Niveaus van zekerheid

B. Lagerwerf
SOL, Utrecht

Samenvatting

In het mei-nummer trof u een artikel aan van Rijkje Dekker: "Zeker in wis-kunde" met opmerkelijke voorbeelden van hoe mensen met hun zekerheden omgaan. Dit artikel is daar een reactie op. De auteur benadrukt eerst het verschil tussen je zeker voelen en het zeker weten. In de wiskunde ligt de meeste nadruk op het zeker weten, maar een gevoel van onzekerheid kan het zeker weten op losse schroeven zetten. Er worden drie niveaus van zekerheid onderscheiden: het vanzelfsprekendheidsniveau, het tussenniveau en het bewijsniveau.

Summary

In the Nieuwe Wiskrant of May 1983 Rijkje Dekker wrote an article about confidence in and outside mathematics.
This article is a reaction. It stresses the difference between feeling confident and feeling certain. In mathematics most attention is paid to feeling certain, but feeling not confident often leads to doubts about feeling certain. The author discusses different levels of certainty: the self-evident level, the in-between level and the level of proof.

In de Nieuwe Wiskrant van mei '83 schrijft Rijkje Dekker over "Zeker in Wiskunde". Ze geeft opmerkelijke voorbeelden van hoe mensen met hun zekerheden en onzekerheden omgaan. Haar verhaal behoeft een vervolg mijns inziens. Ik wil het in verband brengen met de niveautheorie van Van Hiele. Het blijkt mij telkens weer dat die theorie voor leraren in opleiding erg moeilijk toegankelijk is. De invalshoek van de (on)zekerheid maakt de toegang wat gemakkelijker.

Zeker weten, zeker voelen

Twee dingen wil ik daarbij extra benadrukken.
Iets *zeker weten* vs jezelf *zeker voelen*. In de wiskunde komt de nadruk vaak te liggen op *zeker weten*. Bij het bedrijven en leren van wiskunde speelt een *gevoel van zekerheid* echter ook vaak een grote rol.
Een gevoel van onzekerheid kan het zeker weten op losse schroeven zetten. Je denkt dat je iets ondubbelzinnig bewezen hebt, maar je gevoel waarschuwt je, je hebt ergens een fout gemaakt, misschien.
Een gevoel van zekerheid kan misplaatst zijn. Je voelt je zeker en tevreden over een bereikt resultaat en daardoor zie je een gemaakte fout gemakkelijk over het hoofd. Dit maakt dat in het uiteindelijke wiskundige *resultaat* – de axioma's en de definities en de stellingen – gevoelens geen rol meer mogen spelen. Bij de *ontwikkeling* en het gebruik van die wiskundige zekerheden spelen gevoelens echter wel degelijk een grote rol.

Het veronachtzaamde tussenniveau

Ook het leven van een wiskundige zit vol *vanzelfsprekendheden*. Allerlei beweringen waarbij je je niet voortdurend afvraagt: "Klopt dat nu wel?" Twee maal twee is vier, $-2 \times -3 = 6$, de afgeleide van sinx is cosx, de wortels van de vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ vind je met de abc-formule. In het verkeer rijd je aan de rechterkant van de weg, inflatie hoort er nu eenmaal bij, als de nieuwslezer van het NOS-journaal meldt dat de politie een inval heeft gedaan in het hoofdkantoor van de Bijenkorf, dan nemen we als vanzelfsprekend aan dat dat waar is.
Als hij onzeker is over het antwoord bij de vraag "Klopt dat nu wel?", of als er verantwoording gevraagd wordt, dan grijpt de wiskundig geschoolde gemakkelijk naar het middel *"bewijs"*, of hij probeert een "afleiding" van bijvoorbeeld de abc-formule te geven. Zo vragen leraren* dat ook van hun leerlingen, "Bewijs dit of dat".
Waar het mij nu om gaat is dat er tussen de zekerheid van het bewijs en die van de vanzelfsprekendheid een overgangsgebied bestaat waar in het algemeen weinig aandacht voor is. In het dagelijks leven, waar bewijzen meestal moeilijker te leveren zijn dan in de wiskunde, is dat veel duidelijker. Het bericht over de Bijenkorf kom je ook in de krant tegen of je hoort het van de radionieuwsdienst. Je herinnert je dat de fiscale opsporingsdienst nogal actief is de laatste tijd en je weet van financiële moeilijkheden bij de Bijenkorf. Allemaal

*Met een leraar bedoel ik i.h.a. ook een lerares, met een leerling ook een leerlinge.

gegevens die het bericht van het NOS-journaal niet onwaarschijnlijk maken. En als het bericht dan verder niet zo belangrijk voor je is, geloof je het wel. In de wiskunde gaat dat eigenlijk net zo. Op school nemen leerlingen in eerste instantie b.v. als vanzelfsprekend aan dat de abc-formule die de leraar hun voorschotelt wel correct zal zijn; die heeft er voor gestudeerd. Al doende bouwen ze er ervaring mee op. Ze merken dat die formule hen uit de brand helpt bij elke kwadratische vergelijking. Ze kunnen de resultaten ervan min of meer verifiëren door de grafiek van $x \rightarrow ax^2 + bx + c$ te tekenen; soms ook door het linkerlid te ontbinden. Zo ontstaat er bij hen een zekerheid die meer is dan de vanzelfsprekendheid, gebaseerd op *voorbeelden*, *ervaring*, en *controle*mogelijkheden.
Dat zekerheidsniveau tussen het vanzelfsprekendheidsniveau en het bewijsniveau noem ik het *Tussenniveau*. Op deze drie niveau's ga ik nu eerst dieper in.

De drie zekerheidsniveau's

Het vanzelfsprekendheidsniveau

Alle vanzelfsprekendheden hebben gemeen dat we er in eerste instantie niet over denken of het nu wel klopt. De vraag naar het waarheidsgehalte komt eenvoudig niet in ons op.
De vanzelfsprekendheid is een soort veiligheidsmechanisme dat het leven leefbaar houdt. Je kùnt nu eenmaal niet aan alles gaan twijfelen. Dat is overigens wel subjectief, de een gaat er heel anders mee om dan de ander. En de ene keer doe je het zelf ook anders dan de andere keer.
– Vaak is er sprake van een autoriteit waar je op af gaat. De leraar zegt het. Het was op het journaal. Zo staat het in het boek.
– Dikwijls ook voel je je zeker zonder dat je kunt verklaren waarom je je zo zeker voelt. Dat doe ik altijd zo. Dat weet toch iedereen. Dat is nou eenmaal zo. Dat kun je bewijzen. (Dat wil zeggen: Ik denk dat er mensen zijn die dat kunnen bewijzen, ikzelf zou momenteel niet weten hoe). En ook: Dat heb ik vroeger wel eens bestudeerd, maar vraag me nu niet hoe het precies in elkaar zit.
– Het komt ook voor dat je je gevoel van zekerheid kunt verantwoorden. Je *voelt* je niet alleen zeker, je *weet* het ook zeker.
Een paar opmerkingen nog voor ik verder ga.
– Je kunt je al of niet zeker voelen over wat je *iemand anders* hoort zeggen of wat je ergens leest, maar ook over iets wat je *zelf* bedenkt of wat je *zelf* waarneemt. Soms houd je jezelf voor de gek, of weet je niet of je je eigen ogen kunt geloven. Sommige mensen zijn weinig geneigd te twijfelen aan wat ze zelf bedenken of wat ze zelf zien; ze gaan blindelings af op zichzelf als autoriteit.
– Veel leerlingen op school komen niet verder dan de eerste twee vormen van vanzelfsprekendheid. Juist in de wiskunde is het echter van belang dat je je kunt verantwoorden over wat je doet en denkt. Veel leraren nemen er genoegen mee als de leerling weet hoe hij het moet doen. Maar voor het verder gaan is het nodig dat hij ook wat kijk heeft op wat erachter zit, dat hij enigszins doorziet hoe het komt dat het goed is als hij het zo doet.

