Voortgezet rekenen in de brugklas

F. Goffree, J. ter Pelle
SLO, Enschede

Samenvatting

Wiskundeleraren kunnen uitvoerige verhalen en anecdotes vertellen over de rekenvaardigheden, of beter het gebrek daaraan, in de brugklas.
Vanuit deze ervaringen is men geneigd om pakketjes te maken die ervoor bedoeld zijn om de rekenvaardigheid bij te spijkeren, te onderhouden en uit te bouwen. Een poging daartoe werd ondernomen door de wiskundesectie van de S.L.O. in samenwerking met brugklasleraren. Voor dit artikel is het materiaal geanalyseerd op één aspect: het gebruikmaken van steunpunten voor het denken.

Summary

Students entering secondary education are often very poor at arithmetic. This leads to many problems in mathematics lessons.
The mathematics department of the Foundation of Curriculum Department, together with six math-teachers, developed some material to improve the arithmetic capabilities. Some of the material is presented and analysed.

Bij rekenen denkt men veelal aan het basisonderwijs. "Rekenen" staat dan voor rekenonderwijs en dat ontvangt men vanaf zijn zesde jaar.
Maar ook brugklassers rekenen, binnen en buiten de wiskundeles. Wiskundeleraren kunnen daarover uitvoerige verhalen en vele anecdotes vertellen. Het gaat dan hoofdzakelijk over het maken van fouten en het ontbreken van inzicht. In vele gevallen wordt tegelijkertijd een beschuldigende vinger opgeheven in de richting van de basisschool, waar men verzuimd zou hebben inzicht bij te brengen, voldoende oefening te geven of waar men onvoldoende eisen stelt.
Wie zich bezighoudt met de ontwikkeling van wiskundeonderwijs, kan dan ook niet voorbijgaan aan het rekenen in het voortgezet (basis)onderwijs. Denkend aan bovengenoemde ervaringen èn aan leerstof, is men geneigd om onderwijspakketten te maken die ervoor bedoeld zijn bestaande lacunes in de rekenvaardigheid op te heffen en beschikbare rekenvaardigheid operationeel te houden. Kortom materialen voor voortgezet rekenonderwijs, die *bijspijkeren* en *onderhouden*. Daarnaast zou men rekenkundige inzichten willen *uitbouwen*.
In deze zin heeft sectie 3 van de SLO, mede op basis van eerder in het IOWO gemaakte pakketten, al wat ontwikkelingswerk verricht. Breuken, procenten en kommagetallen kregen onder meer aandacht. De vakdidactische know-how, waarop de invulling van de pakketjes gebaseerd was, kwam evenwel uit het basisonderwijs. Dit betekent dat introductie, uitleg en oefening van genoemde onderwerpen althans voor een deel herhaling waren van hetgeen zich eerder in de basisschool had afgespeeld. En, let wel, waarmee bepaalde leerlingen "het" nu juist niet geleerd hadden.
De gedachte, dat "voortgezet rekenen" door leerplanontwikkelaars doordacht zou moeten worden vanuit het rekenen van de brugklassers zelf, ingegeven door bovengenoemde overwegingen, kreeg support door de aanwezigheid van de zogeheten "ontwikkelgroep". Deze bestaat uit zes ervaren wiskundeleraren, die lesgeven in brugklassen van lhno, mavo, havo en vwo.
Dit enthousiaste team ondersteunt door hun praktijkinbreng het leerplanontwikkelingswerk voor "wiskunde 12–16". Het idee werd geboren om deze leraren te verzoeken met hun brugklassers te gaan rekenen. Opgaven waren in groten getale voorhanden. We maakten in eerste instantie een keus uit de Rekenkalender (1), een rapport van het grootschalige Engelse onderzoek CSMS (2) en enkele regionale BOVO-toetsen. Juist het genoemde Engelse onderzoek deed ons verwachten dat het werken met de brugklassers tot verrassende resultaten – voor de leraren – zou kunnen leiden. Nu zijn wiskundeleraren natuurlijk geen professionele onderzoekers, maar wanneer deze gemotiveerd met leerlingen aan rekenen werken, is hun eerste zorg dat zoveel mogelijk kinderen er zoveel mogelijk van leren. Men beschikt daartoe over een rijk assortiment aan didactische vaardigheden, die vaak in het vuur van het lesgeven worden ingezet. Aan de andere kant beschikken leerlingen over een vaak ongekend invoelingsvermogen, waardoor bijvoorbeeld de geringste oogbeweging tot een overduidelijke hint wordt.
Schitterende voorbeelden daarvan kunt u vinden in het boekje "Het Kind. Een Mislukking?" van John Holt,

dat we niet kunnen nalaten hier ook aan te bevelen. Een dergelijke interactie, een dergelijk samenspel tussen leraar en leerling is weliswaar onmisbaar voor goed wiskundeonderwijs, maar ze maakt het onderzoeken "hoe brugklassers rekenen" wel erg moeilijk.
Zonder al te expliciet in te gaan op dit soort overwegingen, werd de leraren gevraagd om met individuele brugklassers aan de slag te gaan.
Dit hield in:

