

Ruimte voor de ruimte

Francis Meester

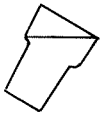
St. Ignatiuscollege, Purmerend

Samenvatting

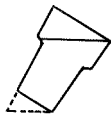
Een pilsje op een terras bleek de aanleiding tot een interessant wiskundig probleem: wat is de uitslag van een scheve cilinder? Het werken met papier, schaar en lijm bleek de gewenste oplossing te leveren. Ook bij een ruimtemeetkunde-bijeenkomst bleek het werken met concreet materiaal de problemen snel tot een oplossing te brengen. De schrijfster verbaast zich er wel over dat zo weinig collega's papier en schaar ter hand nemen. Zagen die het antwoord allemaal al of vonden ze het kinderachtig?

De scheve cilinder

Een mooie avond in september. Ik zit met een wiskundige een pilsje te drinken op een terras op het Leidseplein. Zij zegt: "O, dit is nog een mooie! Van de week zag ik een intrigerende vraag in een puzzelrubriek van een tijdschrift. Als ik mijn bierglas scheef houd, kijk zó:

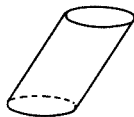


en dit loopt door



wat is dan de uitslag van het biergehalte?"

Het gaat dus om een scheve cilinder.



Ik pak mijn eigen glas, trek met mijn andere hand de verlenging naar het wankelende tafelblad, knijp met mijn ogen en zeg het volgende: "Een parallelogram, o nee, natuurlijk niet, want dat is een gewone cilinder. Nee, wacht..., er zit een kromming in de bovenrand. Wacht..."

Zet mijn glas neer, concentreer me op mijn handen, die nu samen de scheve cilinder aangeven. Knijp nog harder met mijn ogen en klap de scheve cilinder in gedachten uit – misschien gaan mijn handen wel mee

Summary

Drinking a glass of beer on a warm night in September inspired the author to this article. Her problem was: if rectangular shape rolls up to make a rectangular cylinder, what shape should we use to make an oblique cylinder? She mastered the problem only after working with concrete material. Especially girls prefer this way of solving problems in solid geometry. Teachers still seem a little bit afraid of doing so. The author stresses the fact that you cannot prove things if you do not see the solution. And to reach that stage many students need the help of concrete material.

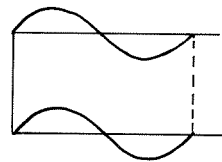
– en wijs aarzelend, nog steeds mijn ogen gefixeerd op de – nu helemaal onzichtbare cilinder – de volgende kromme aan:



"Ja, precies, wat is het voor een kromme?"

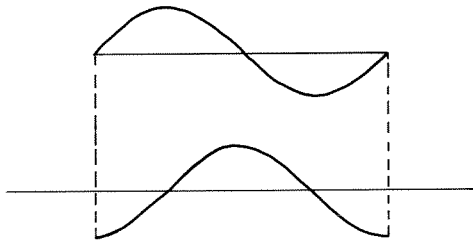
"Een sinusoïde?", ik aarzelend. We praatten nog wat door, vooral over de manier waarop ik het voor me moest zien.

De volgende dag teken ik op mijn 5 mm-blok twee sinusoïdes.

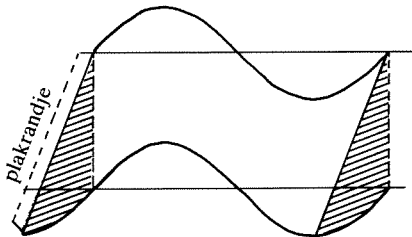


knip de figuur uit en leg de zijden tegen elkaar aan. Ja hoor, het klopt, prachtig en verrassend.

Ik kon hem niet in elkaar plakken – plakrandje vergeten – en het was een heel klein model. Maar ja, het ging er nu alleen om – hoewel ik van de oplossing overtuigd was – nog eens voor me te zien. Als ik nu de onderste sinusoïde een stukje opschuif, betekent dat dan dat ik de cilinder op een andere plaats heb opengeknipt?



