Grafieken inhoud geven (2)

L. Streefland

OW & OC, RU Utrecht

Samenvatting

Het vullen van cilinder- en blokvormige flessen kan beschreven worden met grafieken. En in dit bijzondere geval zijn die grafieken rechte lijnen, waardoor het mogelijk is voor kinderen uit de leeftijd van rond de 11-12 jaar een "functievoorschrift" te bedenken.
Het ordenen van flessen (met dezelfde mantel-omvang) door leerlingen staat centraal in dit artikel. Het experiment, de grafiek en het functievoorschrift vormen een onlosmakelijk geheel.

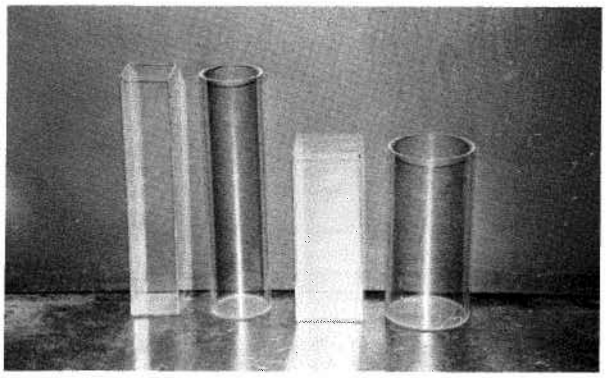
Summary

Filling bottles is a well-known activity to generate graphs.
In this article only cilinders and blocks are objects of study. It is obvious that filling bottles of this shape will lead to linear graphs and functions. Four different bottles have to be ordered, this leads to interesting activities with children of about 11 years of age. The experiment, graph and function form a firm unity.

Overzicht

In de eerste bijdrage onder deze "vlag" werd een vervolg toegezegd, waarin vooral lineaire verbanden voor zouden komen en in formule samengevat.
Met het oog hierop werden genoemd vier perspex "cilinders" met mantels van A_4-omvang en teakhouten blokken. (1). We zullen ons – bij wijze van voorbeeld – tot de "cilinder" beperken.
Nu is het moment daar om de gedane toezegging gestand te doen. Genoemde materialen verwijzen (opnieuw) naar inhoud en volume.
Grafieken en kommagetallen spelen echter ook een hoofdrol, niet als doel in zichzelf, doch om zekere verschijnselen in dienst van een gesteld probleem te beschrijven. De verworven inzichten omtrent de invloed van de (variabele) doorsnede van een vat op hoogteverloop en stijgsnelheid van het water, waarmee dit vat gevuld wordt, kunnen nu zinvol worden toegepast. Immers, het simpele inzicht dat de A_4-bussen overal "even wijd" zijn, maakt een kaarsrechte grafiek voor het hoogteverloop gemakkelijk voorspelbaar, zonder dat er een deciliter water aan te pas behoeft te komen. Wie in staat blijkt het water na een eerste "schep" op aanvaardbare hoogte in te schatten, kan voor de volle A_4-bus een redelijke schatting maken. Is de schatting voor de eerste "schep" eenmaal omgezet in een meetgetal van preciezer gehalte, dan is een nauwkeuriger grafiek binnen bereik gekomen; en dus een middel om de gevraagde inhouden zonder verder meten – dus linea recta – vast te stellen.
Ziedaar een impressie van de ideeën, die dit artikeltje inhoud geven.