1. Een opgave aanbieden, de leerling zoveel mogelijk aan het woord laten, goed achterhalen wat wèl en wat niet opgelost kan worden en eventueel door korte ingrepen de voortgang steunen.
2. Samen praten over de rekenopgaven, om niet alleen te weten wàt, maar om ook na te gaan hòe het een en ander begrepen was (3).
3. Samen reflecteren op het (genoten) rekenonderwijs. Dus proberen te weten te komen hòe het *geleerd* en *onderwezen* is. Een moeilijk bereikbaar element in dit kader is de *instelling ten opzichte van het vak* rekenen.
   (Is 8 + 5 gelijk aan 13 omdat het nu eenmaal zo is, of omdat je dat op school leert, of omdat het in het boek staat, of omdat je het kunt laten zien, of omdat je dat gewoon weet?).

Aan de wiskundeleraren werd gevraagd een zo natuurgetrouw mogelijk verslagje van elk gesprek te noteren. En zo gebeurde het.
Met toenemend enthousiasme werden de wekelijkse gesprekken in het ontwikkelteam besproken. Daar er vergelijkbare ervaringen naar voren kwamen, werden analyses van vakdidactische aard mogelijk. Maar ook werd men zich steeds meer bewust van de eigen rol, waarin leraar en onderzoeker elkaar soms voor de voeten liepen. Tevens kreeg men er steeds meer aardigheid in om zich te concentreren op aanpakken en denkprocessen, in plaats van de aanvankelijke gerichtheid op leerstofinhouden en fouten die leerlingen daarbij maken. In de beschrijvingen werd in toenemende mate de eigen inbreng niet alleen opgenomen, maar ook ter discussie gesteld. Steeds meer verschoof het accent naar wat leerlingen nu wél van hun rekenonderwijs hebben begrepen. De leraren bleken zeer goed te kunnen reflecteren op de "interviews" en gaven blijk van een grote opmerkingsgave.
Van het op die manier verkregen (ruw empirische) materiaal willen we iets laten zien. Voor dit artikel hebben we het materiaal op één aspect geanalyseerd. Dit betreft hoe brugklassers gebruik maken van steunpunten voor het denken (rekenen) (4). Deze keus werd ingegeven door het materiaal. Bij nadere doordenking van "steunpunten voor het denken" lijkt het erop dat we hier een relevant ontwikkelingsaspect voor "voortgezet rekenen" hebben gevonden. Dat het tevens een interessant onderzoeksgebied voor wiskundeleraren in de brugklas oplevert, hopen we hieronder te laten zien.

Geprekken met brugklassers – het ruw empirisch materiaal

De wiskundeleraren spraken met hun brugklasleerlingen over een aantal rekenopgaven. Aanvankelijk stelden zij zich daarbij meer op als de leraar, die zich wilde inspannen om niet begrepen onderdelen uit het rekenprogramma nog eens uit te leggen. Ter illustratie van die aanpak het volgende gesprek van een wiskundeleraar Henk met Diane:

Henk: *Wat is de helft van 0,1?*
Diane: *... Een honderdste, dacht ik. Nee, dat is groter ... een tiende ... een honderdste ... ik dacht het toch wel: een honderdste.*
Henk: *Ik dacht het niet.*
Diane: *Een tiende wordt een vijfde ... ook de helft ...*
Henk: *Ik zal je helpen. Je kunt van $\frac{1}{10}$ beter $\frac{10}{100}$ maken.*
Diane: *Ja, dat klopt.*
Henk: *Nu de helft van $\frac{10}{100}$ ...*
Diane: *Een tiende ... vijf vijftigste wordt de helft ... da's moeilijk.*
Henk: *Hoeveel is de helft van tien kippen?*
Diane: *Vijf kippen.*
Henk: *Hoeveel is de helft van tien varkens?*
Diane: *Vijf varkens.*
Henk: *Hoeveel is de helft van tien stukken taart?*
Diane: *Vijf stukken taart.*
Henk: *Hoeveel is de helft van tien dubbeltjes*
Diane: *Vijf dubbeltjes.*
Henk: *Hoeveel is de helft van tien cent?*
Diane: *Vijf cent.*
Henk: *Nu noem ik die stukken "honderdsten", hoeveel is de helft van 10 honderdsten?*
Diane: *...?...*
Henk: *De helft van 10 stukken is 5 stukken. Nu noem ik een stuk een honderdste. De helft van tien honderdsten is dan...?*
Diane: *...??... (geen antwoord).*