Ik teken weer snel twee sinusoides, knip het figuur uit – leg de kanten tegen elkaar aan – stom – dat had ik van te voren wel kunnen bedenken. De afstanden moeten overal gelijk blijven, op een andere plaats de cilinder openknippen betekent een dergelijk figuur:



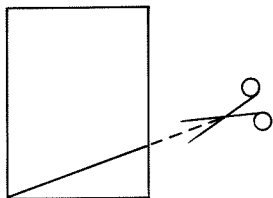
Twee dagen later komt er een vriend op de koffie. Hij is altijd even praktisch en heeft een uitstekend ruimtelijk inzicht.

Ik vraag hem de uitslag van een scheve cilinder.

Hij wijst wat met zijn handen en ik vraag: “Wil je een blaadje?” “Ja, graag en plaksel.”

Ik kom terug met potlood, schaar, papier en prittstift. Hij plakt gelijk van het A₄-vel een cilinder – een rechte dus. Ik denk intussen aan de verschillen tussen ons – ik een klein hoekje van mijn ruitjesblok, hij gelijk het hele vel. “Je moet altijd iets duidelijk zichtbaar maken!”

Hij knipt er een stuk af,



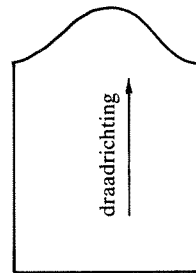
zet de cilinder op tafel en zegt: “Nu het nauwkeurige werk – hier moet wat af, dus daar ook – er moet één S-bocht komen.”

Hij knipt met grote zorgvuldigheid randjes eraf en vraagt een gegeven ogenblik of ik ook vind dat de cilinder zo goed op tafel staat. Hij pakt de cilinder, kijkt even aandachtig naar de onderkant: “Nu hoef ik hem ook niet meer open te knippen. Het is een sinusoides – kijk maar, hier zit de S-bocht.”

We praatten nog wat door over zijn praktische manier van werken, het royale papier dat hij gebruikte in tegenstelling met mijn pietepouterige controlemodelletjes. Tot mijn verrassing zegt hij: Maar dat praktische werk heb ik juist van jou gezien. Jij begint altijd meteen te vouwen, te knippen, te tekenen en te plakken als je iets moet oplossen.” De scheve cilinder staat als fraai bewijsstuk op de keukentafel.

De dag daarna kom ik laat uit school, ga de keuken binnen en zie daar gelijk op tafel een *mouw* staan.

Ja natuurlijk, de grote scheve cilinder is een mouw, zoals ik jarenlang in blouses en jurken zette. Een mouw is een cilinder, die je scheef afsnijdt. Een patroon van een mouw is zoals iedere vrouw en menig man weet:



Waarom heb ik daar niet eerder aan gedacht? Doordat het nu van groot wit papier gemaakt was, kwam pas de associatie van een mouw boven. Ik kende die scheve cilinder dus allang.

Wat een prachtig voorbeeld voor ruimtemeetkunde, waarin ervaring en herkenning ook voor meisjes zo belangrijk is. Dat met brei- en naaipatronen nog veel meer uit te halen is, weet ik zeker. Het artikel van Cecil Maurer (elders in deze aflevering van de Nieuwe Wiskrant) is een goed voorbeeld van de rijkdom van de context “breien”.

De scheve cilinder heeft nog een vervolg.

De leerlingen in de brugklas zijn met het “biwi-project” (1), een project van biologie en wiskunde, over doorsneden bezig geweest. In de medewerkerskamer staan nog de dozen klei en nylondraadjes.

De hele week vroeg ik me al af wat de uitslag van een scheve kegel zou zijn. Ook een sinusoides, dat kon toch bijna niet! Vrijdagmiddag dacht ik, ik ga nu die scheve kegel van klei maken, anders is die klei weer weg. Eerst nog van klei die scheve cilinder, wat heel goed lukte. Keurige sinusoides waren de grenslijnen van het lapje klei. Toen de kegel, het ging iets lastiger, maar ik prutste ijverig door. Een collega wiskunde komt erbij, kijkt mee, is geïnteresseerd en gaat op een blaadje rekenen en tekenen. Roept me af en toe bij zijn berekeningen of vragen, samen denken we verder, maar ik ga weer terug naar de klei en de scheve kegel. Hij is niet tevreden totdat de volledige uitwerking er staat. (4). We kijken enthousiast naar elkaar. Verrassend hè, want intussen wist ik ook wat de uitslag van een scheve kegel was.

