Hoe kun je "compactheid" meten?

Bedenk enkele manieren.....

H.G.J.M. Bouwens
S.G. Walhofspark, Enschede

Samenvatting

In het laatste nummer van de Nieuwe Wiskrant plaatsten we de puzzel: Hoe kun je "compactheid" meten op b.v. voortgezet onderwijsniveau?
Twee interessante reacties van docenten bereikten de redactie. Dit is er een van, de andere vindt u elders in dit nummer.

Summary

Our last issue contained a puzzle: how can one "measure" compactness at secondary schoollevel.
Two reactions from teachers were send to the Nieuwe Wiskrant, both equally interesting. This is one of them, the other one can be found elsewhere in this issue.

Sommige puzzels ervaar je als een uitdaging. Voor mij was deze, uit de "Nieuwe Wiskrant" van maart 1984 er één van.

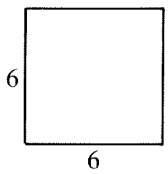
Waaraan denkt iemand bij het woord "compactheid"? Waaraan dacht ik?
Ik dacht aan een "bos" potloden met een elastiek eromheen. Op school heb ik zo'n bundeltje "gevonden voorwerpen" in een la liggen. Het bovenaanzicht ervan is cirkelvormig; ik kan er een paar potloden uithalen of er een paar bij in wurmen, de cirkelvorm komt steeds weer terug. Het elastiek dwingt de totale "oppervlakte" binnen een minimale omtrek. Zo wordt de maximale compactheid verkregen. Andersom zou je ook kunnen zeggen: bij een bepaalde omtrek wordt naar een maximale oppervlakte gestreefd om tot een zo groot mogelijke compactheid te komen.
In beide gevallen gaat het om de verhouding tussen oppervlakte en omtrek van de figuur.
Zo kwam ik op mijn eerste manier om compactheid te meten, of eigenlijk te berekenen.

Eerste manier

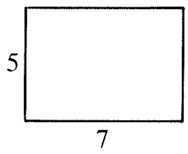
Noemen we de oppervlakte en de omtrek van een figuur zoals gebruikelijk resp. O en P, en bedenken we voor de compactheid voor het gemak maar de letter Q, dan wordt de compactheid als verhouding tussen oppervlakte en omtrek eenvoudig weergegeven door de formule:

$$Q = \frac{O}{P} .$$

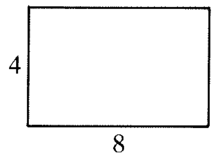
Even proberen op een paar figuren: voor het gemak maar even figuren met gelijke omtrekken.



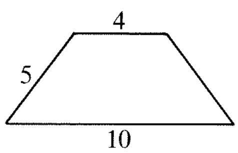
$$Q = \frac{O}{P} = \frac{36}{24} = 1{,}5$$



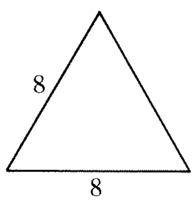
$$Q = \frac{O}{P} = \frac{35}{24} \approx 1{,}46$$



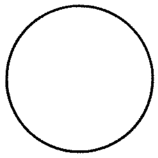
$$Q = \frac{O}{P} = \frac{32}{24} \approx 1{,}33$$



$$Q = \frac{O}{P} = \frac{35}{24} \approx 1{,}46$$



$$Q = \frac{O}{P} = \frac{16\sqrt{3}}{24} \approx 1{,}15$$



Van deze cirkel is de omtrek ook 24. M.b.v. $P = 2\pi r$ berekent men simpel de straal: $r = \frac{P}{2\pi} \approx 3{,}82$ en

$$Q = \frac{O}{P} \text{ wordt } Q = \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2} \approx 1{,}91$$

Hier blijkt, wat eigenlijk al eerder duidelijk was, dat de op deze manier berekende compactheid mede afhankelijk is van de grootte van de figuur of van de gekozen meeteenheid (bv. mm of cm).
Immers, kiezen we een vierkant met zijde z, dan wordt de compactheid

$$Q = \frac{O}{P} = \frac{z^2}{4z} = \frac{z}{4} .$$

Kiezen we nu $z = 1$ (cm) dan wordt $Q = 0{,}25$
kiezen we $z = 10$ (mm) dan wordt $Q = 2{,}5$.

