

Zinvol meetkunde-onderwijs

A.J. Bishop

University of Cambridge

Samenvatting

In het najaar van 1982 hield Alan Bishop een lezing op een meetkundecongres in Bergen, België. Een lezing die een grotere verspreiding verdient.

Bishop, die zich voornamelijk bezig houdt met de opleiding van leraren, schetst daarin allereerst de veranderingen die het meetkunde-onderwijs in het laatste decennium heeft ondergaan. Daarna worden mogelijkheden tot verbetering genoemd. Hij besluit het artikel met een oproep meer aandacht te besteden aan de zin van de meetkunde voor leraren.

Summary

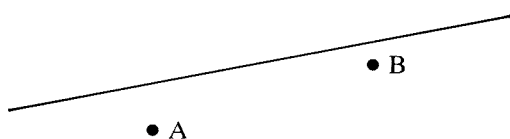
In fall 1982 a conference on the teaching of geometry was held at the university of Mons, Belgium.

One of the highlights was a presentation by Alan Bishop: *Towards relevance in the teaching of geometry*. He assesses what had been achieved since 1974, and what still needs to be improved and suggests ideas for improvement. Bishop's main concern is that he thinks we do not emphasize nearly enough relevance in geometry teaching and especially more relevance from the point of view of the teachers.

Laten we maar met de deur in huis vallen en beginnen met vier meetkundige activiteiten waar u uw krachten op kunt proberen. De eerste twee zijn misschien al erg bekend, zeker voor de trouwe N. Wiskrant lezer, maar de beide andere waarschijnlijk niet.

1. Teken een figuur, naar geheel eigen ontwerp, in twee standen. Vraag aan buurman of buurvrouw om het rotatiecentrum te vinden.

2.



Wat is de kortste weg van A naar B via de rechte lijn? Vind andere B_1, B_2, B_3 zó dat de bijbehorende kortste wegen vanuit A via de lijn even lang zijn als AB. Vervang de rechte lijn door een cirkel of een andere kromme.

3. Klassificeer vierhoeken en maak daarbij gebruik van de volgende tabellen:

| | | Aantal paren evenwijdige zijden | | |
|-----------------------------|---|---------------------------------|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 |
| Aantal paren gelijke zijden | 0 | | | |
| | 1 | | | |
| | 2 | | | |

Aantal paren evenwijdige zijden

Aantal rechte hoeken

| | | 0 | 1 | 2 |
|----------------------|---|---|---|---|
| Aantal rechte hoeken | 0 | | | |
| | 1 | | | |
| | 2 | | | |

Kan je ook een tabel maken met "aantal paren gelijke zijden" aan de ene kant en "aantal rechte hoeken" aan de andere?

4. Welke is compacter: A of B?



De meesten zullen het er wel over eens zijn dat A compacter is dan B. Maar hoe zit dat bij de volgende figuren:



Hoe kun je "compactheid" meten? Bedenk enkele manieren om "compactheid" te meten en probeer ze uit.

Tot zover op dit moment deze voorbeelden.

Laat ik eerst uiteenzetten tegen welke achtergrond u dit artikel moet zien. In 1974 hield ik een lezing in Bielefeld ter gelegenheid van een ICMI-meetkunde conferentie. De titel van dat verhaal was "Zichtbare Wiskunde". Ik stelde daarin dat het meetkunde-onderwijs verbeterd moest worden door de visuele en ruimtelijke aspecten meer nadruk te geven.

Mijn belangstelling voor het meetkunde-onderwijs is niet opmerkelijk veranderd sinds Bielefeld, maar mijn kennis erover wel. Daarom is het me een genoegen hier iets te vertellen over de intuïtieve benadering. Ik zou in de eerste plaats duidelijk willen maken wat er veranderd is sinds 1974. Het tweede punt is: wat kan en moet er nog verbeterd worden. Tenslotte zal ik enkele ideeën lanceren hoe die verbetering plaats zou kunnen vinden. Uiteraard dient alles gezien te worden vanuit het perspectief dat ik de Engelse situatie als uitgangspunt heb genomen. En ik ben me ervan bewust dat alles wat in Engeland gebeurt niet noodzakelijkerwijs overal elders ook gebeurt. Maar ik heb in de loop der jaren het gevoel gekregen dat mijn analyse en gedachten ook wel eens interessant voor niet-Engelsen zouden kunnen zijn.

Veranderingen

Terug naar m'n eerste punt: Wat is er veranderd op het gebied van meetkunde-onderwijs in Engeland sinds 1974?

Daartoe kom ik even terug op de vier voorbeelden uit het begin. Dat waren vier voorbeelden waarvan ik vind dat ze duidelijk maken dat er wat ten voordele is veranderd. Er is veel gebeurd om *activiteiten* te ontwikkelen om de, tot op dat moment nogal beperkte, gebruikelijke benadering van het meetkunde-onderwijs te verrijken.