En een paar voorbeelden.
– Brugklas, negatieve getallen, de nieuwe versie van "Moderne Wiskunde". De leraar haalt steeds het verhaal van de heks of van de treintjes erbij. Het wil niet vlotten. Op een morgen komt een jongen naar hem toe: "Meneer nou begrijp ik het, mijn vader heeft me geholpen, je doet gewoon min maal min is plus".
– In een derdejaarsgroep SOL-studenten vraag ik: "Hoe zit het met min maal min is plus? Waarom is eigenlijk $-3 \times -2 = 6$?" De hele groep met de mond vol tanden. Aan de juistheid van de bewering wordt niet getwijfeld, maar hoe je dat moet verantwoorden blijft de vraag.
– Ieke uit "Zeker in Wiskunde", wiskundige.
Gebruik je wel eens truuks of hints die je niet helemaal begrijpt? "Als ik ze gebruiken kan wel, ja. Daar heb ik geen morele bezwaren tegen. Dat kan ik later nog wel eens precies natrekken."
– Alle drie vormen van vanzelfsprekendheid vind je terug bij de verschillende manieren waarop leerlingen met de abc-formule omgaan.

Het tussenniveau

Soms ga je dieper nadenken over je vanzelfsprekendheden. Omdat je erover begint te twijfelen. Of omdat je weleens wilt weten wat erachter zit. Of omdat een docent ernaar vraagt. Een echt bewijs is in de meeste gevallen dan teveel gevraagd. Er zijn middelen beschikbaar die meer voor de hand liggen.
Eerst wat voorbeelden.
– De vergelijking van het type $ax = b$ wil nogal eens verwarring zaaien. Moet het nu zijn $x = \frac{a}{b}$, of $x = \frac{b}{a}$?
Daar kun je op verschillende manieren achter komen:
Neem bijvoorbeeld $2x = 6$, dan is $x = 3$, en dat is $\frac{6}{2}$, dus wat rechts staat komt boven.
Als je bijvoorbeeld doet $5 \times 2 = 10$, en je wilt die 5 naar rechts brengen, dan wordt het "gedeeld door vijf": $2 = 10 : 5$.
Dus "vijf maal" naar rechts, wordt "gedeeld door vijf".
Je moet dus doen $x = \frac{b}{a}$.
Je kunt zien of het antwoord klopt als je het invult in de beginvergelijking.
Je kunt links en rechts delen door a.
– $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.
Neem bijvoorbeeld $(2 + 3)(4 + 5)$, dat is 5×9, uitkomst 45. Je kunt ook doen $2 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 4 + 3 \times 5 = 8 + 10 + 12 + 15$, uitkomst ook 45.
Dat kan bij alle getallen zo.
Daar kan ik een plaatje bij tekenen:

ac	bc	c
ad	bd	d
a	b	

Dat zie je als je de boogjes erbij zet: $(a + b)(c + d)$

– De cirkel met middelpunt (m_1, m_2) en straal r heeft als vergelijking $(x - m_1)^2 + (y - m_2)^2 = r^2$.
Neem bijvoorbeeld $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 25$. Dat is de cirkel met straal 5 en middelpunt (5, 2). Teken maar

een plaatje, en reken maar na. Voor de punten op de cirkel klopt het en voor de punten buiten of binnen de cirkel klopt het niet. Bedenk zelf ook voorbeelden en controleer die op deze manier.
- Zie het voorbeeld van de abc-formule in de inleiding van dit artikel.
- Hoe zit het ook alweer met de afgeleide van $x \rightarrow \sin x$? Neem de grafiek van sinx en bekijk de raaklijn in een flink aantal punten. De tangens van de hellingshoek geeft steeds de waarde van de afgeleide functie. Ga maar na, dat zijn precies de waarden van cosx.

Concrete *voorbeelden* hebben vaak een grote overtuigingskracht. Vooral ook omdat een concreet geval zoveel makkelijker te *controleren* is dan het algemene. Een *plaatje* maken helpt vaak ook. Verder het zoeken naar *ervaringen* die de vanzelfsprekendheid bevestigen. In de loop van de tijd heb je ervaren dat die vanzelfsprekendheid iets is waar je wat aan hebt, je bent er waarde aan gaan hechten.
Door de illustratie, en door het zoeken naar voorbeelden, ervaringen en controlemogelijkheden krijg je langzamerhand door waar het precies om draait. Je begint de vanzelfsprekendheid te doorzien. Het is niet iets ongrijpbaars meer, maar je ziet er structuur in. Je kunt er daardoor beter over praten. Het gaat dus op het tussenniveau om de inductieve manier van werken.
Weer een paar opmerkingen voor ik verder ga.
- Voorbeelden kunnen gemakkelijk bedriegen. Vooral als er te weinig of als ze eenzijdig zijn. Het is zaak handig met de voorbeelden om te gaan. Als er twijfel blijft, is het nodig te proberen op bewijsniveau zekerheid te krijgen.
- In probleemsituaties is het vaak zo dat je niet ziet om welke vanzelfsprekendheid het gaat. Dan kom je er al puzzelend met voorbeelden en plaatjes achter hoe de vork in de steel zit. Er zijn dus twee instapmogelijkheden voor de leraar; hij kan zeggen:

"Kijk dit is de formule, je kunt dat doorzien aan de hand van deze en andere voorbeelden". Zo gaat dat meestal bij de abc-formule.
"Dit is de probleemsituatie, probeer eens of je de bijbehorende oplossing kunt vinden".
Het is niet om het even welke van de twee u kiest, daar kom ik later nog op terug.
- Op het vanzelfsprekendheidsniveau is de zekerheid vooral een zeker voelen. Bij een vanzelfsprekendheid vraag je je meestal niet af "Klopt dit wel?" Komt die vraag wel bij je op, en ga je door voorbeelden en dergelijke het terrein verkennen, dan krijgt je gevoel van zekerheid langzamerhand steun van het zeker weten.

Het Bewijsniveau

Het kan zijn dat een redenering op tussenniveau niet meer bevredigend is. Dan moet de zaak logisch aangepakt worden. Je neemt geen genoegen meer met voorbeelden, je wilt een redenering waar alle voorbeelden inpassen. Dan doen zich een paar opmerkenswaardige verschijnselen voor.
- Je kunt niet alles bewijzen.

In een bewijs maak je gebruik van allerlei dingen die je al zeker weet. Ook die dingen zou je moeten bewijzen; en ook in die bewijzen baseer je je weer op dingen die je al zeker wist. Op die manier kun je nog wel een paar stappen doorgaan, maar je kunt niet aan de gang blijven. Ergens moet je gebruik gaan maken van dingen waar geen bewijzen meer aan is, axioma's. Onbewezen uitgangspunten.
Het is een hele klus uit te zoeken wat nog wel bewijsbaar is en wat niet.

- Nieuwe definities vervangen de oude.

Als je op het tussenniveau zekerheid wilt hebben over de differentieerbaarheid van de functie e^x, dan bedenk je dat die functie een mooie gladde grafiek heeft die dus overal een raaklijn heeft. Dat zit dus wel goed. Impliciet gebruik je daarbij de definitie: De afgeleide functie van e^x is de functie die voor elke x de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van e^x in het punt (x, e^x), als functiewaarde heeft.
Als je echter echt wil gaan bewijzen dat e^x differentieerbaar is, dan kun je met die definitie niet goed uit de voeten. Dan moet je gaan praten over het differentiequotient $(e^{x+h} - e^x) : h$, en daar dan weer de limiet van.
Je vraagt je af waarom je dan niet meteen de definitie van de limiet van het differentiequotient gebruikt. Wel, voor beginners is die veel te moeilijk, te ondoorzichtig, niet beeldend genoeg. En voor gevorderden is die onnodig ingewikkeld, die hebben aan het eenvoudige beeld genoeg op het tussenniveau.