Hoewel de docent op dit punt al zijn kruit nog lang niet verschoten had, breken we het gesprek hier even af. We gaan niet in op de gevolgde didactiek, waarbij gepoogd wordt wiskundige conclusies te trekken uit een bepaalde taalstructuur. Daar gaat het hier niet om. Het lijkt er sterk op dat men op deze manier van vragen stellen weinig gewaar wordt over hetgeen de kinderen wèl van het rekenen weten. Of, en dat was eerder het doel van de gesprekken, hòe de kinderen het rekenen begrepen hebben en wat daarvan nog functioneerde. Daarom ging men er steeds meer toe over de kinderen aan het woord te laten en de eigen inbreng te minimaliseren. De leraren werden zich bewust van de uitwerking van hun eigen optreden in de gesprekken. Men ervoer dezelfde effecten, die door John Holt beschreven zijn. Sommige kinderen hebben hun rekenonderwijs leren "overleven" door middel van een uiterst uitgekiende opstelling in de bekende vraag- en antwoordspelletjes in de klas. Minder uitgekiend, maar vanuit dezelfde instelling, reageerde bijvoorbeeld Irene in een gesprek met haar leraar Ben, die haar vroeg om bij een gegeven rekenopgave een context te bedenken.

Ben: *Bedenk eens een verhaaltje bij 84 : 28.*
Irene: *Een verhaal? Kan ik niet! (Irene ziet dat de docent aantekeningen maakt. Ze blijft kijken terwijl hij schrijft.)*
Ben: *Ja, ik maak aantekeningen hoe het gaat.*
Irene: *Weet ik niet. Schrijf maar op. Hoeveel sommen krijg ik?*

Ben: *Dit is de enige.*
Irene: *Ik kan geen verhaaltje. Weet ik toch niet ... (Na enige tijd): Zit er geen uitleg bij?*
Ben: *Nee, dit is alles.*
Irene: *Als ik iets zeg is het fout!*
Ben: *Waarom denk je dat?*
Irene: *Dat weet ik gewoon.*

Natuurlijk zijn niet alle brugklassers even ontoegankelijk op dit punt als Irene. De leraren kregen daardoor de gelegenheid in de zin van Robert Davis' "task-based interviews" (5) achter de rekengeheimen van hun brugklassers te komen. Het kenmerk van deze (onderzoekende) aanpak is, dat een vakdeskundige een vakinhoudelijk probleem stelt en dat met behulp van goede vragen de leerling grotere diepgang kan bereiken.
Een beperking van de in ons geval gecreëerde situaties is hierboven al gesignaleerd: de relatie leraar-leerling brengt bepaalde contextvariabelen in het spel, die Davis en zijn medewerkers wel konden elimineren. De meest voor de hand liggende factor, die in deze context een dominante rol speelt, is "het cijfer". Juist door de inrichting van ons voortgezet onderwijs, waar kinderen voortdurend in termen van SO, CP en repetities denken, kunnen kinderen de interviews niet geheel los daarvan zien. Wellicht verklaart dit de panische reactie van Herman:

Jo: *Maak een verhaaltje bij 84 : 28.*
Weet je wat je moet doen?
Herman: *Ja. (En hij begint uit te rekenen.)*
84 gulden gedeeld door 28 gulden is ... nou, en dan uitrekenen.
Jo: *Weet je wat er uitkomt?*
Herman: *Ja ... 34. 84 : 20 = 80 : 20 = 4 ... en 40 : 20 = 4 : 2 ... dat kan eigenlijk niet. Dat klopt niet. Als je 20 : 4 doet wordt het 5.*
Jo: *Welke 4 is dat?*
Herman: *Dat is de 4 van 84. En 8 gedeeld op de 84 is 8 (Herman aarzelt, kijkt naar Jo) ... 12 ... 10? Nee, 12. Ik heb nu 5, en 4 en 12. Dan doe je 45 + 12 = ... maar dat klopt niet.*