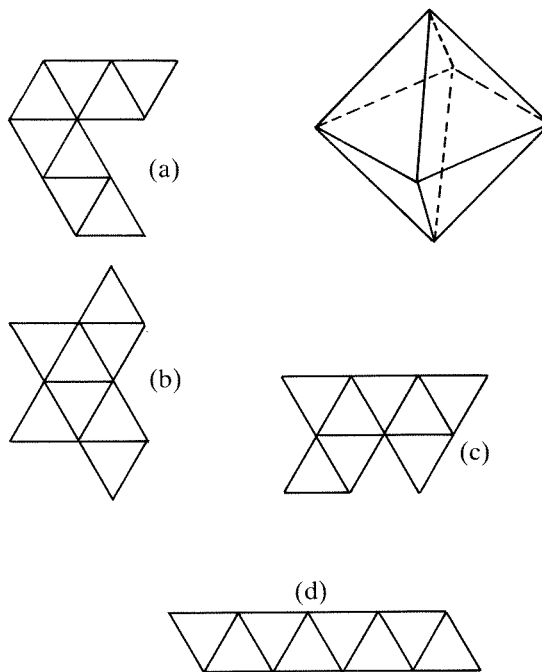
Veel groepen leraren en universitaire docenten hebben schitterende en stimulerende mogelijkheden ontworpen om leerlingen met meetkunde te laten bezig zijn. De nadruk ligt daarbij op het onderzoeken en experimenteren, en de opdrachten zijn vaak erg open. Vaak wordt ook nog de link gelegd naar de "gewone" meetkunde zoals uit de vier voorbeelden blijkt. In Nederland moet in dit verband het onvolprezen werk van het voormalige IOWO genoemd worden.

Een tweede positief punt is de "breuk met de mythe van Piaget". Die mythe was het geloof dat het intuïtieve, onderzoekende, ontdekkende werk uitsluitend op de lagere school plaats moest vinden. Veel wiskundeleraren deelden die mening. Eenmaal op de school voor voortgezet onderwijs moest de formalisatie plaats vinden. Gelukkig denkt de meerderheid van de Engelse wiskundeleraren er nu wel even anders over. Veel van het meetkunde-onderwijs vindt nu dan ook plaats via allerlei meetkundige "activiteiten".

De derde positieve verandering, en één waarmee ik zeer ingenomen ben, is dat er zoveel nadruk op *visualisering* is komen te liggen.

Als voorbeeld daarvan enkele vragen van een examen:

- Welke van de volgende uitslagen is die van een regelmatig achthoek?

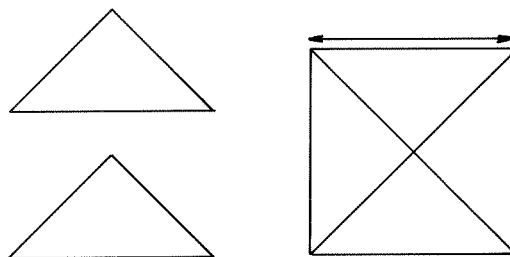


- Het plaatje toont een plattegrond en aanzichten van een pyramide, op schaal getekend.

Vind, door opmeten,

a. de hoogte in meters;

b. de hoek tussen horizontale vlak en zijvlak.



Bovendien zijn er tegenwoordig veel films beschikbaar voor meetkunde-onderwijs, en veel spellen en spelen, modellen, verschillende soorten grafieken-papier, terwijl ook de school TV veel bijdraagt aan visualisering van de meetkunde.

Er is wel een kritische noot te plaatsen bij deze positieve ontwikkelingen. Er zijn nogal wat mensen die vinden dat er wat meer aandacht besteed zou moeten worden aan het "bewijs" in de meetkunde. Ik ben het daar wel mee eens. Maar hoop tevens dat deze bewijzen ook binnen de wiskundige activiteiten zich af kunnen spelen. Dus niet louter standaard bewijsjes uit je hoofd leren bij standaard stellingen.

Zinvol

Dan kom ik nu aan het tweede punt: wat is er nog te verbeteren? Hiermee zijn we aangeland bij de titel van dit verhaal. Er wordt nog veel te weinig aandacht be-

steed aan het feit of het meetkunde-onderwijs wel zinvol is. Nu is "zinvol" een begrip waarbij de één zich alles en een ander zich niets kan voorstellen. Ik zal me daarom sterk beperken tot twee nader te omschrijven aspecten.

In de eerste plaats: Hoe zinvol zijn meetkundige ideeën vanuit het standpunt van de leerlingen?

In de tweede plaats: Hoe zinvol is meetkunde-onderwijs vanuit het standpunt van de leraren?

