

Even krijten (4)

G. Schoemaker

OW & OC, RU Utrecht

Samenvatting

Raaklijnen komen voor in eindexamenopgaven van LBO tot VWO.

De vraag is of leerlingen werkelijk weten wat een raaklijn is.

Het artikel bestaat voor het grootste deel uit een gefingeerd vraaggesprek, waarin veel aspecten van het begrip "raaklijn" aan de orde komen.

Summary

Tangents play an important role at all levels of secondary education.

The question remains of all students really understand its meaning.

This article is a fictive discussion between a teacher and a student about different aspects of the meaning of "tangents".

Raaklijnen aan een kromme

In eindexamenopgaven van LBO tot VWO komen sommen voor over raaklijnen. Dat veronderstelt dat leerlingen weten wat een raaklijn is.

Het volgende gefingeerde gesprek laat iets zien van wat daar allemaal bij komt kijken.

Sommen over een raaklijn hebben pas zin als leerlingen de tijd hebben gehad om te doordenken wat een raaklijn is. Voorbeelden van dit soort doordenkingen staan in het volgende stuk beschreven, gecomprimeerd tot één gesprek. Het is een gesprek met een kiene leerling. Ze heeft didactisch inzicht, ze houdt ook de grote lijn van het gesprek in de gaten. Ze heet Tangerina.

- Teken eens een raaklijn aan deze kromme.



(fig. 1)

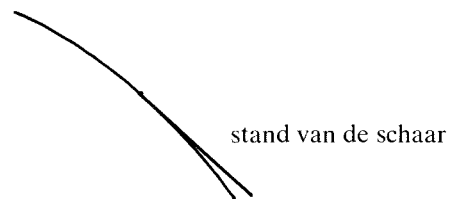
Hoe doe je dat nu eigenlijk?

- T: Schuiven met je liniaal, net zo lang tot 't goed past, of draaien om een punt op de kromme.
- Is er in een punt dan maar één raaklijn?

T: Ja, ik vind van wel.

 - Maar als iemand nou helemaal geen idee heeft wat een raaklijn is, hoe moet ik 'm dan laten weten hoe hij met z'n liniaal moet schuiven?

T: Knippen ... als je langs de kromme knipt, ziet dat er zó uit:



(fig. 2)

Je zet de schaar steeds in de stand van de raaklijn door het papier te draaien.

- Weet je nog meer zulke voorbeelden?

T: Op de fiets of met een auto. Als je een bocht rijdt dan is de auto een raaklijn aan de bocht. Bij schaatsen kun je het goed zien, de slagen die de hardrijders maken zijn raaklijnen aan de sneeuwrand.

Als je een schip ziet uitkomen boven de horizon, dan raken de lichtstralen aan de aarde op hun weg naar je oog.

Vanuit de zon gezien wordt een deel van de maan belicht. De rand van licht naar donker is van de lichtstralen die net aan de maan raken.

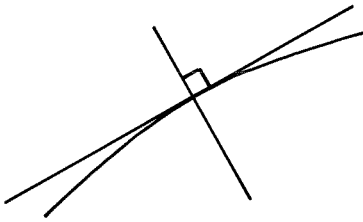
Met halve maan kun je die raakrand goed zien.

- Als je denkt aan het woord "raken", klopt dat dan met het begrip raken dat uit jouw voorbeelden spreekt?

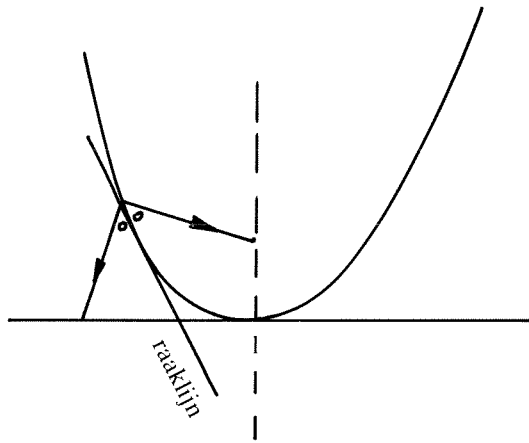
T: Wel als je denkt aan "tets" of "tak" zo vlak langs, zoals bij een schampschot. Maar als in een t.v.-film iemand geraakt wordt, is dat geen schampschot.