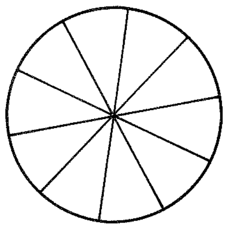
Men kan in het geval van Herman van een "blinde aanpak" spreken.
Hermans eerste gedachte om de getallen 84 en 28 te benaderen met zogenaamde "mooie" getallen, was beslist niet slecht. Het feit evenwel, dat hij daarbij geen enkel inzicht had in de veranderingen, die daardoor optraden, bracht hem volledig uit evenwicht. Tenslotte werd hij door de omstandigheden gedwongen om zonder enige steun toch een uitweg te zoeken.
In de volgende selectie van ruw empirisch materiaal hebben we ons, zoals eerder aangegeven, bepaald tot momenten waarop kinderen van steunpunten voor hun denken gebruik maakten. We zullen daarbij zien, dat kinderen in het reken-/wiskundeonderwijs gebruik maken van bepaalde denkmodellen. Daar het niet allemaal standaardmodellen betreft, die aan alle kinderen onderwezen zijn, is het van belang dat VO-leraren enig inzicht verwerven in de manier van denken van hun brugklassers.
Robert Davis, hier al eerder genoemd, wijst in dit verband op het bestaan van oorzaken voor fouten: "Because children *do* build up their own mental representations, and because these representations frequently embody serious distortions and errors, it is important for a teacher to observe and interview their students with care, in order to get a picture of just what the students have learned and just how they are dealing with mathematical situations."

We beginnen met Harold. Zijn wiskundeleraar (Harry) vroeg hem:

Harry: *Kun je uitrekenen 10 × 0,37?*
Harold denkt even na en schrijft dan op: 3,70.
Harry: *Hoe heb je dat gedaan?*
Harold: *0,37 is hetzelfde als 37 cent. Tien keer 37 cent is 370 cent, en dat is drie gulden zeventig: 3,70. Dus 10 × 0,37 is 3,70.*

Waar de leraar dacht aan de toepassing van formele rekenregels ("vermenigvuldigen met 10, dus de komma één plaats naar rechts"), vond Harold een steunpunt in het vertrouwde wereldje van het geld. Je kunt ook stellen: geld (notatie) was voor hem een bruikbaar model. Ditzelfde gold als het ware voor Bert, die er evenwel niet direct zelf opkwam:

Theo: *Wat is de helft van een tiende?*
Bert: *De helft van een tiende is een vijfde.*
Theo: *Dat is niet goed.*
Bert: *(Zegt niets gedurende enige tijd.)*
Theo: *(Tekent).*



Hoeveel stukjes?
Hoe heet elk stukje?
Bert: *Een tiende.*
Theo: *Als je nu de helft van een stukje neemt?*
Bert: *Een twintigste. Hè, hoe kan dat nou?*
Theo: *Wat?*
Bert: *Als je van al die stukjes de helft neemt, heb je er twintig.*
Theo: *Kun je $\frac{1}{20}$ met een kommagetal schrijven?*
Bert: *Dat is 0,2. Nee, het is 0,5. Nee, ... de helft van 0,1 is 0,5! ... Dat kan niet kloppen.*
Theo: *Hoeveel is de helft van een dubbeltje?*
Bert: *De helft van een dubbeltje is 5 cent.*
Oh, ik weet het: het is nul komma núl vijf.

Wat blijkt in het geval van Bert? In de eerste plaats, dat de taart met tien punten Berts denken van $\frac{1}{10}$ naar (de helft) $\frac{1}{20}$ ondersteunde. Maar ook dat het taartpuntmodel nog niet voldoende was om van 0,1 naar 0,05 te komen. Daar hielp weer het denken in geld, waar de kommagetalnotatie essentieel onderdeel van is.
Bert ondervond dus steun van een zekere visualisering (taart) en bekende notatie (geld). Dat goede notatieschema's het denken (bij rekenen) kunnen ondersteunen laat het volgende geval zien.
De opgave luidt:

Rolf en Manuela gooien sneeuwballen. Achttien vliegen er mis, 12 treffen doel. Rolf wordt vaker geraakt dan Manuela. Hoe vaak kan Rolf hoogstens getroffen worden?
Deze vraag wordt voorgelegd aan Antoinette. Ze leest het verhaal wel vier keer aandachtig door en zegt dan: Rolf 11 keer, Manuela 1 keer. Of, voegt ze er dan aan toe: Rolf 7, Manuela 5.
Eric: Ga eens door!
Antoinette noteert:

R	*M*
11	*1*
7	*5*
9	*3*
8	*4*
10	*2*
12	*0*

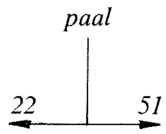
"Ah, ik weet 't", roept ze.
En dan, na enige ruis vanwege het gegeven van de 18 missers, vult ze de tabel aan met hoogstens 12 raak.