Algemeen:
Wordt een figuur met de factor k (meetkundig) vermenigvuldigd, dan wordt de oppervlakte k^2 maal zo groot en de omtrek wordt k maal zo groot.
De compactheid Q, berekend als $\frac{O}{P}$, wordt dus k maal zo groot.
Een resultaat dat mij althans niet bevredigde.

Tweede manier

Terug naar het begin: het elastiek om de bos potloden. De maximale compactheid wordt bereikt, als de gegeven oppervlakte in de "omtrek van een cirkel" is geperst.
Laten we aan de compactheid van een cirkel eens de getalwaarde 1 toekennen. Niet zo'n vreemde gedachte: de maximale kans in de kansberekening heeft ook de getalwaarde 1 meegekregen. De compactheid van een figuur wordt dan de verhouding tussen de minimale omtrek (d.i. de omtrek van de cirkel met dezelfde oppervlakte als de gegeven figuur) en de werkelijke omtrek. Noemen we deze compactheid, ter onderscheiding van de vorige, Q(P) dan wordt de formule:

$$Q(P) = \frac{P(min)}{P} .$$

We berekenen nu P(min) m.b.v. de oppervlakte van de figuur.

$$O = \pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{O}{\pi}} \quad \text{en } P(min) = 2\pi\sqrt{\frac{O}{\pi}} .$$

Ingevuld in de formule voor Q(P) geeft dat:

$$Q(P) = \frac{2\pi\sqrt{O}}{P\sqrt{\pi}}$$

De compactheid van een willekeurig vierkant wordt nu:

$$Q(P) = \frac{2\pi\sqrt{z^2}}{4z\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0{,}89$$

en de compactheid van een gelijkzijdige driehoek wordt nu:

$$Q(P) = \frac{2\pi\sqrt{\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}}}{3a\sqrt{\pi}} = \frac{\pi\sqrt[4]{3}}{3\sqrt{\pi}} \approx 0{,}77$$

Op deze manier berekend hebben gelijkvormige figuren dus steeds dezelfde compactheid, en die compactheid ligt steeds tussen 0 en 1.

Derde manier

Nog een keer terug naar het begin: bij een bepaalde omtrek wordt naar een maximale oppervlakte gestreefd.
Analoog aan de tweede manier kunnen we een formule opstellen, waarin de verhouding wordt gegeven tussen de werkelijke oppervlakte en de maximale oppervlakte bij de gegeven omtrek.
Ter onderscheiding noemen we de compactheid, op deze manier berekend, Q(O).
De formule wordt dan:

$$Q(O) = \frac{O}{O(max)} .$$

Berekenen we O(max) m.b.v. de bekende omtrek P, dan krijgen we

$$P = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{P}{2\pi} \quad \text{zodat } O(max) = \frac{P^2}{4\pi}$$

Ingevuld in de formule voor Q(O) geeft dat:

$$Q(O) = \frac{4\pi O}{P^2} .$$

Ook hier weer een formule voor compactheid, die een resultaat geeft dat steeds tussen 0 en 1 ligt, en dat onafhankelijk is van de grootte van de figuur.

Vergelijken we de twee formules voor Q(P) en Q(O) met elkaar, dan valt op dat het kwadraat van de formule voor Q(P) precies de formule voor Q(O) oplevert!

Ander gezegd: $\sqrt{Q(O)} = Q(P)$.

Dóórdenken in R_3

Zoals in R_2 compactheid is te definiëren als de verhouding tussen de minimale omtrek en de werkelijke omtrek van de gegeven oppervlakte (tweede manier), zo is in R_3 compactheid te definiëren als de verhouding tussen minimale oppervlakte en werkelijke oppervlakte van een gegeven volume.
De minimale oppervlakte is dan de oppervlakte van de bol, die hetzelfde volume heeft als het gegeven lichaam. In een formule gegoten:

$$Q(O) = \frac{O(min)}{O} .$$

M.b.v. de formule voor het volume van een bol ($V = \frac{4}{3}\pi r^3$) is de straal van de bedoelde bol en daarmee zijn oppervlakte uit te rekenen.