Nog een paar voorbeelden.
Continu is op het tussenniveau: je kunt de grafiek tekenen zonder je potlood van het papier te nemen. Op het bewijsniveau kun je daarmee niet uit de voeten. Dan moet het ingewikkelder en precieser.
Limiet is op het tussenniveau iets met "hoe langer hoe dichter", wat met veel voorbeelden pas duidelijk wordt. Op het bewijsniveau komen er epsilon- en delta-omgevingen aan te pas.
Een *verzameling* krijg je op het tussenniveau door gewoon wat dingen bij elkaar te doen; het is nauwelijks de moeite waard zoiets een naam te geven. Op het bewijsniveau merk je dat je daar wat precieser mee om moet gaan als je paradoxen wilt vermijden.

- Met stellingen is net zo iets aan de hand. Bij het bewijzen merk je vaak pas goed hoe het in elkaar zit en hoe je hem precies het beste kunt formuleren. Er zijn allerlei soorten bewijzen. De implicatie speelt een centrale rol. Typisch voor het bewijsniveau is, dat de moeilijkheid van de omkeerbaarheid van een stelling nu aangepakt kan worden.

Bewijzen zijn objectief; de mensen zijn het er wel over eens. Het is nu echt een kwestie van zeker weten, dat maakt dat je je zeker voelt van je zaak. Op het bewijsniveau is de manier van werken deductief.

Weer een aantal losse opmerkingen.
- Bij het werken aan wiskunde is er dus een ontwikkeling in de zekerheid. Van (eventueel van anderen overgenomen) vanzelfsprekendheid, via voorbeelden controle en ervaring, naar bewijs.

Twee vrij vertaalde citaten ondersteunen het idee dat je niet zomaar aan het bewijzen kunt slaan:
J. von Neumann: "Als je een bewijs wilt gaan leveren van een stelling, zul je moeten zorgen zeker een dag of tien van te voren overtuigd te zijn van de juistheid van

die stelling."
N. Bourbaki: "Natuurlijk weet elke wiskundige dat je een bewijs nog niet goed snapt als je niet meer gedaan hebt dan stap voor stap nagaan of de in het bewijs getrokken conclusies juist zijn, en je niet geprobeerd hebt te doorzien welke ideeën juist tot deze bewijsvoering geleid hebben en niet tot een andere." De zekerheid van het bewijsniveau wordt niet op zichzelf ontwikkeld, maar die ontwikkeling is gebaseerd op de zekerheid van het tussenniveau. Belangrijk is in te zien, dat wat op het tussenniveau zekerheid geeft, geen slap aftreksel is van wat op het bewijsniveau gebeurt. Dat geven de woorden inductief en deductief al aan. Op het bewijsniveau wordt echt op een heel andere manier gewerkt.

– Er zijn voor iedereen dus vanzelfsprekendheden die hij op het tussenniveau kan verantwoorden, of zelfs kan bewijzen. Het is duidelijk dat je niet elke keer als je zo'n vanzelfsprekendheid gebruikt, er ook de verantwoording bijgeeft. Je kunt niet aan de gang blijven. Het kan echter zijn, dat door het altijd maar weglaten van de verantwoording, de fundering onder de vanzelfsprekendheid verdwijnt. De verantwoording wordt dan op den duur onmogelijk. Daar zijn in het onderwijs talloze voorbeelden van. Denk bijvoorbeeld aan "x naar links wordt $-x$", of "onder en boven hetzelfde wegstrepen".

– Het niveau van zekerheid dat je wilt bereiken hangt af van een aantal factoren. Het gaat om belangstelling, interesse, betrokkenheid. Mensen ontwikkelen ook een gevoel dat hen waarschuwt als er mogelijk iets niet klopt, en dat hen dan naar meer zekerheid doet zoeken. De behoefte aan een hoger niveau van zekerheid hangt dus samen met gevoelens van twijfel, met nieuws- of weetgierigheid, met verantwoording af moeten of willen leggen.
In de wiskunde staat de houding te willen controleren wat je doet centraal. Te letten op allerlei signalen die informatie geven over de kwaliteit van je werk. Signalen die bevestigen wat je hebt gevonden. En alarmsignalen, rode lampjes, die waarschuwen niet op deze weg voort te gaan. Dit gebeurt op den duur zo automatisch, onbewust, dat je alleen maar een gevoel van zekerheid of onzekerheid merkt. Een zekere rust of onrust met betrekking tot waar je mee bezig bent.

– Op het tussenniveau komen aanzetten voor van een echte sluitende redenering. Kleine stukjes logisch denken die later als onderdeel of aanzet van een echt bewijs kunnen gaan functioneren. Bij het merkwaardige product bijvoorbeeld, is dat het plaatje. Bij een vergelijking: "Je kunt links en rechts delen door a". Bij de abc-formule het oefenen van kwadraatafsplitsen met getallenvoorbeelden.

Wat betekent dit voor het wiskunde-onderwijs?

Ik denk dat uit het bovenstaande heel concrete aanwijzingen volgen. Daarvan geef ik eerst een negental voorbeelden.
Wie met minder voorbeelden toekan bladere op een gegeven moment door naar "Theorie".

Voorbeelden

Vb. 1. Uit *Getal en Ruimte* NB 1, 9e druk, Educaboek, 1978

§ 4: De verdeeleigenschap

Je weet al, dat je in $\mathbb{N}$ de som van gelijksoortige termen korter kunt schrijven.

Zo is bijv. $6a + 2a = (6 + 2) \cdot a = 8a$
$8ab + ab = 8ab + 1ab = (8 + 1) \cdot ab = 9ab$
$2a^2b + 2a^2b = (2 + 2) \cdot a^2b = 4a^2b$

De regel die je hierbij gebruikt, is in formulevorm
$$pa + qa = (p + q) \cdot a.$$

Het maalteken mag achter een haakje worden weggelaten. We schrijven dus

$$\boxed{pa + qa = (p + q)a}$$

We noemen deze regel de *verdeeleigenschap*. Deze eigenschap wordt ook de distributieve eigenschap genoemd.

De verdeeleigenschap geldt in $\mathbb{Q}$.
De verdeeleigenschap geldt dus ook in $\mathbb{N}$ en in $\mathbb{Z}$.

Voorbeelden:
$2a + -7a = (2 + -7)a = -5a$
$-5bc + 9\frac{1}{2}bc = (-5 + 9\frac{1}{2})bc = 4\frac{1}{2}bc$
$-2\frac{1}{3}a^2b + a^2b = (-2\frac{1}{3} + 1)a^2b = -1\frac{1}{3}a^2b$
$-\frac{1}{3}xy^2 + -2xy^2 + (-\frac{1}{3} + -2)xy^2 = -2\frac{1}{3}xy^2$

Het gaat hier om de dikgedrukte bewering "De verdeeleigenschap geldt in $\mathbb{Q}$". De voorbeelden onderaan *illustreren* de eigenschap, ze geven geen *ondersteuning*. Een ondersteunend voorbeeld is:
$(2 + 4) \times \frac{1}{2}$ kun je op twee manieren uitrekenen:
$(2 + 4) \times \frac{1}{2} = 6 \times \frac{1}{2} = 3$
$(2 + 4) \times \frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{2} = 1 + 2 = 3.$
Er komt steeds hetzelfde uit.
Dit en meer van dergelijke voorbeelden behelzen niet alleen de mededeling over de verdeeleigenschap in $\mathbb{Q}$, maar ze geven bovendien de overtuiging dat het klopt. Die overtuiging kan nog versterkt worden door de leerlingen zelf dergelijke voorbeelden te laten bedenken, en bijvoorbeeld te laten zoeken naar voorbeelden waarbij het niet klopt.
Dit schoolboek biedt hier niet meer dan vanzelfsprekendheid op basis van autoriteit. Het is gemakkelijk een hoger zekerheidsniveau te bereiken. Leerlingen die de verdeeleigenschap voor natuurlijke getallen kennen en daar voorbeelden bij kunnen geven kunnen natuurlijk ook voorbeelden bedenken met gebroken en negatieve getallen. Ze merken dan snel dat het in $\mathbb{Q}$ net zo gaat als in $\mathbb{N}$.
Op bewijsniveau zou uit de doeken gedaan kunnen worden hoe de vork precies in de steel zit. Dat is voor de meeste leerlingen onbereikbaar. Dat is echter geen reden om ze ook de zekerheid van het tussenniveau te onthouden.

