Betekenisvol leren met HEWET

E.M. Koerts/M.C. Visser
Willem van Oranje College, Waalwijk

Samenvatting

Eén van de twaalf scholen van de tweede fase van het Hewet-experiment is het Willem van Oranjecollege te Waalwijk.
Twee docenten doen in dit artikel verslag van hun eerste ervaringen.
Het blijkt dat ook de docenten heel wat kunnen leren van het experiment: wiskunde-onderwijs is minder vanzelfsprekend dan het lijkt en de docent kijkt met heel andere ogen naar leerlingen.

Summary

The experiments that will lead to a new curriculum for upper secondary education in the Netherlands are now in the third year.
Twelve schools are working with the new curriculum, another 40 are prepairing for the experiments that will start in August 1984.
This article is an impression of the experiments at one of the twelve schools, written by the teachers. It turns out that not only the students are learning, but the teachers as well.

Inleiding

Invoering en gebruik van het HEWET-materiaal in de klas brengt onherroepelijk leerprocessen op gang. Maar bij wie? In ieder geval bij leerling èn leraar.
De leraar die het Hewet-materiaal gaat gebruiken, wordt geconfronteerd met de visie op wiskunde. Is wiskunde een structuur waaruit een onderwijsprogramma gededuceerd moet worden (Dienes), of is wiskunde een verzameling feiten, vaardigheden, concepten en principes (Gagné), of moet wiskunde meehelpen de situaties waarin mensen betrokken zijn te ordenen (Freudenthal)?
De visie op wiskunde is van invloed op je opvattingen over het onderwijsleerproces. Als je iemand het cijferend vermenigvuldigen wilt leren, doe je dat dan door het algoritme te onderwijzen, of vervang je het door de rekenmachine? En als je het onderwijst, doe je dat dan blindelings, met inzicht, of efficiënt? Of laat je het algoritme ontstaan door "progressieve schematisering" (Treffers)?
Het Hewet-materiaal is vaak zeer geschikt voor groepswerk; sommige andere methoden beslist niet. Doe je dan "aan groepswerk"? En zo ja, waarom? Uit sociale overwegingen, of omdat het effectief is, of beide, of geen van beide?
En het leren zelf? Wat is dat eigenlijk? Een keten van stimulus-respons-situaties, of een blijvende gedragsverandering? Of zullen we toch maar naar de kinderen kijken, kijken hoe zij leren, kijken naar wat ze wel en niet leren (Freudenthal)?
Deze lijn doortrekkend, komen we bij Van Rossum terecht die de studenten zelf vraagt hoe zij leren.

Bij invoering van het Hewet-materiaal wordt de leraar dus gedwongen zijn eigen opvattingen over wiskunde en wiskunde-onderwijs te vergelijken met die van het Hewet-team. Maar ook de leerlingen die hij gaat onderwijzen hebben hun opvatting over wat wiskunde is en wat leren is. En dat kan best tot botsing leiden, zoals ik ondervonden heb. Leren door voordoen en nadoen is wel even anders dan mathematiseren als groepsactiviteit. Waarom zou je als zeventienjarige je opvattingen wijzigen? Halen we betere cijfers, vraagt een produktgerichte leerling?
Over wiskunde schrijven is nog wat anders dan wiskunde doen. Laten we dus maar eens aan de les beginnen.

Voorbeeld 1:

Gezocht wordt de afgeleide van de functie:

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x + 1} \quad \text{(in: Differentiëren 2, 1982, blz. 58).}$$

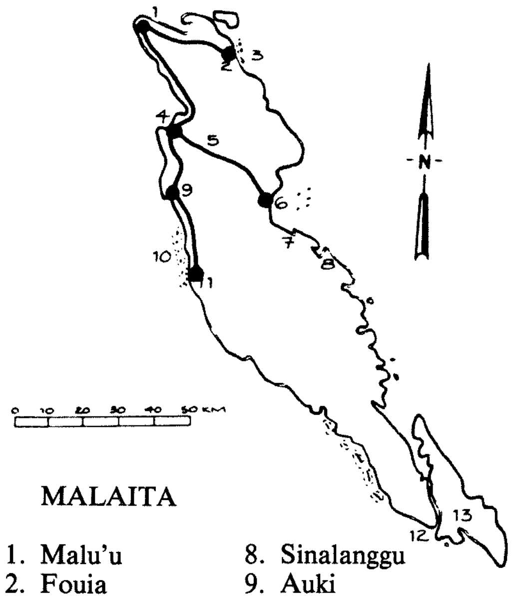
We kennen de produktregel en hebben al beredeneerd dat de helling positief is. (Ja, zeker. Geen groepswerk, maar spannend frontaal).
De list is dat je nu schrijft:
$(x + 1) \cdot f(x) = 2x + 1$