O(min) wordt dan $\sqrt[3]{36\pi V^2}$

en Q(O) wordt $\frac{\sqrt[3]{36\pi V^2}}{O}$

Ook de definitie van compactheid als de verhouding tussen werkelijke oppervlakte en maximale oppervlakte bij gelijkblijvende omtrek (derde manier) heeft een pendant in R_3, nl. de verhouding tussen werkelijk

volume en maximaal volume bij gelijkblijvende oppervlakte.
In een formule:

$$Q(V) = \frac{V}{V(max)} .$$

V(max) blijkt na enig rekenwerk:

$$\frac{O\sqrt{O\pi}}{6\pi} \text{ en } Q(V) = \frac{6V\sqrt{\pi}}{O\sqrt{O}} .$$

Opvallend is nu, dat de derde macht van Q(O) gelijk is aan het kwadraat van Q(V).
Anders gezegd:

$$Q(V) = \sqrt{Q(O)^3}.$$

Des te opvallender is dat, als je bedenkt dat de dimensie van O gelijk is aan 2 en de dimensie van V gelijk is aan 3. Vergelijk je dat weer met de resultaten in R_2, dan valt weer op dat de dimensie van P gelijk was aan 1 en de dimensie van O uiteraard 2 was.

Proefopgave

Bereken de compactheid van een kubus volgens de tweede manier èn volgens de derde manier.
Vergelijk de antwoorden met elkaar.

Oplossing.
Stel de ribbe van de kubus gelijk aan a.
Dan is $V = a^3$ en $O = 6a^2$.
Volgens de tweede manier geldt:

$$Q(O) = \frac{a^2\sqrt[3]{36\pi}}{6a^2} = \frac{\sqrt[3]{36\pi}}{6} \approx 0,806 .$$

Volgens de derde manier geldt:

$$Q(V) = \frac{6a^3\sqrt{\pi}}{6a^3\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{\pi}{6}} \approx 0,724 .$$

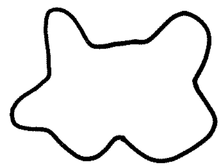
Vergelijking van de twee antwoorden:

$$\sqrt{0,806} = \sqrt[3]{0,724}.$$

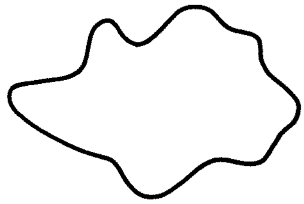
De puzzel

Hoe zit het nu met de figuren C en D van de puzzel?
Bij het bepalen van de omtrek en de oppervlakte van deze figuren is millimeterpapier een onmisbaar hulpmiddel.
Ik vond het volgende:

figuur C:
omtrek 90 mm
oppervlakte 330 mm^2



figuur D:
omtrek 110 mm
oppervlakte 530 mm^2



Volgens de tweede manier geldt voor figuur C:

$$Q(P) = \frac{P(min)}{P} \approx \frac{64,40}{90} \approx 0,716 .$$

En voor figuur D geldt volgens dezelfde methode:

$$Q(P) = \frac{P(min)}{P} \approx \frac{81,61}{110} \approx 0,742 .$$

Rekening houdend met "meet"-fouten bij het bepalen van de omtrek en de oppervlakte van beide figuren kan van figuur C gezegd worden, dat de compactheid volgens deze methode ligt tussen 0,70 en 0,73; voor figuur D gelden de grenzen 0,73 en 0,76.
Figuur D is dus wel "iets compacter" dan figuur C.

Volgens de derde manier kan – met $Q(O) \approx 0,512$ voor figuur C en $Q(O) \approx 0,550$ voor figuur D – uiteraard dezelfde slotconclusie worden getrokken.