Mentaal ordenen



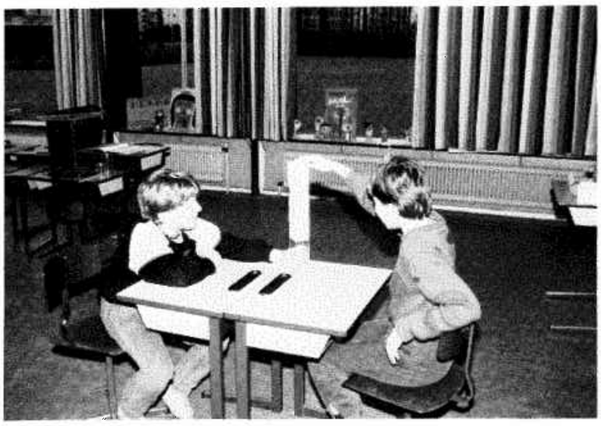
De A_4-bussen: A, B, C en D

De A_4-bussen worden naar inhoud geordend. Aan voor de hand liggende mogelijkheden als vullen en overgieten, gaan we voorbij. We maken er een "hoofdzaak" van en proberen de verborgen ordening van de vier A_4-bussen eerst mentaal te kraken.
We zetten deze vazen op volgorde van klein naar groot. Welke vaas is het kleinst?

Zo'n vraag zaait geheid tweedracht. A en B strijden duidelijk om de voorrang als het om de kleinste gaat. De leerkracht houdt het voorlopig op onbeslist, temeer daar de ingebrachte argumenten niet al te overtuigend klinken. ("Die is rond, daar kan dus meer in." "Ja, maar die vierkante heeft hoeken, waar ook nog wat in kan en dat heeft die ronde niet!")
De onenigheid wordt nog groter als sommigen het op gelijke inhoud houden. (Ze zijn tenslotte even hoog. "Maar niet even wijd", sputtert er ééntje zachtjes tegen, "tenminste, dat weten we niet.")
Een soortgelijke discussie herhaalt zich voor C en D. Wel is ieder het erover eens dat C en D beide groter zijn dan A of B, dus de volgende ordening kan voorlopig tot stand gebracht worden: A of B en C of D.

Een steuntje in de rug

De aandacht richt zich nu op bus A (vierkante doorsnede van 5,2 bij 5,2 cm en hoogte 29,5 cm).
De leerkracht laat zien, dat de mantel uit een A_4-blaadje kan worden gevouwen.



De leraar laat een maatbeker van 1 dl zien en vraagt de groep de inhoud van de bus in deciliters te schatten. De klas brandt los. Diverse schattingen worden op het bord genoteerd. Enkele leerlingen motiveren hun schatting.
M: "6 dl., want de bus is ongeveer drie keer zo hoog als de maat en er passen er vast wel twee naast elkaar", of:
M: "Iets minder dan 10 dl, want de bus lijkt wel wat op een pak melk of een pak yoghurt, maar is alleen iets smaller".
De meningen blijken uiteen te lopen van 5 tot 15 dl. Vervolgens wordt onder grote belangstelling 1 dl water in de bus gedaan. Het water blijkt tot ≈ 3,7 cm te reiken. Met deze wetenschap worden de schattingen verscherpt.
M: "Ik denk zeven deciliter, want 't is bijna vier centimeter en ik schat dat 't zo'n zeven keer past".
Het gegeven wordt in de tabel op het werkblad ingevuld en een stip in de grafiek gezet.
Hoeveel zal het water bij de volgende deciliter stijgen? Vanzelfsprekend weer ≈ 3,7 cm, want de bus is immers overal even wijd of heeft overal dezelfde doorsnede. De waargenomen gebeurtenissen kunnen telkens in kommagetalbetrekkingen worden uitgedrukt.

Bijvoorbeeld:
Met de tweede "schep" steeg het water tot ≈ 7,4 cm. Eerst stond het op ≈ 3,7 cm, er is dus ≈ 3,7 cm bijgekomen, want $3{,}7 + 3{,}7 = 7{,}4$; $7{,}4 - 3{,}7 = 3{,}7$; maar ook $2 \times 3{,}7 = 7{,}4$; $7{,}4 : 3{,}7 = 2$.
Zo krijgt het inzichtelijk en toegepast opereren met kommagetallen ruimschoots de kans zich te ontwikkelen. (2). Vooral het zelf opstellen van de getalbetrekkingen is daarbij essentiëel.