Na veel gezwoeg vinden we de afgeleide functie. De Havo-instromers hoor je denken:
- Wat ingewikkeld.
- Dat deden wij heel anders.
- Hoe dan?
- Daar was een regel voor.

- O, afgeleide van teller gedeeld door afgeleide van noemer.
- Nee, nat min tan.
- (klas) – – – – – – – – ?
- Waarom zien wij geen patroon?
- Nelien: Je moet het algemener doen.

Op zo'n moment beleef je als leraar een gelukzalig gevoel, ten minste ... dat hangt af van je visie op wiskunde en wiskunde-onderwijs af. (Ik vervang daadwerkelijk $2x + 1$ door $t(x)$ en $x + 1$ door $n(x)$ en het gewenste patroon ontstaat).

We zijn in de tweede les over het boekje Matrices. Herinnert u zich uit vorige Wiskranten de vraag hoeveel knooppunten en wegen er zijn op Malaita?



MALAITA

1. Malu'u
2. Fouia
3. Lau Lagoon
4. Dala
5. Tiuni
6. Kwai
7. Ato'ifi
8. Sinalanggu
9. Auki
10. Langa Langa Lagoon
11. Buma
12. Maka
13. Small Malaita

Malaita is het op één na grootste eiland van de Solomon Eilanden, ook in de Stille Oceaan. De grootste "stad" is Auki (9).
Andere belangrijke plaatsen zijn: Malu'u (1); Fouia (2); Dala (4); Kwai (6) en Buma (11). In totaal wonen er zo'n 60.000 mensen op het eiland.

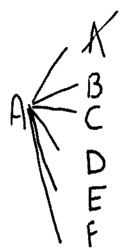
- *5. Hoeveel knooppunten zijn er en hoeveel wegen? Hoeveel wegen kunnen er aangelegd worden zodat ieder knooppunt een directe weg heeft naar ieder ander knooppunt?*

Er ontstaat een verwarde discussie in de klas. De leerlingen zijn het niet met elkaar eens. Ik moet er tussen komen: "Praten jullie niet langs elkaar heen?" ... ??? En dan – ineens ontstaat de gedachte dat je onderscheid moet aanbrengen: directe en indirecte wegen.
Sommige leerlingen en misschien ook sommige leraren mopperen: "Hadden de auteurs de vraag niet 'beter' kunnen formuleren?"

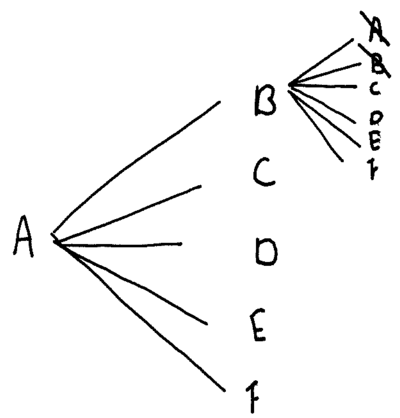
Natuurlijk kan dat. (En dan liefst gesloten vragen zeker waarop maar één antwoord mogelijk is. Maar wat leer je daarvan? In ieder geval heeft bovengenoemde klas meer geleerd: een vaardigheid in onderscheidingen aanbrengen en dat kan van belang zijn bij b.v. verwarde politieke discussies. Dit probleem leidt ook tot meerdere oplossingsstrategieën. (Zie het artikel van De Lange).

Ik heb Jolanda gevraagd haar oplossing voor me uit te schrijven:

De vraag is: hoeveel wegen er kunnen worden aangelegd zodat ieder knooppunt een directe weg heeft met ieder ander knooppunt.
Er zijn 6 knooppunten. Ik noem ze A, B, C, D, E, F. Vanuit elk van die 6 knooppunten kun je naar 5 andere knooppunten d.m.v. een directe weg. Heb je alle 6 knooppunten verbonden met 5 andere, dan kun je die "5" nog maar met 4 andere verbinden.