In vergelijking met de vernieuwingsgezindheid van de jaren 60 en 70 lijken de jaren 80 een stap terug te zien te geven. In Engeland, en daar niet alleen, is er een sterke "back-to-basics" beweging. Deze beweging vindt dat er teveel tijd wordt besteed aan onnutte wiskundige ideeën, en niet genoeg aan toepasbare wiskunde en andere wiskunde "waar je wat aan hebt". De druk werd zo groot dat er een nationaal onderzoek op touw werd gezet – door het zgn. Cockcroft-committee – naar het wiskunde-onderwijs.

Daarnaast is er nog een tweede belangrijke ontwikkeling: de enorme groei van de rekenmachines, zakcomputers, micro's en computers. En wiskundeleraren zullen op deze zegeningen van de technologiemaatschappij in moeten spelen.

De roep om "toepasbare" wiskunde, gecombineerd met de onstuitbare (?) opmars van de rekenapparaten hebben het meetkunde-onderwijs onder druk gezet.

De zojuist geschetste positieve ontwikkelingen zijn dan ook zeker niet het gevolg van een vraag naar realistische of zinvolle wiskunde.

Deze veranderingen waren het gevolg van een ontwikkeling van geheel andere aard. Daarbij stond het uitgangspunt centraal dat het kind als een actieve wiskundige gezien moest worden. Dat is een wel geheel ander uitgangspunt. Een uitgangspunt wat in feite ingaat tegen de "back-to-basics" beweging, en ook tegen de "toepasbaarheid" van meetkunde. Want centraal staat een sterk wiskundig doel: kinderen aanmoedigen patronen te vinden, te leren classificeren, definities te maken, relaties, generalisaties, hypothesen op te stellen en te toetsen. De *wiskundige* activiteiten van de meetkunde werden benadrukt.

Maar dat doel kan nogal onbeduidend lijken in deze sombere tijden waarin we ons zorgen maken over de kwaliteit van het onderwijs van *alle* kinderen, over de werkloosheid, over de technologische ontwikkelingen. Daarbij komt dan nog dat er nieuwe vakken staan te dringen om zich een plaats op het leerplan te veroveren.

Als we meetkunde zo graag gehandhaafd willen zien als onderwerp op school, dan moeten we wel meer de nadruk op de zin van die meetkunde gaan leggen. We zouden meer moeten doen in de meetkunde met:

- "Alledaagse" problemen waarbij meetkunde een rol speelt. Dat wil dus zeggen: géén gekunstelde "toepassingen" ter motivering, maar echte probleempjes. Bijv. over geld, over het schatten van hoeveelheden, kortste wegen, meetkundige plaatsen, e.d. Er zijn talrijke voorbeelden bekend, maar niet alle worden optimaal op school uitgebuit.
- Hoe kun je leefomgeving in beeld brengen? De kinderen leven in een levensgrote ruimte en in die ruimte spelen de problemen zich af. Niet op papier. Daarom zouden we moeten proberen de leerlingen

te leren hoe ze hun complete leefomgeving op papier kunnen zetten. Door het tekenen van kaarten, maken van schetsen, foto's maken, modellen maken, schaalbegrip ontwikkelen.

- Hoe brengen we de ruimte onder woorden? Dit sluit nauw aan bij het vorige aspect. Behalve met plaatjes, kun je ook veel met woorden doen. Hoe, dat is de vraag. Een vraag waarbij zelden wordt stilgestaan. Maar in bepaalde andere culturen zoals die van de Navajo-indianen in de USA, de Aborigines in Australië, en de Papoea's van Nieuw Guinea brengen hun "ruimte" heel anders dan wij onder woorden.
- Er is geen twijfel aan het feit dat de microcomputer een sterk hulpmiddel kan zijn. Maar even waar is dat er talrijke onzin-programma's bestaan. Het is daarom hard nodig dat we eens goed de meetkundige aspecten en mogelijkheden van de micro aan een nader onderzoek onderwerpen. Logo, ofwel Paperts-Schildpad-meetkunde lijkt goede mogelijkheden te hebben.
- De architectuur-meetkunde. Er bestaat in Engeland een vak "Design Education" dat zich bezig houdt met de vorm, structuur en ontwerp van bouwwerken in de ruimste zin des woords. Dit vak biedt talloze aangrijpingspunten voor interessante meetkundige activiteiten voor leerlingen.

Leraren

Tot zover enige ideeën die het meetkunde-onderwijs voor kinderen wat meer zinvol zouden kunnen maken. Dan rest mij nog aandacht te besteden aan de meetkunde leraren. Ook voor leraren moet meetkunde-onderwijs zinvol zijn. Ondanks (?) het feit dat er positieve veranderingen zijn waar te nemen lijkt het erop dat steeds meer leraren meetkunde links laten liggen. Voor het basis-onderwijs ligt een aanwijsbare oorzaak in het ontberen van de kennis door de leraar. Voor het voortgezet onderwijs schijnt de oorzaak meer te liggen in de druk van nuttige wiskunde en rekenen.