We praatten na over onze verschillende aanpak, zijn behoefte om het helemaal uit te werken, dan pas was hij tevreden. Mijn behoefte om mijn vermoeden te controleren met papier of klei en alvast met een volgend probleem – de scheve kegel – verder te gaan.

Begin november lees ik in de Nieuwe Wiskrant nr. 1 (2) “Zeven lessen ruimtemeetkunde” van Sieb Kemme. Een ontzettend aardig waarheidsgetrouw verslag van 7 lessen.

Wat valt me daarin op:

- Hoe moeilijk ik ruimtemeetkunde vind.
- Dat er allerlei moeilijke puzzeltjes verwerkt zijn in de opgaven – de wig van Wallis – voor-, zij- en bovenaanzichten.

- Dat veel leerlingen - maar vooral meisjes - concreet materiaal willen hebben of maken. Els heeft de wig van Wallis thuis proberen te maken. Alleen Els komt eruit met een tekening. Agnes en Marja beweren dat ze zich er absoluut niets bij kunnen voorstellen, enz. De vele hulpmiddelen die hij gebruikt in de lessen en het accepteren dat sommige leerlingen tot in een latere fase hulpmiddelen - een kubus - in de hand nodig hebben.

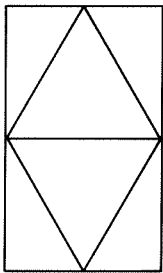
Jaarvergadering-studiedag NVvWL - 12 nov. '83

Eén van de werkgroepen is: "De ruimte in de HEWET".

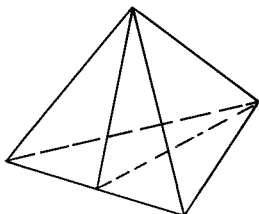
We krijgen globale informatie over wiskunde B, met name de ruimtemeetkunde en gaan aan het werk met een selectie van sommen.

Een klaslokaal vol ijverige mensen - sommigen zien het meteen - nou ik en mijn buurman niet. Ik heb een stokje en draad nodig - mijn buurman een balk als pak melk. Gelukkig zag ik een doosje staan en dat bracht ons verder.

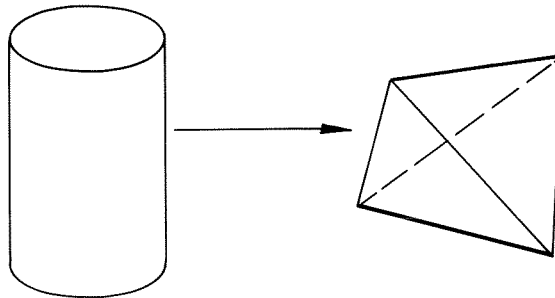
Bij dit practicum was er geen enkel hulpmiddel - nou ja, dit is voor docenten. Meer een kennismaking met wiskunde B, horen daar niet allerlei hulpmiddelen bij? Terugrijdend naar huis vertelde een collega echt heel verbaasd te zijn geweest. Hij was 's middags naar wiskunde-B geweest en had o.a. gewerkt aan de opdracht "laat zien dat het mogelijk is uit een recht hoekig vel karton van 8×18 cm een regelmatige tetraëder te maken". Hij vertelde dat hij het een lastige vraag vond en deze eerst oversloeg. In tweede instantie ging hij het toch maar proberen en tekende op een A₄-vel twee gelijkzijdige driehoeken.



Toen zag hij ook gelijk de oplossing en vouwde het viervlak in elkaar.



Om zich heen kijkend merkte hij nog een groepje op dat een gevouwen viervlak voor zich had. Zij hadden van de andere kant af gerekend: zij waren begonnen met een cilinder en toen de boven- en de onderkant volgens twee loodrecht kruisende lijnen dichtgesmolten. Zo doet de fabrikant van melkpakjes het.