De tabel op het werkblad kan nu verder wel worden ingevuld zonder opnieuw deciliters water aan de inhoud van de bus toe te voegen. Dat geldt ook voor het afmaken van de grafiek, die vervolgens als oplossingsmiddel kan worden gebruikt. Er vindt dan wel een omkering plaats, waarvan we ons bewust dienen te zijn.
Langs empirische weg is de grafiek opgebouwd:
1 dl → 3,7 cm; 2 dl → 7,4 cm etc.
Nu kan op grond van de hoogte van de bus (29,5 cm) met behulp van de grafiek de inhoud worden afgelezen. Dit aflezen kan worden ingeleid met vragen, die voortborduren op de opbouw van deze activiteit.
Bijvoorbeeld:
Voorspel bij hoeveel deciliters het water 28 cm hoog zal staan? En 30 cm? En 32 cm?
Kunnen we wel zo ver gaan? De bus is maar 29,5 cm hoog! Etc.

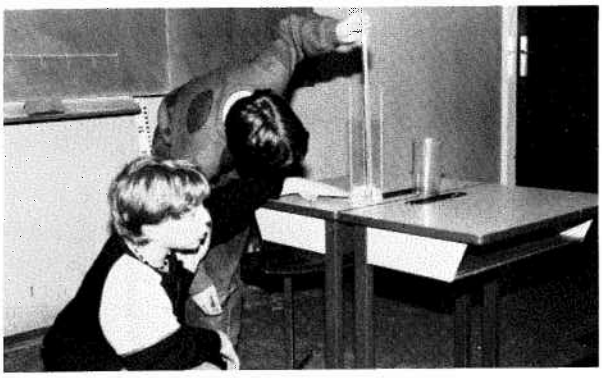
Op weg naar een formule

Vervolgens wordt geprobeerd het voorspelde en bevestigde lineaire verband in een formule te "vangen".

Aantal deciliters	hoogte
1	3,7 cm
2	7,4 cm
3	11,1 cm

Hoe hoog zou het water staan na 5 dl? Na 8 dl? Na 10 dl? (als dat zou kunnen?) etc.
We letten op de rekenwijzen van de leerlingen en laten die verwoorden.
Bijvoorbeeld:
De hoogte van het water is het aantal deciliters keer 3,7 cm. Dit wordt verkort tot: $h = 3{,}7 \times d$.
Omgekeerd – en met een beroep op de wijze waarop de grafiek werd toegepast – wordt een betrekking voor deze ene bus gevonden en deels ook voor de volgende: $h : 3{,}7 = d$, of wel $29{,}5 : 3{,}7 = d$.
De constructie van dergelijke geformaliseerde generalisaties is m.i. als inleiding tot het algebra-onderwijs

onmisbaar. Dat dit tot dusver bij veel leerlingen zo slecht functioneert, is mede te wijten aan het formele niveau waarop met de leerlingen het gebied van de algebra betreden wordt. Daar krijgen zij de generalisaties in letters op een presenteerblaadje, hetgeen voor velen volledig onbegrip tot gevolg heeft, zeker als er "gerekend" gaat worden.
In "$h = 3{,}7 \times d$" doet "$37 \times d$" zich als "algebraïsche eenheid", dus als één getal voor. Dat je bij het rekenen dan weer van apartheid mag uitgaan krijgt betekenis vanuit het proefje. Je mag dus gerust door "3,7" delen om "d" te isoleren. Bij gegeven "kale", algebraïsche betrekkingen vinden kinderen dit gek, zoals mijn ervaring leerde. Als "$3{,}7 \times d$" of "$3x - 12$" of "$\frac{1}{2}x + 4{,}5$" telkens als één getal ten tonele is gevoerd, is het voor een kind onaantastbaar en kun je niet zo maar door berekening het bekende en het onbekende deel weer van elkaar scheiden. Zoiets moet inzichtelijk geleerd worden. Het is daarom, dat ik even bij deze kwestie stilstond.
Iets dergelijks zou telkens en bij herhaling op uiteenlopende leeftijden en niveaus gedaan moeten worden. Er wordt tenslotte nog vastgesteld, dat proefje, grafiek en formule onlosmakelijk bij elkaar horen.