Hoe kun je nu meetkunde-onderwijs zinvoller maken voor een leraar? Meer activiteiten ontwikkelen zoals ik zojuist geschetst heb lijkt het minste wat je kunt doen. Maar er is iets fundamenteelers. Ik denk dat we niet goed begrepen hebben wat de problemen waar de meetkundeleraar mee worstelt.

Op welke manieren kun je wiskunde onderwijzen? Volgens het Cockcroft rapport als volgt:

- klassikale uitleg door leraar;
- discussie tussen leraar en leerling en tussen leerlingen onderling;
- praktisch werk (knippen, plakken, etc.);
- vaardigheden en routines oefenen;
- problemen oplossen (inclusief toepassingen);
- onderzoeksggericht bezig zijn.

Even duidelijk is dat het overgrote deel van de leraren zich beperkt tot de eerste twee mogelijkheden. Dat is niet alleen een nogal beperkt pedagogisch repertoire, maar maakt ook glashelder dat veel prachtige en stimulerende meetkundige activiteiten in het geheel niet aan bod komen. Om de doodeenvoudige reden dat je daarbij moet plakken, knippen, de straat op om te meten, onderzoeken, problemen oplossen en samen

de resultaten bespreken. Daarom is het niet voldoende om alleen maar steeds weer nieuwe meetkunde-activiteiten te ontwikkelen, met de prachtigste hulpmiddelen en modellen. Dat is net zoiets als de slechte wiskundeleraar die, na het horen van een fout antwoord, alleen maar het goede antwoord geeft. Ons antwoord op het beperkte pedagogische repertoire moet wat méér zijn dan alleen maar zeggen wat wij denken dat zij zouden moeten doen.

De verantwoordelijkheid ligt bij *ons*, *wij* moeten begrijpen waarom wiskundeleraars doen wát ze doen. En niet wat wij ze zo graag zouden laten doen.

Moeilijkheden

Laat ik me beperken tot vier aspecten van de moeilijkheden waar een meetkundeleraar mee te maken heeft:

1. Het onderscheid, gemaakt door Mellin-Olsen en Skemp, tussen "relational" en "instrumental" begrijpen. Dit is naar mijn inschatting erg belangrijk bij het meetkunde-onderwijs. Veel leraren hebben een sterke "instrumental" kijk op wiskunde-onderwijs, waarbij de nadruk valt op vaardigheden. Dit valt binnen hun pedagogisch repertoire en verklaart hun afkeer van meetkunde. Die is immers "relational" van karakter, althans de huidige. Maar misschien kunnen we de meetkunde wat meer algoritmiseren?
2. De leraar zit met een klas met zo'n 20 tot 30 kinderen, daarom moeten we ons niet concentreren op individuele activiteiten, maar meer op groeps- of klaswerk. Vooral het groepswerk is in Engeland niet erg populair: het is of individueel onderwijs, of de hele klas tegelijk.

3. Een ander probleemgebied ligt in het vertellen van wat je ziet bij meetkunde. Onderzoek toont aan dat verslaggeving van wat mensen denken te zien zeer onbetrouwbaar is. Aangezien het communiceren met een klas sterk verbaal geschiedt, kan het praten over meetkunde snel problemen opleveren. Probeer maar eens een rechthoek te beschrijven, zonder een definitie te geven.

4. Nauw verwant met het bovenstaande is het probleem hoe je het visualiseren in de klas moet aanmoedigen.

Klassen zijn vol, lawaaierig en niet direct geschikt om eens rustig na te denken over het visualiseren van problemen. Een enkele leraar krijgt het misschien voor elkaar om deze ideale rustige omstandigheden te creëren, maar dat zijn uitzonderingen. Hoe kun je leraren helpen om deze omstandigheden te scheppen?

Aan deze vier probleemgebieden zouden we veel meer aandacht moeten besteden. We zullen meer naar docenten moeten luisteren, en vooral leren van hun moeilijkheden. Alleen op die manier kunnen we echt enig effect verwachten op de kwaliteit van het meetkunde-onderwijs.

Zeker, ik ben tevreden met de positieve veranderingen die de laatste tien jaar in Engeland hebben plaatsgevonden. Maar er is nog een lange weg te gaan alvorens meetkunde-onderwijs zinvol zal zijn voor zowel leerlingen als leraren. Naar mijn idee zal de nadruk moeten komen te liggen op de pedagogische vooruitgang, en minder op de inhoud.

En aangezien op dit gebied veel onderzoek plaats vindt ben ik optimistisch over de toekomst van het meetkunde-onderwijs.