Vb. 2. Uit *Moderne Wiskunde* 5 hv, 3e druk, Wolters Noordhoff, 1976:

Tot nu toe hebben we ons uitsluitend bezig gehouden met cirkels die hun middelpunt in O hebben.
Hoe ziet nu de vergelijking van een cirkel eruit als zijn middelpunt niet met O samenvalt?

In figuur 2.2 zijn twee cirkels getekend. De ene cirkel met O als middelpunt heeft als vergelijking $x^2 + y^2 = 5$.
De andere cirkel is de beeldfiguur van de eerste bij een translatie over de vector $\binom{5}{2}$.

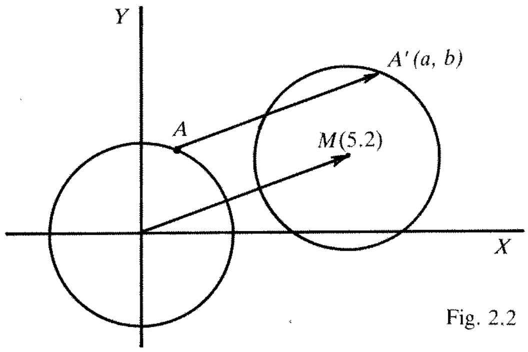


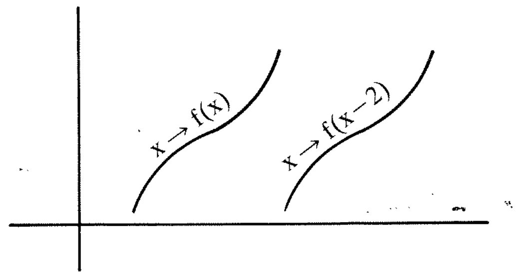
Fig. 2.2

$A' = (a, b)$ is een punt van de beeldfiguur.
We willen nu weten welke betrekking er tussen a en b bestaat.
Om die te vinden kijken we naar het origineel van A' bij deze translatie. Dat is het punt A waarvan we de coördinaten kunnen voorstellen door $(a - 5, b - 2)$. Ga dit na.
Omdat A een punt van de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 5$ is, moet $(a - 5)^2 + (b - 2)^2 = 5$ zijn.
Hieruit blijkt dat (a, b) een element is van de relatie

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 5\}$$

De vergelijking van de cirkel met middelpunt (5, 2) en straal $\sqrt{5}$ is dus: $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 5$

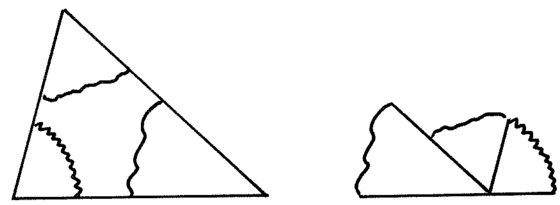
Wat op school met dit gedeelte meestal gebeurt, is dat de leerlingen eruit leren hoe je bij een gegeven middelpunt en een gegeven straal de bijbehorende cirkelvergelijking opstelt. De afleiding die tot de laatste zin leidt, blijft daarbij ondoorzichtig en overbodig in de visie van de leerlingen.
Ik heb er niet zo'n bezwaar tegen om dan maar met die laatste zin te beginnen. De afleiding mikt te veel op de zekerheid van het bewijsniveau, daar zijn de leerlingen nog niet aan toe. Dat hoeft echter geen reden te zijn het bij het kunstje van het opstellen van de vergelijking te laten. De zekerheid van het tussenniveau is haalbaar:
Laat van een paar punten op de cirkel zien dat het klopt, en van een paar punten buiten de cirkel dat het niet klopt. En laat de leerlingen dat ook doen voor een cirkelvergelijking die ze zelf opstellen. Dan kunnen ze er vertrouwen in krijgen dat het correct is wat u ze voorschotelt, en dat vertrouwen is dan gebaseerd op eigen ervaring met eigen voorbeelden en eigen controlemogelijkheden.
Er zullen ook situaties zijn waarin het niet nodig is de cirkelvergelijking zonder meer te geven. Als bijvoorbeeld in het verleden gewerkt is aan het verschuiven van de grafiek van een functie, dan kan daar voor de leerlingen de suggestie van uitgaan dat het hier op een dergelijke manier zal moeten gaan.



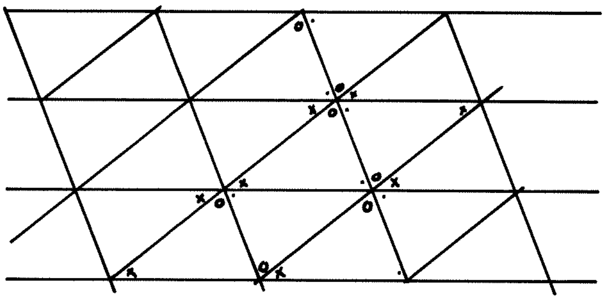
De vergelijking komt dan niet zo uit de lucht vallen en er zullen minder ondersteunende voorbeelden nodig zijn.

Vb. 3. Ik kom terug op de abc-formule.
Voor het overgrote deel van de leerlingen is de afleiding te hoog gegrepen. Eén variabele is voor hen al moeilijk, vier variabelen is te erg. Laat voor die leerlingen de afleiding dan ook maar achterwege. Instrueer ze wel zorgvuldig hoe ze de formule zo kunnen gebruiken, dat de kans op fouten klein is. Geef hun daarnaast de ervaring dat het klopt als je het zo doet, als u in de voorbeelden liet zien. In de inleiding noemde ik daarvoor een aantal mogelijkheden om te controleren wat je doet.
Leerlingen die u naar het bewijsniveau wilt helpen zullen thuis moeten raken in de methode van het kwadraat afsplitsen, met behulp van getallenvoorbeelden. Belangstelling voor het afleiden van de formule komt bij de meeste leerlingen pas na jaren; dan gaat het van een leien dakje.

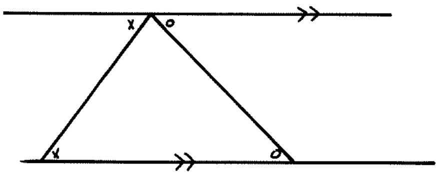
Vb. 4. De som van de hoeken van een driehoek.
Op het vanzelfsprekendheidsniveau spelen concrete voorbeelden een rol, en tastbaar maken.



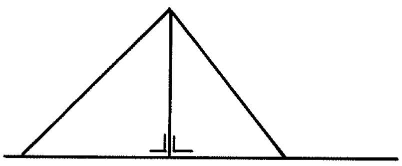
Hier bijvoorbeeld kunnen leerlingen een driehoek uitknippen, de hoeken er afscheuren en die naast elkaar leggen. Als alle leerlingen van de klas een eigen driehoek tekenen en knippen, dan zal het al gauw duidelijk zijn dat het individuele resultaat niet toevallig is, maar dat het hier om een algemene regel gaat.
Ook tegelpatronen van congruente driehoeken kunnen helpen. Laat de leerlingen gelijke merktekens in gelijke hoeken zetten. Bekijk dan de hoeken van één driehoek en de hoeken om één hoekpunt. De leerling ziet voor ogen wat er aan de hand is en bovendien dringt zich de regel dat gelijke Z-hoeken en evenwijdige lijnen samengaan aan hem op. Dat geeft hun een stukje van het axiomatische systeem in handen waarin



echt bewezen kan worden dat de som van de hoeken van een driehoek 180° is. Dat stukje op zichzelf is nog geen bewijs, maar op het tussenniveau werkt het over-



tuigend. Hetzelfde geldt voor de methode waarbij wordt uitgegaan van rechthoeken. Een rechthoekige driehoek krijg je door een rechthoek langs een diagonaal doormidden te knippen.