Maar er was vooral verbazing bij me, vertelde hij. Waarom waren er zo weinig collega's die het maakten. Zagen zij allemaal het antwoord? Durfden zij niet te proberen, vonden ze dat niet nodig? Vinden ze het kinderachtig om zelf te knippen, te vouwen en te plakken? Thuiskomend, bedacht ik, hoe sterk onze probleem-oplossende houding gekoppeld zit met dat "concrete zien".

Een begrip wordt zoveel vollediger wanneer je concrete dingen in je handen hebt. Je stelt jezelf dan ook veel sneller nieuwe vragen. Wij zijn het concrete handelen (3) gaan zien als noodzakelijk en zinvolle aanvulling bij het oplossen van wiskundeproblemen voor onszelf, maar ook voor onze leerlingen.

"Geneer je niet, als je eerst wilt knippen of een kubus nodig hebt. Ik doe het zelf ook vaak met een kubus in de hand." Zo voeden we onze leerlingen wiskundig op, zo zijn wij jarenlang door het IOWO opgevoed, maar toch ook die collega's.

Natuurlijk moet er bij wiskunde B "bewezen" worden en is het niet voldoende iets open te knippen en te zeggen "dat zie je toch."

Maar voordat je iets kunt bewijzen moet je het eerst zien! Daarvoor zijn vele ervaringen nodig met concrete materialen. Er zijn mensen, die snijpunten en snijlijnen in een tekening meteen zien. Er zijn mensen die het concreet voor zich moeten hebben en dan pas kunnen gaan bewijzen. Zouden de laatste mensen dan geen wiskunde kunnen/mogen kiezen? Maar de praktijk en de theorie is toch dat, doordat er met veel concreet materiaal gewerkt is, er na verloop van tijd - de tijdsduur is verschillend van mens tot mens - zonder concreet materiaal gewerkt zal worden?

Ja, maar op je eindexamen moet je het zonder kunnen.

Zelfs dat betwijfel ik. Ik zou niet weten waarom een leerling gewapend met schaar en prittstift niet van een kladpapiertje een cilinder zou mogen plakken.

Dat moet ik maar eens nakijken in de examenvoorschriften.

Slotopmerkingen

- De ruimtemeetkunde in de wiskunde B lijkt mij moeilijk. Maar goed, ik moet er weer een beetje inkomen en stereo was nooit mijn sterkste kant. Om goed ruimtemeetkunde te geven moet er ruimte in de lessen zijn. Twee keer 25 uren is de schatting. O.K., aardig bij 3 uur in klas 4 en 4 uur in klas 5 en 6. De kansrekening gaat naar wiskunde A, maar daar besteedden we toch nooit 50 uren aan? Daarnaast staan de uren bij menige school behoorlijk onder druk; 3-4-3 zou het op menige school wel

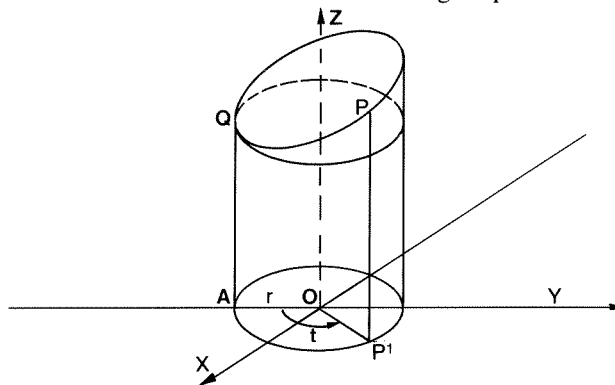
eens kunnen zijn of gaan worden (om aan 3-3-3-maar niet te denken).

Ik hoorde toevallig van één van de 10 experimenteerscholen: Een wiskunde B-groep startte in augustus met 33 leerlingen.

