleem.
3. Een gefaseerde opbouw, waarin na de instapproblemen (oriënterend op nieuwe begrippen en op de aanpak van problemen) in de kernparagraaf de wiskundige begrippen en technieken "kaal" aan de orde komen. De oefenopgaven en de problemen zijn gemengd; "kale" technieken, "vertaaloefeningen", begripsvragen en toepassingen.

De eerste didactiek is terug te vinden in "Getal en Ruimte" en "Sigma". De tweede didactiek valt op in HEWET-IOWO-pakketjes voor 4 VWO en in "Moderne Wiskunde", de nieuwe versie voor 4 VWO. De derde didactiek vormt een uitgangspunt voor het projectmateriaal van het project "Heuristisch wiskunde-onderwijs".

In 1984/'85 wordt in een onderwijsexperiment aan een aantal scholen de effecten van deze drie didactieken onderzocht.
De beschrijving van het gegeven onderwijs en van het werk van de leerlingen zal de wiskundedocenten in staat moeten stellen hun eigen keuzes voor 4 VWO te maken. "Zó kan ik (wil ik) onderwijs geven. Dat vind ik de moeite waard om leerlingen te leren". Uiteraard valt te verwachten dat elke didactiek pluspunten en minpunten zal blijken te hebben. En dat de ene aanpak beter aanslaat bij "zwakke" leerlingen en de andere bij "sterke" leerlingen. Of dat de ene benadering hoog scoort bij "realistische" vraagstellingen, terwijl de andere leidt tot een goede beheersing van wiskundige technieken. En ... misschien maakt het allemaal wel niets uit ... Wat denkt u ervan? (Welke hypothese koestert u?).