Van A naar A kan niet; dat is geen weg. Dus houd je over 5 knooppunten om naar toe te gaan. Dat is ook zo bij de andere 5 knooppunten.



Naar A is niet mogelijk want dan heb je geen directe weg meer omdat je eerst van A naar B gaat en dan weer van B naar A.
Naar B kan ook niet, want dat is geen weg. Je kunt niet van B naar B gaan. De rest (naar C, D, E, F) is wel mogelijk. Daar kom je geen letters tegen die je al eerder gehad hebt. Dus kun je B nog maar met 4 andere verbinden. Dat is ook zo bij de andere 5 knooppunten.

Het wordt dan steeds 1 knooppunt minder. Eerst kon je 6 knooppunten met 5 verbinden, dan 5 met 4. Dan 4 met 3 enz. Dan wordt dus het aantal directe wegen $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ directe wegen.

Voorbeeld 3:

Wat leerlingen leren valt niet altijd samen met wat leraren willen dat leerlingen leren.
Over hoofdstuk 1 van het boekje "Matrices" gaf ik de opdracht:
Schrijf voor jezelf op wat je van dit hoofdstuk geleerd hebt.
Maak met een groepje een proefwerkje over dit hoofdstuk.
De resultaten liepen sterk uiteen. We zien ook dat er onder leerlingen uiteenlopende leeropvattingen bestaan.

Wat heb ik geleerd? Hfdst. 1. Jan Straver, J5a

Wiskundig gebied:
Wat is: 1. 'n graaf;
2. 'n matrix;
3. 'n verbindings-;
4. c/q informatieverwerking.

Sociaal gebied:
- *'t Werken met zo'n groep is best wel gezellig, zij 't soms wat rommelig.*
- *Wiskunde is best wel leuk, volgens de manier van het boek in zo'n groepsverband.*

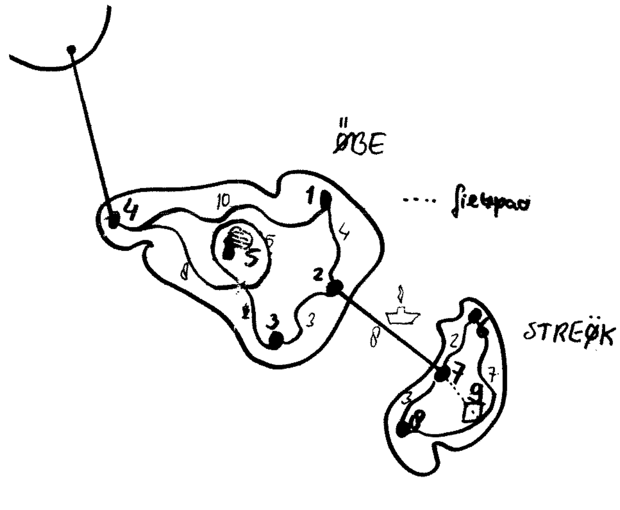
Opgaven:
1. *Wat is 'n graaf en geef 'n voorbeeld van een graaf.*
2. *Wat is 'n matrix, geef voorbeeld.*
3. *Wat bedoelen we met de orde van een matrix.*
4. *Geef de afmeting van de volgende matrix:*

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 1 & 2 & 3 \\ 1 & - & 4 & 5 \\ 2 & 4 & - & 6 \\ 3 & 5 & 6 & - \end{pmatrix} \end{array}$$

5. *» 22.*

Wat ik geleerd heb over hoofdstuk 1 van het boek Matrices.
(Omdat ik zo geleerd ben, moet ik zeggen dat ik niks geleerd heb en reeds alles al weet ((ehum))) grapje.

Ik wil ten eerste even m'n mening geven over wiskunde A. Leuk. Lekker nieuw. Het verbreidt niet alleen je wiskundige kennis maar ook je algemene kennis, om maar eens een voorbeeld te noemen. Hoofdstuk 1, het gebruiken van matrices heeft niet alleen het effect dat je er wiskundig over na gaat denken, maar je gaat het ook geografisch bekijken (ligging → meest centrale ligging enz.)
Je kunt hier ook over discussiëren terwijl je bij wiskunde 1 de sommen gewoon wiskundig (formules uitrekenen enz.) uitrekende, waarbij geen discussie noodzakelijk is. Je leert er ook het verband tussen wiskunde en maatschappij in zien. Vorig jaar zou ik echt niet geweten hebben hoe ik al die ingewikkelde wiskundesommen (limieten) samen moest zien met de andere vakken.
Ik hoop dat ik een beetje duidelijk ben.