- De ruimtemeetkunde in de wiskunde B lijkt me niet moeilijk, als ik maar concrete dingen in mijn handen mag nemen.
Wanneer ik zelf terugdenk aan mijn twijfels bij stereo en mijn gegroeide vertrouwen de afgelopen jaren dat ook te kunnen, als ... anderen het maar niet gek vinden dat ik die kubus voor me wil hebben en daar rustig naar mag kijken, zonder dat ik me meteen in een tekening van een ander moet verdiepen.
- Door de HEWET-programmawijzigingen in de bovenbouw moeten ook de onderbouwprogramma's noodzakelijk mee veranderen. Vooral veel ruimtemeetkunde en ervaringen opdoen met concrete materialen.
In de onderbouw zou bij leerlingen de houding moeten groeien dat concreet materiaal een goede en volledige oplossing bevordert.
In de onderbouw zijn er mogelijkheden samen met handvaardigheid of tekenen.
- Veel leerlingen hebben concrete modellen nodig voordat ze het "zien". Alle(?) leerlingen hebben modellen nodig om ruimteproblemen vollediger te zien.
Laten docenten veel concrete hulpmiddelen maken en ideeën ontwikkelen en aan elkaar doorgeven.
Een rubriekje in de Nieuwe Wiskrant?
Het zou toe te juichen zijn wanneer docenten en wiskunde B-voorlichters en -nascholers zich een houding eigen kunnen maken van accepteren van een andere manier van leren. Zij zouden de les binnen moeten komen met een doos vol hulpmiddelen. Dat is gewoon – want misschien hebben we die straks nodig.
- Laten we concrete en herkenbare contexten zoeken. Contexten die ook herkenbaar zijn voor meisjes. Voorbeelden die niet te geconstrueerd zijn en vooral dicht bij huis: verpakkingen, lampekappen, wenteltrappen en patronen zijn voorbeelden waar we verder mee kunnen.
- De mouw moest er bij mij even uit:
 - als voorbeeld van verschillen tussen mensen in aanpak van een probleem;
 - als voorbeeld voor de ruimtemeetkunde, een voorbeeld dicht bij huis;
 - als voorbeeld hoe modellen opeens een aha-Erlebnis kunnen bevorderen.

Toegift

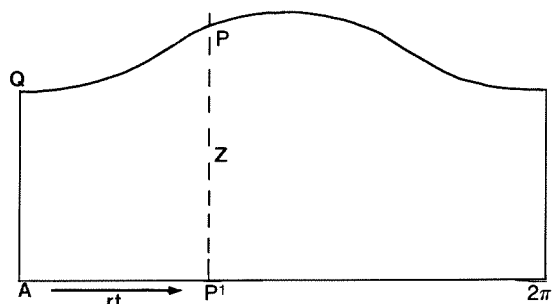
Om te bewijzen dat de uitslag van een "scheve" cilinder inderdaad een sinusoïde is, is het aanbrengen van een coördinatenstelsel een handig hulpmiddel.



Voor een willekeurig punt P op de bovenrand geldt: P heeft coördinaten (x,y,z) met $x = r \sin t$ en $y = r \cos t$ en $z = at + b$ want de x-as is evenwijdig met het scheve vlak.

Hierin is t de hoek tussen de y-as en OP' en zijn a en b constanten, die horen bij het bovenvlak van de scheve cilinder.

Knip nu de cilinder open langs AQ en leg de uitslag in het YOZ-vlak, dan stelt t de afstand van de linkerkant van de uitslag voor en z de hoogte van de uitslag.



Voor de hoogte z geldt: $z = ar \cos t + b$. En hier staat wat te bewijzen was.

Noten

- (1) Biwi – een onderwijsleerpakket op het Ignatius-college; Een voorbeeld van vakkensamenwerking, Wiskrant 22.
- (2) Kemme, S., *Zeven lessen in ruimtemeetkunde*, de Nieuwe Wiskrant, 3e jrg., nr. 1.
- (3) Dormolen, J. van en B. Zwaneveld, *Handelen om te begrijpen*; Een werkwijze om leerlingen naar goede vaardigheden te wijzen, NVvWL-IOWO.
- (4) De uitwerking van de scheve cilinder is van Bert Zwaneveld. De kegel is een uitdaging voor de lezer(es).