De ordening ontmaskerd

De leerkracht laat zien dat ook bus B met een A_4 mantel precies toekan. De leerlingen beseffen, zeker als de centrale vraagstelling tijdens de voorafgaande bedrijvigheden nog eens bewust gemaakt is, dat ze nu nog maar één stapje van de totale ordening van de vier bussen verwijderd zijn. Sterker nog, desgevraagd spreken ze hun vermoeden, verwachting, zekerheid uit, dat de gevraagde ordening A, B, C, D is.
Zij die het al zeker menen te weten zullen opperen: "Eén deciliter water in bus B en je weet het zeker."
De twijfelaars veren op: "Natuurlijk, dat is het!"
Je kunt dan vergelijken met bus A. En van de twee andere bussen was al gezegd, dat ze groter waren.
Om helemaal zeker te zijn – en ook nog om diverse andere redenen – worden de activiteiten als met de eerste bus herhaald:
- enkele deciliters water bijvoegen;
- hoogten meten;
- tabellen invullen;
- grafieken samenstellen;
- inhouden d.m.v. grafieken bepalen;
- lineaire verbanden in formules samenballen.

Bezinning

In een terugblik op de proefjes en daarmee samenhangende werkzaamheden, worden enkele belangwekkende gevolgtrekkingen gemaakt ten aanzien van omtrek en oppervlakte èn oppervlakte en inhoud. De ronde bussen moeten een grotere bodem hebben dan hun gehoekte "broertjes". Dit betekent, dat van een vierkant en cirkel met gelijkgrote omtrek, de cirkel het vierkant in oppervlakte de baas is.
Zo bleek, dat oppervlakte en inhoud evenmin een (wellicht) verwachte vaste samenhang hadden. De vier bussen hadden hetzelfde "jasje", waarachter verschillende inhouden bleken schuil te gaan. Voor de fabrikanten van bussen, blikken, melkkartons, enz. wordt dit een belangwekkend gegeven gevonden. Het begrip inhoud heeft voor de leerlingen opnieuw een verscherping ondergaan en niet alleen dat.

Besluit

Behalve de beschreven proeven met de A_4-bussen werden ook allerlei verbanden onderzocht in experimentjes, waarbij grafieken een beslissende rol speelden.
Zo was er het onderzoekje waarin gezocht werd naar het verband tussen het volume van een serie verschillende grote (teak)houten blokjes en hun gewicht. (3).
Als centraal probleempje gold het gewicht van 1 dm^3 teakhout te bepalen met behulp van een brievenweger, welks krachten dit verre te boven ging. Ook werd aandacht besteed aan de vergelijking met andere stoffen. Al experimenterend, rekenend, grafieken makend en redenerend, werden de eerste noties van soortgelijk gewicht ontwikkeld.
Ook grafieken spelen een overeenkomstige rol. Ze werden geconstrueerd als beschrijvers, toegepast als probleemoplossers en ervaren als middel om bepaalde verbanden en de eventuele regelmaat daarin zichtbaar te maken. Kortom, grafieken en inhoud gaven elkaar over en weer betekenis.
In twee volgende bijdragen zullen de begrippen afstand, tijd en snelheid centraal staan, met grafieken opnieuw in een beslissende rol.

Noten

(1) Zie Nieuwe Wiskrant, jrg. 3, no. 2, pag. 30 en 31.
(2) De experimenten werden uitgevoerd voordat de leerlingen de bewerkingen met kommabreuken algoritmisch konden uitvoeren.
(3) Het is onzin voor deze leeftijdsgroep (11–13 jr) onderscheid tussen gewicht en massa te maken.