Een loodlijn uit de top verdeelt deze driehoek in twee rechthoekige driehoeken. Daaruit is gauw duidelijk dat de scherpe hoeken samen 180° zijn. Op deze manier raakt de leerling thuis in dit gebied van de meetkunde, zonder het naadje van de kous te weten. De axiomatische opzet is nog ver weg.

Vb. 5. Uit *Moderne Wiskunde* 1, 4e druk, Wolters-Noordhoff, 1972

10 Schrijf acht drievouden op te beginnen bij 12, dus 12, 15, 18, enz.
Schrijf onder elk van deze drievouden hoeveel de cijfers van dat getal samen zijn.
som van de cijfers Bijvoorbeeld: de *som van de cijfers* van 18 is 1 + 8 = 9. Onder het getal 18 schrijf je dus 9. Onder het getal 24 schrijf je 6. Waarom?
Waaraan kun je zien dat een getal een drievoud is?

11 Schrijf acht veelvouden van 3 op te beginnen bij 279.
Reken weer van elk van deze getallen de som van de cijfers uit.
Vind je weer dezelfde bijzonderheid als in opdracht 10?

12 a. Is 15264 een drievoud? Hoe onderzoek je dat?
b. Is 26288 deelbaar door 3?

Een getal is deelbaar door 3 als de som van zijn cijfers een drievoud is.

In de opdrachten 10 en 11 worden voorbeelden gegeven van de regel: Van een getal is de som der cijfers een drievoud, als dat getal zelf een drievoud is.
De conclusie in de cursief gedrukte regel is het omgekeerde daarvan!
Beide regels zijn correct:
Als een getal een drievoud is, dan is de som der cijfers een drievoud; èn
Als de som der cijfers een drievoud is, dan is dat getal een drievoud.

Opmerkelijk is dat de schrijvers deze vergissing maken. Maar opmerkelijker is dat dit het leerproces van de leerlingen niet verstoort.
Ze leren: "Een getal dat een drievoud is, en een cijfersom die een drievoud is, horen bij elkaar".
Datzelfde komt bijvoorbeeld voor in de regel: Gelijke Z-hoeken en evenwijdige lijnen gaan altijd samen.
Het illustreert hoe moeilijk het is om stelling en omgekeerde stelling uit elkaar te houden. Dat maakt van het formuleren van stellingen voor leerlingen een hachelijke zaak. De leraar doet zijn best om kort en duidelijk te zeggen waar het om gaat, maar de leerlingen zijn kennelijk niet altijd in staat om de fijne nuances te horen in wat hij zegt. Ook al is het goed Nederlands.

In huis-tuin-en-keukentaal gebruiken leerlingen alsdan-beweringen gemakkelijk correct, "Als het regent dan ga ik niet zwemmen". En ze zullen die stelling niet met zijn omgekeerde verwarren. Het gebruik in de wiskunde ligt kennelijk moeilijker. Dat eist een gedegen voorbereiding. Ik ga daar nu niet verder op in.

Vb. 6. Afgeleide functie.

Het is gebruikelijk de afgeleide functie te definieren met behulp van de limiet van het differentiequotient

$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ voor $h \to 0$.

Die opzet maakt van de afgeleide iets waarbij je je moeilijk iets kunt voorstellen. Ik zou graag op een andere manier willen beginnen, een aanpak die niet onnodig vooruitgrijpt op het bewijsniveau: Niet de limiet centraal stellen, maar de hellingshoek van de raaklijn aan de grafiek. De tangens van die hellingshoek is de waarde van de afgeleide functie. Meteen is duidelijk hoe je differentieerbare functies aan hun grafiek kunt herkennen: er mogen geen scherpe punten aanzitten. Op die manier kun je bij elke differentieerbare functie een schets maken van de grafiek van de afgeleide functie. Zo kun je aannemelijk maken dat de cosinus de afgeleide is van de sinus, $x \to 3x^2$ de afgeleide van $x \to x^3$, en dergelijke.

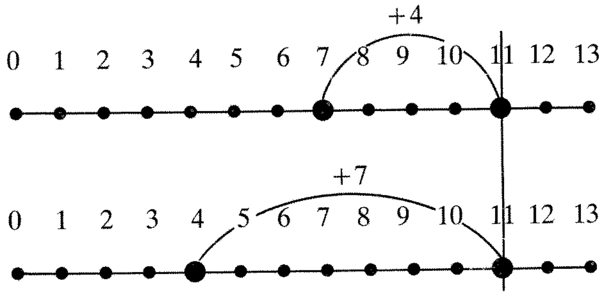
Op het tussenniveau is er zodoende heel wat uit te vinden. Pas als de zekerheid van het tussenniveau niet meer voldoet, zal het geschut van het bewijsniveau in stelling gebracht moeten worden. De definitie met de limiet van het differentiequotient maakt het mogelijk eerder ontdekte verbanden echt te bewijzen. Als de bewijzen eenmaal geleverd zijn is de exacte definitie in veel gevallen eerder storend dan ondersteunend. De leerling kan dan weer teruggrijpen naar de visuele voorstelling waarmee hij begonnen is.

Vb. 7. Uit *Wiskunde op Moderne Basis* deel 1 LBO abc, Leiden '75:

3 Is volgorde belangrijk?

In figuur 9 zijn twee getallenlijnen onder elkaar getekend. Op de bovenste lijn zien we de optelling 7+4. Op de onderste lijn zien we de optelling 4+7. In beide gevallen is het antwoord 11.
We zien dus:

7+4=4+7



Figuur 9

Bij optellen mag je beide getallen gerust verwisselen. Dit is een eigenschap bij optellen. Deze eigenschap geven we dan ook wel de naam van wisseleigenschap. Of ook wel commutatieve eigenschap.

8 In figuur 10 zijn twee getallenlijnen getekend. De getallen zijn er nog niet op afgebeeld. Doe dit zelf en laat zien dat 6+5=5+6. Wat wordt het antwoord?

Figuur 10

Er wordt hier de aandacht gevestigd op een eigenschap van natuurlijke getallen die de leerlingen al vanouds kennen en kunnen hanteren. Wat zit erachter dat deze eigenschap in de brugklas aan de orde komt? Verrijking van de kennis tot op het tussenniveau lijkt haalbaar. Je zou dan moeten herinneren aan het bekende feit dat 7 + 4 wel gelijk is aan 4 + 7, maar dat 4 − 7 niet gelijk is aan 7 − 4. En dan eens nagaan hoe dat zit met andere getallen en andere gebruikelijke bewerkingen. Zo komt er dan wellicht een rijkere structuur op het tussenniveau.
Wat in deze tekst gebeurt lijkt op een poging te willen doordringen naar het bewijsniveau. Als je op bewijsniveau wilt verantwoorden dat voor elke a en b in $\mathbb{N}$ a + b = b + a, dan zul je dat heel anders moeten aanpakken. Wat hier gebeurt is de commutativiteit van de optelling van natuurlijke getallen verantwoorden met de commutativiteit van de optelling van vectoren. Maar deze laatste is in feite even mysterieus als de eerste.
Deze gang van zaken geeft de leerling weinig houvast en nauwelijks mogelijkheden te controleren wat hij doet.
Als je al de aandacht wilt vestigen op de verwisselbaarheid van de 4 en de 7 in 4 + 7 = 11, maak dan gebruik van de aanwezige ervaring. Niet dat moeilijke middel van de vectoren, maar concreet.
Bijvoorbeeld:
- 4 stappen en nog 7 stappen brengen je even ver als 7 stappen en nog 4 erbij;
- 4 gulden en nog 7 erbij is evenveel als 7 gulden en dan nog vier erbij.

Op de wijze van het boek is geen ontwikkeling in het begrip te verwachten. Wat de leerlingen leren is wellicht het kunstje met de pijlen uitvoeren. Verduidelijking is onnodig, ondersteuning is op deze manier weinig effectief.
De vraag naar het antwoord van het sommetje 5 + 6 = zal bij leraar en leerling de vraag naar de zin van zoiets oproepen.