1. *Anilorac*
2. *Neileve (hoofdstad Øbe)*
3. *Neilen*
4. *Egni*
5. *meer "Retaw"*
6. *Artep*
7. *Snarf (hoofdstad Streøk)*
8. *Knarf*
9. *zwembad "Dabmewz"*

Seil en Enna zijn op vakantie, in verband met tijd- en geldgebrek willen ze beide eilanden in 2 dagen helemaal bezichtigen. Eens in de week gaat de boot over van Øbe naar Streøk en terug.

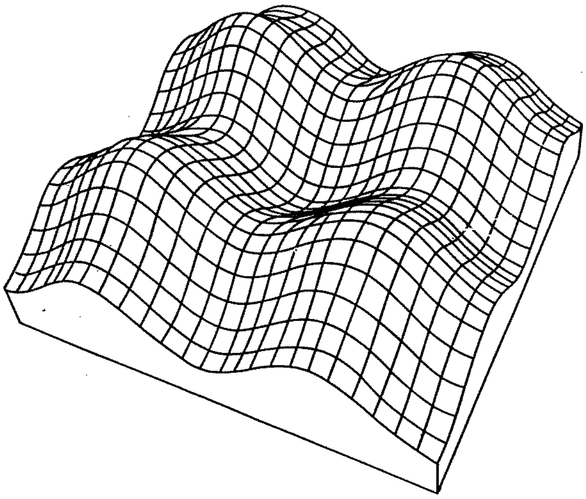
a. *Maak een graaf om duidelijk overzicht te krijgen.*
b. *Maak een afstandsmatrix (zonder fietspaden), ze maken alle tochten per auto.*
   Schrijf steeds de kortste afstand op als je moet kiezen uit 2 manieren (vanwege het geldgebrek).
c. *In welke plaats en op welk eiland kunnen ze het best gaan kamperen zodat de tocht die ze af gaan leggen een zo min mogelijk aantal km. bedraagt. De burgemeester heeft uitgemaakt dat in de hoofdsteden Neileve en Snarf niet gekampeerd mag worden.*
d. *Wat voor bijzonders merk je op aan de namen van de plaatsen?*

Voorbeeld 4:

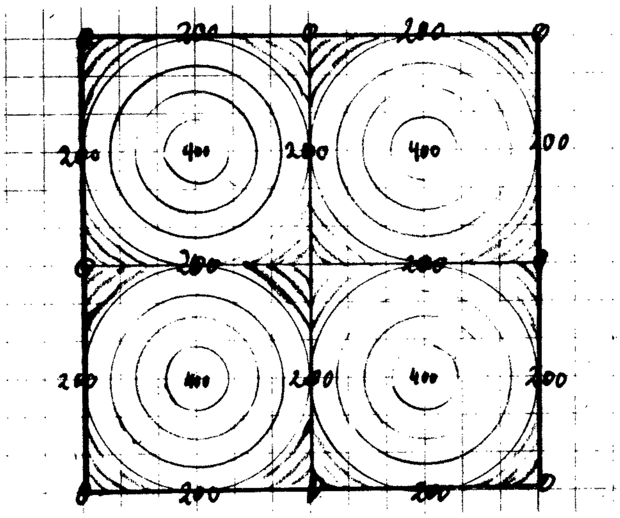
Leren doe je niet in het luchtledige. Leren is "intentioneel" gericht op leerstof. Wat is leerstof en wie bepaalt dat? Is leerstof rationeel afleidbaar uit doelstellingen? Bepalen de examens wat leerstof is? Of mogen leerlingen zelf aangeven wat leerstof is? Kan leerstof zijn dat wat zich als zodanig aanbiedt in de ontmoeting:

To know a subject also means to hold this knowledge in a way which shows that the knowledge is indeed a subject loved and respected for what it lets itself be known for. (Van Manen, p. 295)

Een fraai voorbeeld deed zich vorig jaar voor in de klas 4b bij de behandeling van het boekje "Functies van twee variabelen".
Er moet een kaartje met niveaulijnen gemaakt worden van een gegeven heuvelachtig landschap: (opgave 99)



Niveaulijnenkaartje van model op blz. 30, van Functies 2 variabelen.