Een bokser slaat raak, betekent iets heel anders dan rakelings.

- Kun je een raaklijn aan zo maar een kromme construeren?
- T: Net als bij een cirkel. Je hebt eerst een loodlijn en dan staat de raaklijn daar loodrecht op, zó dus.



(fig. 3)



(fig. 4)

Dat gebruik je bij natuurkunde bij de holle spiegel, dat zit ook in de reflector van de koplamp van je fiets.

Maar er is een algemene manier voor alle krommen waarvan je het functievoorschrift kent en dat gaat met differentiaalrekening.

Die methode is gebaseerd op de idee van “knippen”.

T: Dus dat wordt dan een nieuw soort discriminant, die voor alle krommen te gebruiken is. Als je het functievoorschrift niet kent dan zit er zeker niets anders op dan gewoon zo op 't oog knippen of net als de schaatser dat doet in de bocht.

- Vertel eens hoe je aan die eerste loodlijn komt.
- T: Nou ja ... loodrecht op de kromme ... bij een cirkel naar het middelpunt ... Deze kromme heeft geen middelpunt. Als je de loodlijn zo kan tekenen, dan kun je net zo goed de raaklijn meteen tekenen. 't Kan niet.
- Dat heet een cirkelredenering. Je zoekt de raaklijnen, je tekent eerst de loodlijn maar die kun je pas construeren als je de raaklijn geconstrueerd hebt. We gaan eens even terug naar de gewone sommen.
 - Hoe kun je nagaan of de lijn met vergelijking $y = 4x - 4$ raakt aan de parabool met vergelijking $y = x^2$?
- T: Invullen $x^2 = 4x - 4$ en dan met $D = 0$.
O, dan is dat de meer wiskundige manier bij zo maar een kromme.
- Ik zal een andere kromme geven met vergelijking $y = \sin x$. De raaklijn in $(0,0)$ heeft vergelijking $y = x$.
- T: Dan krijg je $\sin x = x$. Daar zit helemaal geen discriminant in. En vroeger hebben we geleerd dat de discriminant je in staat stelt onderscheid te maken. Je haalt er altijd van alles bij. We hebben 't nog gehad over rassendiscriminatie waarbij huidskleur gebruikt wordt als discriminant.
- De discriminant die wij geleerd hebben helpt alleen maar bij tweedegraadsvergelijkingen.
- T: Dus we hebben nog steeds geen betere methode dan “knippen” voor het vinden van de raaklijn aan een kromme. Moeten we nu van alle krommen bijzondere eigenschappen leren om op een bij die kromme behorende manier raaklijnen te vinden? Zoiets moet er wel zijn, anders schudden jullie wiskundeleraren dit soort raaksommen niet uit je mouw.
- Er zijn wel wat speciale krommen. Bijvoorbeeld bij de parabool kan 't zó.

Tangerina, what is in a name.

Tangerina bestaat niet, daarom heeft ze zo'n ongebruikelijke naam. Haar naam is afgeleid van het werkwoord tangere en dat betekent raken. Daar komt ons woord tangens vandaan maar ook het woord tact. Echte leerlingen doen er veel langer over. Zij moeten – verspreid over een langere tijd – benul opdoen van raaklijnen voordat ze discrimineren en differentiëren. Met vragen uit dit gesprek kunnen ze geprikkeld worden in de periode voorafgaand aan de lancering van de raaklijn. Dezelfde vragen kunnen na de behandeling van de differentiaalrekening nog eens een keer op tafel komen.

Tangerina zit nu opgescheept met een begrip van raaklijn dat later toch weer herzien zal moeten worden. Ze zal zich bewust worden dat raken iets lokaals is, want de raaklijn in het ene punt van de kromme kan verderop nog wel eens snijlijn zijn. Bij het beschouwen van buigpunten; dan gaat de schaar door de kromme heen. Tot de buigpunten kan ze met haar raaklijnbegrip uitstekend de bocht doorkomen.