Vb. 8. Uit *Sigma* 2mh Groningen 1979:

5.10 (x − 2) (x − 3) = 0

Los x in $\mathbb{Q}$ op uit
$(x-2)(x-3)=0$
Eerst een korte inleiding.
Wanneer is een produkt gelijk aan 0?
Denk aan
$5 \cdot 0 = 0 \quad 0 \cdot 5 = 0 \quad 0 \cdot 0 = 0 \quad 5 \cdot 8 \neq 0$
($\neq$ betekent: is niet gelijk aan)
Je ziet hieruit:
produkt = 0 $\Leftrightarrow$ een van de factoren = 0
(allebei mag ook)
Nu gaan we de vergelijking oplossen.
$(x-2)(x-3)=0 \Leftrightarrow$
$x-2=0 \vee x-3=0 \Leftrightarrow$
$x=2 \quad \vee x=3$
De oplossingsverzameling is $\{2, 3\}$.

Voorbeeld *Los* x in $\mathbb{Q}$ op uit
$x(x+6)=0$

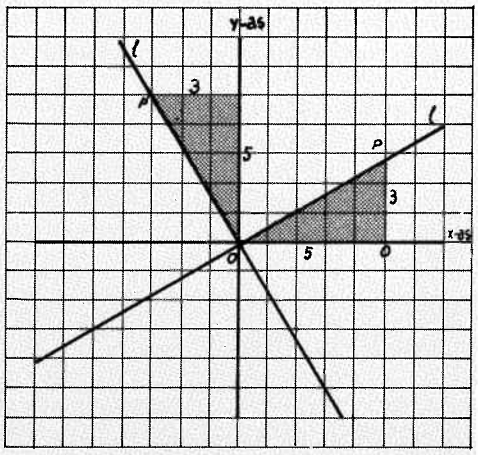
Oplossing
$x(x+6)=0$
$x=0 \vee x+6=0$
$x=0 \vee x=-6$
De oplossingsverzameling is $\{0, -6\}$.

Wat gebeurt hier?
Er is een probleem, de vergelijking (x − 2)(x − 3) = 0. Drie voorbeelden en een non-voorbeeld van de auteurs leiden tot de benodigde stelling. Die stelling wordt toegepast. En dan nog een compleet voorbeeld van hoe het moet.
Ik schat dat dat ook zal zijn wat de leerlingen leren: hoe het moet.
Als u het werkschema van het boek zou willen volgen, dan zal de leerling toch vóór de stelling gelegenheid moeten krijgen zelf vermenigvuldigingen te bedenken die nul als antwoord hebben, en andere waar geen nul uitkomt. Zodat hij kan ervaren dat de stelling klopt. En aan het eind de oplossing substitueren zodat hij ziet dat het antwoord goed is, en hij een eigen controlesysteem opbouwt.
Maar liever zou ik de leerlingen direct met de vergelijking aan het werk zetten. Hen allerlei getallen laten proberen, ook in andere voorbeelden. Zo ontdekken ze gauw genoeg hoe ze de oplossing kunnen vinden. Dan de stelling met nog wat getallenvoorbeelden van mij en van hen. De formele notatie komt daarna wel.

Vb. 9. Uit *Sigma* 4m, Groningen 1981:

In figuur 6.9 is een rechte lijn l getekend door de oorsprong. De lijn gaat verder door het punt $P(5,3)$. De richtingscoëfficiënt van l is dus $\frac{3}{5}$.

Figuur 6.9



Roteer om O over een hoek van 90° in positieve richting. Het beeld van l is de lijn l'. Het beeld van ΔOQP is $\Delta OQ'P'$.
Zoals je in de figuur ziet is P' dan het punt $(-3,5)$.
De lijn l' gaat dus door O en P' $(-3,5)$.
De richtingscoëfficiënt van l' is dan $-\frac{5}{3}$.

Dus:

$l \perp l' \rightarrow$ richtingscoëfficiënt $\frac{a}{b}$ en $-\frac{b}{a}$

als $l \perp l'$ en de richtingscoëfficiënt van l is $\frac{3}{5}$, dan is de richtingscoëfficiënt van l' gelijk aan $-\frac{5}{3}$.
Met andere richtingscoëfficiënten gaat het net zo.

Eén voorbeeld is wel wat weinig, en zeker als het zoiets bijzonders is als twee lijnen die elkaar in de oorsprong snijden. Wiskundigen weten wel dat dat in feite niet zo bijzonder is, want door een geschikte translatie krijg je elk snijpunt in de oorsprong. En bij een translatie blijven de hoeken gelijk en het verband tussen de richtingscoëfficiënten waar het hier om gaat ook wel. Maar dat ontgaat de gemiddelde 4m-leerling. Hij baseert zich op de autoriteit van het boek dat zegt dat het met andere richtingscoëfficiënten net zo gaat. Een gemiste kans. Zekerheid op tussenniveau is haalbaar door de leerlingen zelf maar eens een poosje aan het tekenen te zetten, zodat hun ervaring de stelling bevestigt. Dat bevordert bovendien de groei van hun eigen controlesysteem. Dat geeft houvast.

Neem zelf ook eens wat leerboeken ter hand. Zoek de rode regels en probeer commentaar te leveren op wat tot die rode regels leidt.

Let met name op deze punten:
– Probeer gepopulariseerde denkwijzen van het bewijsniveau te ontmaskeren.
– Krijgt de leerling gelegenheid een eigen zekerheid op te bouwen door ervaring op te doen en met eigen voorbeelden te werken?
– Wordt er gewerkt aan de opbouw van een eigen controlesysteem?
– Wordt er waar mogelijk voldoende gebruik gemaakt van de exploratiedrang van de leerling. Tovert het boek de stelling niet te gemakkelijk uit de hoed? Anderzijds, wordt de leerling in dit opzicht niet overvraagd?
– Wordt er voldoende gebruik gemaakt van ervaringen die de leerling al heeft?
– Geven de voorbeelden voldoende verduidelijking èn ondersteuning?
– Geeft het boek de leerling voldoende houvast?

Theorie

Ik wil nu proberen de betekenis die ik zie voor het wiskundeonderwijs onder woorden te brengen.

Eigen zekerheid en controlemogelijkheden

Het "wis" van "wiskunde" is voor mij niet iets dat in de boeken staat, maar de eigen zekerheid van ieder die met wiskunde bezig is. Iets subjectiefs, iets persoonlijks dus, in principe. In veel gevallen uitwisselbaar gelukkig. De waarde die ik bij mezelf ervaar is velerlei; ik noem een aantal punten.
– Ik heb er oog voor dat niet alles wat ik *bedenk* of *verneem* betrouwbaar is; meestal zit het wel goed.
– "Zeker zijn" heeft twee kanten; het kan betekenen dat ik me zeker *voel*, en het kan zijn dat ik iets zeker *weet*.
Mijn (on)zekerheidsgevoel is een soort ingebouwde kwaliteitscontrole. Door schade en door schande heb ik een systeem ontwikkeld dat me helpt alert te zijn op allerlei signalen over de kwaliteit van wat ik doe, denk of verneem. Ik hoef me daarom niet altijd ongerust af te vragen "Is dat wel goed?"
M'n gevoel waarschuwt me wel als er iets is.
– Naast het *gevoel* van twijfel of zekerheid is er dus de *verstandelijke* kant.
Ik weet meestal hoe ik mezelf en anderen kan controleren, in bepaalde opzichten ben ik daar ook handig in geworden. Ik let niet alleen op signalen die "vanzelf" komen, maar ik ben ook actief in het verrichten van allerlei controles, in het zoeken van een bevestiging of een ontkenning van iets waar ik onzeker over ben. Ik weet ook zo'n beetje wie, of wat in mij, betrouwbaar is en wie of wat niet. Dat hangt natuurlijk af van het onderwerp waar het over gaat en van de situatie waarin ik zit.
– Ik ben me ervan bewust dat mijn controlemethodes niet allemaal zo degelijk zijn, en dat ik het risico loop me door de schijn van een verkeerd voorbeeld of van een te kleine steekproef te laten bedriegen. Ik vertrouw er maar op dat mijn waarschuwingssysteem me niet in de steek laat. Als het echt belangrijk wordt vertrouw ik niet op m'n gevoel alleen. Dan heb ik meestal wel middelen om mezelf de zekerheid te verschaffen die ik nodig heb.