Ik heb dit kaartje gemaakt met het gegeven dat het een heuvelachtig landschap moet zijn, dus natuurlijk!!

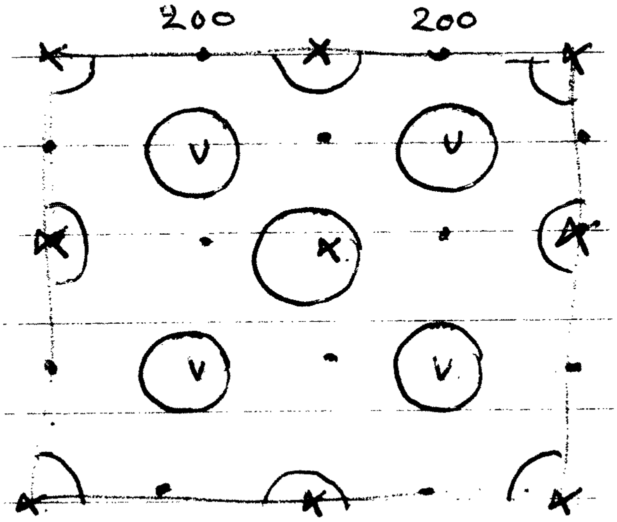
Johan van Tiggelen 5b2

a. *Hoeveel zadelpunten staan erop? Waar?*
b. *Hoeveel maxima staan erop? Waar?*
c. *Hoeveel minima staan erop? Waar?*
d. *Hoe zal dit model eruit zien als wij er loodrecht boven vliegen?*
e. *Als verder gegeven is dat de maxima op 400 m, de zadelpunten op 200 m en de minima op 0 m liggen, probeer dan een kaartje met niveaulijnen te maken van bovenstaand model.*

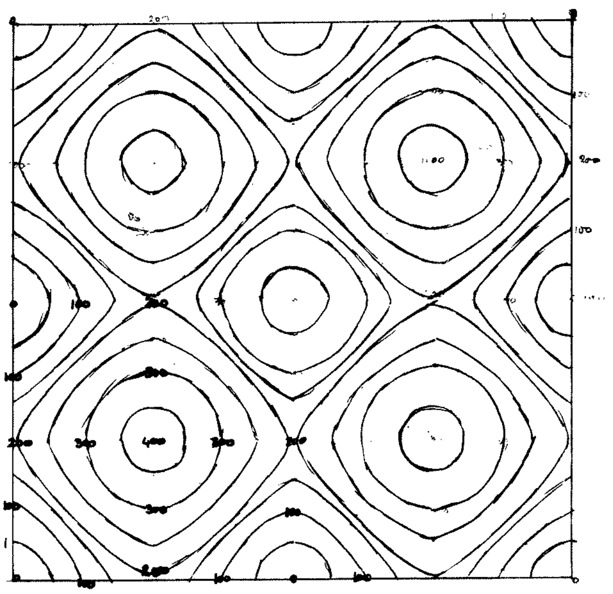
Tamelijk argeloos begint de klas. De zadelpunten, de maxima en de minima worden vlot aangegeven. Maar dan komt het. We gaan vliegen boven een model: spanning tussen werkelijkheid en gedachte?
- Moet het een groen of een geel vlak zijn?
- Is het een bebost of een zanderig landschap?
- Ik zie allemaal vierkantjes.

En dan het hoogte kaartje!

De voorzichtige aanpak:



Is er geen probleem waar de hoogtelijnen van de maxima en minima bij elkaar komen?
Adriaan laat daar de cirkels al wat veranderen:



Elke hoogtelijn is 50(m) (van 400–0 zijn 8 lijntjes)

Paul durft zelfs al rechte lijnen te tekenen.
Hoe zit het nou allemaal? En dan ontstaat de gedachte om het heuvellandschap in klei te gaan nabootsen en bedekt met de lijnen net als in de opgave in het boek. En als we dan eens een foto maken vanuit dezelfde hoek als in het boek? En misschien kan dan ook de vraag van Maarten naar het hol of bol zijn worden opgelost.

Achteraf hebben we aan Paul gevraagd of hij een verslag wilde schrijven. Hier volgt zijn verhaal.

HET HEUVELIG LANDSCHAP

"Zijn het nou vier pyramides, vier kegels of iets anders?"
In het wiskundeboek "Functies van 2 variabelen" staat op blz. 30 een model van een driedimensionaal heuvelig landschap van zijaanzicht. De opdracht is om er een plattegrond van te maken. Dit bleek nog niet zo makkelijk als de schrijver dacht, want er kwamen 3 verschillende oplossingen uit, die alle drie niet fout gerekend konden worden.
Dhr. Visser, onze wiskundeleraar en Dhr. Koerts, een andere wiskundeleraar, besloten dat het model met klei nagebootst moest worden, hierdoor zal het wel duidelijk worden hoe de plattegrond getekend moest worden.
Vier leerlingen kregen de opdracht om zo'n landschap te maken: Maarten van Rooy, Paul van Sluisveld, Alex Tiemersma en Johan van Tiggelen. Ieder moest een eigen heuvel maken zoals hij dacht dat de heuvel er uitziet.

WERKWIJZE:
foto 1: Een plateau van 3 cm dik dient als ondergrond.

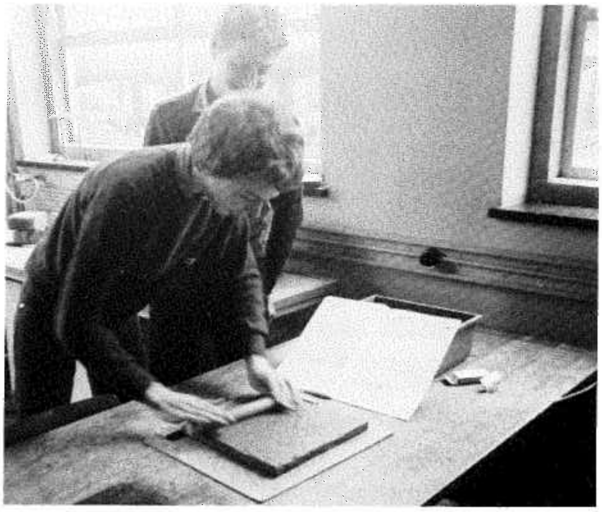


foto 2: In het plateau worden stokjes aangebracht die de hoogte aangeven. Hieromheen wordt klei aangebracht tot de hoogte van het stokje.

foto 3: Over het geheel worden strepen getrokken net als in het boek, zodat het te vergelijken is met het boek.

foto 4: Het zijaanzicht net als in het boek.

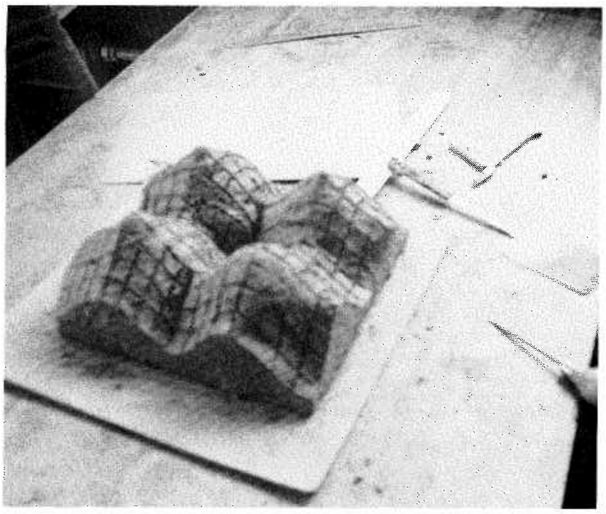
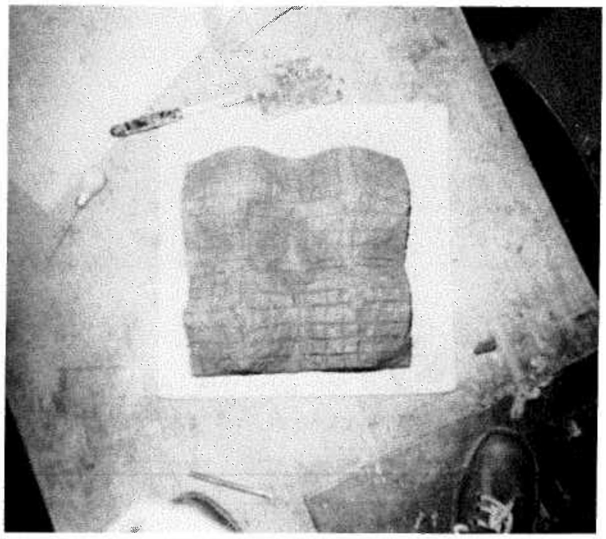


foto 5: Een bovenaanzicht.