Omgaan met (on)zekerheid

Een belangrijke waarde van het wiskundeonderwijs is, leerlingen te leren met hun (on)zekerheden om te gaan:

– Het opbouwen van een eigen controlesysteem, gevoelsmatig maar ook verstandelijk, en daar handig mee leren omgaan.

– Het besef dat het geen schande is (ook in de wiskunde niet) zo nu en dan af te gaan op betrouwbare informanten.

– Het besef dat het in de wiskunde barst van de vanzelfsprekendheden, en dat je er niet aan kunt beginnen die altijd maar te verantwoorden. Maar dat het wel nodig is om in twijfelgevallen te kunnen verantwoorden wat je doet en denkt.

– Het besef dat verantwoorden niet altijd betekent "een formeel bewijs leveren", maar dat in de meeste gevallen eenvoudiger controlemogelijkheden voldoende zijn.

De stelling al in het begin of pas aan het eind?

Vroeger had je in wiskundeleerboeken een vaste volgorde: stelling, bewijs, oefenopgaven. Dat willen we niet meer zo op school. We willen dat de leerling minder kant en klaar voorgeschoteld wordt, en meer zelf ontdekkend bezig is. We hebben ook zoiets als de opmerking van Bourbaki in het achterhoofd. Dat maakt het er voor de leerling niet steeds gemakkelijker op. Het systeem geeft hem vaak weinig houvast, hij weet niet goed waar de leraar heen wil, of hoe hij dat denkt te bereiken. Voor sommige leerlingen is dat een uitdaging, voor anderen is dat teveel gevraagd. Leerlingen die veel houvast en veiligheid nodig hebben, zijn gebaat met een leersituatie waar niet teveel probleem inzit. Meer: "Kijk dat zit zus en zo in elkaar...", en minder: "Probeer eens te ontdekken...". Dat betekent dat je als leraar oog zult moeten hebben voor de behoeften van de leerlingen in dit opzicht, en dat je aan de hand daarvan kiest hoe je de leersituatie zult inrichten. Veel of weinig mededelingen, veel gesloten vragen of juist erg open opdrachten, "dicht bij" de leerling blijven of hem wat meer aan zijn lot over laten.
In de voorbeelden 12 en 13 heb ik aangeduid hoe de leraar met de stelling kan beginnen, en daarna de leerling kan helpen een *eigen zekerheid* op te bouwen. Dit laatste, de eigen zekerheid, vind ik essentieel, hoe de keuze voor het inrichten van de leersituatie ook uitvalt.
Samengevat komt dit punt er op neer, dat de soort leiding die de leraar aan het leerproces van de leerling geeft, afhangt van hoeveel leiding de leerling nodig heeft en hoeveel vrijheid hij aankan. Ik heb daarbij de woorden "houvast" en "veiligheid" genoemd; ik denk dat dat centrale begrippen zijn.

Houvast en veiligheid

Bij elk leerproces is het van belang dat de leerling voldoende houvast heeft en een zeker gevoel van veiligheid. Bij gebrek aan houvast is de leerling gedesoriënteerd en zal hij niet kunnen plaatsen wat de leraar zegt. En als de leerling zich niet veilig genoeg voelt, moet hij voortdurend op zijn hoede zijn voor wat hem nu weer boven het hoofd hangt. Hij kan zich dan niet overgeven aan het leerproces, en zal daar misschien zelfs weerstand tegen ophopen.
Bij *houvast* gaat het erom dat de leerling verbinding kan leggen tussen enerzijds wat er gebeurt en wat er van hem gevraagd wordt, en anderzijds de daarvoor relevante kennis en vaardigheden die hij bezit, en wat hij wil. Begrijpt de leerling het probleem dat de leraar hem voorlegt en kan hij diens vraag plaatsen? Weet de leerling wat de bedoeling is en ziet hij wegen die naar dat doel leiden? Ziet de leerling het verband met het voorgaande en kan hij de relevante schema's oprakelen? Is de leerling thuis in de manier van werken die de leraar voorstelt? Kan hij zelf zien of het goed is wat hij aan het doen is?
Bij *veiligheid* gaat het om de relatie tussen leraar en leerling. Boezemt de leraar de leerling vertrouwen in? Veiligheid is: Geen dingen hoeven te doen waar je geen raad mee weet. Zoveel houvast hebben dat als je even de draad kwijt bent, je hem wel weer terug kunt vinden. Het gevoel rustig op de leraar te kunnen steunen, tot je zelf grond hebt gevonden om op te staan. En mocht er iets misgaan, de leraar is in de buurt, letterlijk en figuurlijk.
Een gevoel van veiligheid maakt dat je eens wat nieuws durft te proberen, dat je het risico durft te nemen dat er iets mislukt. Geen man overboord, we proberen het gewoon nog een keer.
Als de leraar met iets nieuws komt is de leerling voor zijn houvast erg afhankelijk van de leraar. Hij heeft dan in het algemeen veel veiligheid nodig om met het nieuwe aan de slag te kunnen gaan. Naarmate het leerproces vordert wordt de leerling ook hierin zelfstandiger. De leraar kan dat stimuleren: Aanvankelijk legt hij zelf de verbinding met het voorgaande en wijst op controlemogelijkheden. Later vraagt hij dat van de leerlingen, als ze dat al niet vanzelf doen.
In voorbeeld 2 (de cirkelvergelijking) is er in dit opzicht duidelijk iets mis. De schrijver weet welke formule hij aan het afleiden is, de leerling niet. De schrijver gebruikt methoden van het bewijsniveau, de leerling is daar nog niet aan toe. De schrijver heeft ervaren dat deze vorm van de cirkelvergelijking een handige vorm is waar je wat aan hebt, de leerling heeft die ervaring nog niet. De schrijver ziet hoe dit onderdeel in een groter geheel past, de leerling heeft dat overzicht nog niet. De leerling heeft gewoon te weinig houvast, en hij kan de schrijver niet meer volgen. Als hij niet afhaakt bekruipt hem wellicht toch een gevoel van onveiligheid, "Verwachten ze dat ik dit snap?", "Ik ben volledig de draad kwijt, hoe moet dat nu?"
Een zelfstandige en ervaren student zal veelal zelf voor zijn houvast en veiligheid kunnen zorgen. Een leerling in de lagere klassen van het voortgezet onderwijs heeft daarbij veelvuldig de leraar nodig; en dat geldt des te meer als leren moeizaam gaat.

Rekening houden met de niveau's van zekerheid

– In de *oriëntatiefase* ziet de leraar er op toe dat de leerling voldoende basisbegrippen op vanzelfsprekendheidsniveau gebruikt, en dat hij zichzelf daarbij kan controleren. Verder schat de leraar, in hoeverre de leerling zichzelf houvast en veiligheid kan verschaffen, en past de probleemsituatie daaraan aan.