RESULTAAT:
Maarten heeft onder het maken van het model nog een oplossing gevonden, die vooraan op foto 4 te zien is. Deze lijkt het meest op het model in het boek. De helling stelt bij deze heuvel een deel van een sinusgrafiek voor.

fig. 1: De helling van de heuvel is een deel van de sinusgrafiek.

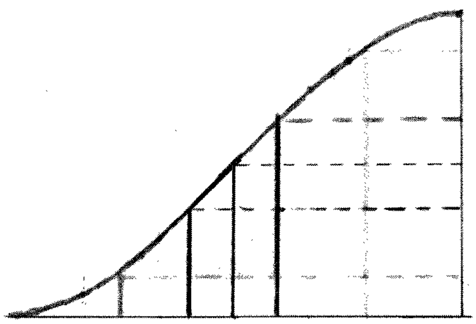
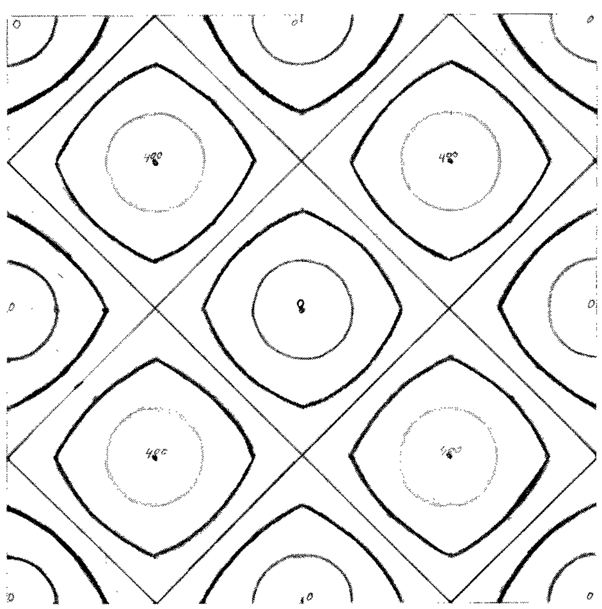


fig. 2: De plattegrond ziet er dan als volgt uit:



Paul van Sluisveld

Besluit

Wat hebben wij (de auteurs) zelf van het bovenstaande geleerd? Heel wat. Onderwijzen is een dynamisch proces met onverwachte uitkomsten. Wiskunde-onderwijs is minder vanzelfsprekend dan het lijkt. Het lesgeven als – altijd – maar – weer – hetzelfde is een fabeltje, althans kan dat zijn.
Het Hewet-materiaal biedt aanknopingspunten om onderwijsleerprocessen op gang te brengen met interessante uitkomsten. Blijkbaar is het mogelijk leerlingen tot activiteiten te brengen waardoor ze zelf wiskunde als een activiteit ervaren. Misschien zijn we ook een stapje verder gekomen om de leerlingen te helpen zelf problemen te stellen, zelf de juiste vragen te stellen.
Het op een rijtje zetten van voorbeelden brengt bij ons zelf ook leerprocessen op gang. We kijken weer met andere ogen naar leerlingen. Blijkbaar bestaan er onder leerlingen ook verschillen in leeropvatting. Het rijtje van individuele verschillen wordt dus weer uitgebreid.
Het op een rijtje zetten van voorbeelden van ervaringen blijkt dus alleszins zinvol te zijn.

Literatuur

Freudenthal, H., *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, Stuttgart, 1973.
Lange Jzn, J. de, *Matrices en de Stille Zuidzee*, Nieuwe Wiskrant, 1981, 1, nr. 2.
Manen, M. van, *Phenomenological Pedagogy*, Curriculum Inquiry, 1982, 12, nr. 3.
Rossum, E.J. van en S. Schenk, *De relatie tussen leerconceptie, studiestrategie en leerresultaat*, Pedagogische Studien, 1983, 60, nr. 6.