– Bij de *ontwikkeling* van het nieuwe begrip of de

nieuwe regel gaat het in de eerste plaats om verduidelijkende en ondersteunende voorbeelden. Bij *verduidelijking* denk ik bijvoorbeeld aan: Bij de abc-formule laten zien hoe je hem zorgvuldig gebruikt. Bij de cirkelvergelijking er op wijzen hoe de coördinaten van het middelpunt en de straal, in de vergelijking terug te vinden zijn. Bij Pythagoras duidelijk maken dat je de letters a, b en c willekeurig over de zijden van de rechthoekige driehoek kunt verdelen. Bij de distributieve eigenschap vertellen dat er twee manieren zijn om 5 (4 + 3) uit te rekenen, en dat er steeds hetzelfde uitkomt.
Bij verduidelijken gaat het er dus om dat de leerling door voorbeelden doorkrijgt wat in het nieuwgeleerde belangrijk is om op te letten, en hoe hij het nieuwgeleerde moet gebruiken. Het gaat om het kennismaken.
Bij *ondersteuning* denk ik bijvoorbeeld aan: Eén en dezelfde vierkantsvergelijking zowel met de abc-formule als met andere middelen laten oplossen, en de ervaring dat je met de abc-formule elke vierkantsvergelijking de baas bent. In een cirkelvergelijking de coördinaten van allerlei punten op en buiten de cirkel laten invullen. De met Pythagoras berekende waarde vergelijken met wat je in de figuur kunt meten, en de ervaring dat deze stelling een handig hulpmiddel is dat correcte antwoorden oplevert. Het sommetje 5 (4 + 3) (en vele andere) op twee manieren laten uitrekenen en laten maken dat er steeds hetzelfde uitkomt, en verder de leerling ook zelf dergelijke sommetjes laten bedenken en op twee manieren uitrekenen.
Bij ondersteunen gaat het er dus om dat de leerling ervaart dat het klopt wat hij doet, dat het hem uit de problemen helpt, en dat hij leert gericht te controleren of wat hij doet goed is.
– Later, vaak pas veel later, zal de leerling begrijpen wat u bedoelt met: "Ja maar, bewijs dat nou eens!" De overtuiging is aanvankelijk bij de leerling zo sterk, dat méér zekerheid vragen in zijn ogen wartaal is. Hij kan uw vraag niet eens plaatsen, laat staan hem beantwoorden.
Als de leerling openstaat voor de vraag naar zekerheid op bewijsniveau, zal hij nog de vaardigheid moeten krijgen, te kunnen omgaan met de specifieke manier van werken van het bewijsniveau: Het deductieve denken in plaats van het inductieve, en de heel speciale manier van formuleren van allerlei begrippen en regels.
Het is goed dat de leraar daar voor die tijd alvast voorbeelden van laat zien. U moet zich daarbij wel realiseren dat zo'n voorbeeld lang niet altijd navolging vindt, en dat het voor veel leerlingen zelfs *afschrikwekkend* kan zijn. Het afschrikwekkende is vaak het consequent toepassen van de manier van werken van het bewijsniveau. Een enkele logische gevolgtrekking tussendoor lukt wel, daar komen de leerlingen zelf ook wel mee.

Naar hoger zekerheidsniveau

In het onderwijs zie je dat veel leerlingen alleen belangstelling hebben voor de vraag "hoe het moet". Het antwoord dat ze krijgen nemen ze dan voor zoete koek aan. "Meneer, is het bij u ook zo dat als in een vergelijking x naar rechts gaat, dat het dan −x wordt?" Ze nemen genoegen met het als vanzelfsprekend steunen op de autoriteit.

Je hoeft als leraar niet met je armen over elkaar te gaan zitten wachten tot de leerling behoefte krijgt aan een hoger zekerheidsniveau.
In tegendeel,
– je kunt twijfel zaaien; dit is een van de belangrijkste instrumenten van de leraar;
– een leerling die vaak "ter verantwoording geroepen" wordt over zijn wiskundewerk, zal vanzelf gaan zorgen dat hij kan verantwoorden wat hij doet, als de leraar hem tenminste zonodig de instrumenten aanreikt;
– veel leerlingen zijn weetgierig; die leerlingen vinden het best leuk als je hun laat zien hoe ze zichzelf kunnen controleren, of hoe een echte wiskundige zoiets aanpakt. Je hebt als leraar dus middelen om, als je dat nodig vindt, de leerling een duwtje te geven naar een volgend zekerheidsniveau.

Zelfstandigheid leren

Hier en daar heb ik het woord *zelfstandigheid* gebruikt. Een van de hoofddoelen van het onderwijs vind ik "Leerlingen helpen zelfstandig te worden".
Ik noem een paar aspecten van zelfstandigheid binnen het kader van dit artikel.
– Beseffen dat er niveau's van zeker weten zijn, en dat niet altijd de hoogste zekerheid de beste is. Bewust kunnen beslissen over het niveau waar je nu, hier, met deze kwestie, genoegen mee neemt. Over werkmethoden beschikken om zonodig op een hoger niveau zekerheid te kunnen krijgen, en daarbij met name beseffen dat te vroeg naar hoger niveau grijpen eerder stoort dan helpt.
– Jezelf op allerlei manieren informatie kunnen verschaffen over de kwaliteit van je werk. De houding hebben, dat ook te willen doen. Een (on)zekerheidsgevoel hebben dat je op de juiste momenten gerust stelt en onzeker maakt. Als het belangrijk wordt niet teveel alleen op dat gevoel steunen.
– Beseffen dat leren, nieuwe dingen proberen, riskant is. Wat je probeert kan mislukken. Zelf punten van houvast kunnen zoeken en vinden. Voor je eigen veiligheid kunnen zorgen.

Contextrijke problemen

Dit alles pleit voor veel probleemsituaties in het wiskundeonderwijs die uit het leven gegrepen zijn. Dat probleem laat ik nu maar liggen. In veel schoolsituaties is "gewoon" wiskundeonderwijs al moeilijk genoeg. Ook in die situaties kunnen leraren overigens met het bovenstaande hun voordeel doen.

Slot

Veel *leraren* denken dat alleen de zekerheid van het bewijsniveau goed genoeg is. Veel *leerlingen* komen niet verder dan de vanzelfsprekendheid op basis van de autoriteit van de leraar of het boek. Dat is jammer. De zekerheid van het tussenniveau is voor veel leerlingen haalbaar en zeker ook de moeite waard.
De leraar kan de leerling wennen aan vragen in de trant van:
– Hoe heb je dat gedaan?
– Is dat goed zo?

– Hoe kun je dat controleren?
– Kun je zelf ook zoiets bedenken?
– Probeer dat zelf eens uit te zoeken.
Leerlingen voor wie het bewijsniveau te hoog gegrepen is worden op deze manier toch zelfstandiger, minder afhankelijk van de leraar.
Leerlingen op weg naar het bewijsniveau kunnen dit stuk niet overslaan. Ze kunnen geen echt bewijs gaan leveren of leren, op een terrein waarop ze zich niet thuisvoelen.
Het verband tussen wat ik hier schreef en de niveau-theorie van Van Hiele heb ik nog niet expliciet gemaakt. Ik ga daar nu ook niet meer diep op in. Van Hiele spreekt zelf liever van niveau's in de argumentatie dan van denkniveau's. Daar heb ik op voortgeborduurd. Het basisniveau heb ik vanzelfsprekendheidsniveau genoemd, het tweede niveau het bewijsniveau. Deze namen dekken de lading wellicht onvolledig, maar mijn ervaring is dat ze de beginner goed aanspreken. De naam die ik aan het tussenniveau gaf, suggereert iets van "klem zitten". Ik zie inderdaad dat in veel klassesituaties dit niveau in de knel komt.
Tussenniveau suggereert ook iets als "tussenstap, op zichzelf niet van zoveel waarde". Dat is niet wat ik er mee bedoel; het tussenniveau is voor veel leerlingen een waardevol eindstation.

Het "Centrum voor Wiskunde en Informatica" (voorheen het MC) zal in augustus 1984 weer een nieuwe vakantiecursus voor leraren organiseren.
Ditmaal zal het onderwerp zijn:

WISKUNDIGE ACHTERGRONDEN VAN EN VOOR HET HEWET-PROGRAMMA.

Afhankelijk van het aantal deelnemers wil het CWI de vakantiecursus '84 in drie plaatsen verzorgen, te weten Amsterdam, Eindhoven en Zwolle en wel op donderdag en vrijdag in de laatste week van de zomervakantie van resp. de rayons "west", "zuid" en de "rest van Nederland".
De kosten voor cursus en syllabus zullen ongeveer *f* 50,– bedragen.
Het CWI verzoekt ieder die in principe aan de cursus zou willen deelnemen dit nu al per briefkaart of telefoon aan onderstaand adres te melden:
Centrum voor Wiskunde – Informatica, t.a.v. de Heer C.E. Thomson, Postbus 4079, 1009 AB Amsterdam, tel.: 020-5924011/4175.