Uit andere interviews komt duidelijk naar voren dat kinderen zonder dit schema grote moeilijkheden ondervinden met betrekking tot de begrippen "hoogstens" en "minstens".
Opmerkelijk is, vanuit het standpunt van de leraar in elk geval, dat geen van de ondervraagde kinderen gebruik maakt van de getallenlijn. De getallenlijn speelt namelijk in het brugklas-wiskundeonderwijs een grote rol, bijvoorbeeld bij de invoering van de negatieve getallen.
In het geval van de sneeuwballen ontbrak dus de transfer. Dit is niet moeilijk te verklaren in termen van de overeenkomst van beide situaties. Dat oppervlakkige (ogenschijnlijke) verwantschap tot het verkeerd gebruik van een denkmodel kan leiden, liet Miranda zien in de volgende situatie:
De vraag luidt:

De richtingaanwijzer laat zien dat je 22 km naar het westen moet als je naar Hilversum wilt en 51 km naar het oosten voor Hengelo. Hoe reken je de afstand tussen Hengelo en Hilversum uit.

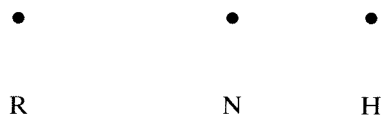
22 : 51	*51 × 22*
51 × 2	*51 − 22*
22 + 51	*51 : 22*
22 − 51	*51 + 12*

Miranda weifelt even. Ze leest de opgave nog eens opnieuw en schrijft dan op: 22 − 51. Waarom die getallen? Nou, het is 22 naar westen en 51 naar oosten. De leraar tekent dan de situatie schematisch:



Maar ook dat "werkt" niet. Dan stelt de leraar voor om op reis te gaan met Miranda. Waar zullen we beginnen? Even staat "de paal" nog (psychologisch) in de weg, maar als de keuze voor vertrekpunt Hengelo gemaakt is, is ook het probleem uit de wereld: 51 + 22.

Wat was er aan de hand? Miranda interpreteerde klaarblijkelijk de wegwijzersituatie met behulp van de getallenlijn: wegwijzer in nul, Hengelo negatief, Hilversum positief.
Of deze analyse de juiste is, weten we niet. De leraar, die weet wat Miranda in de wiskundelessen inmiddels heeft gedaan, zou wat dit betreft kunnen doorvragen. Miranda's geval liet trouwens ook zien dat het juiste beeld van de situatie pas werd gevormd toen zij zich in ging leven: als ik op reis ga, van Hilversum naar Hengelo, dan ...
Inleven gaat gemakkelijker naarmate het een vertrouwde context betreft. Eén van de kinderen, die het wegwijzerprobleem in eerste instantie niet correct oploste, had onmiddellijk de goede oplossing, toen de docent een situatie uit de eigen omgeving schetste: Rijssen-Nijverdal-Hellendoorn! De betreffende leerling kreeg toen de belangrijke punten op een rijtje:

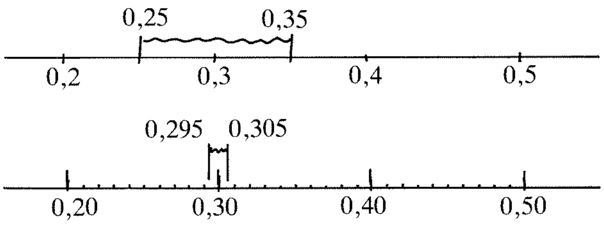


Hoe we overigens moeten verklaren dat leraren noch leerlingen kritiek leverden op deze opgave, op basis van topografische overwegingen, is achteraf niet moeilijk te zeggen. Zowel leraren als leerlingen vatten de opgaven direct op in hun wiskundige context.
Dit laatste kwam nog pregnanter naar voren in een ander geval, dat van Besna:

Henk: *Wat is groter 0,3 of 0,30?*
Besna: *0,30 is groter!*
Henk: *(kijkt verbaasd)*
Besna: *0,3 is groter.*
Henk: *?*
Besna: *Oh, moest ik optellen?*
Henk: *Nee, je moet alleen maar zeggen welk getal groter is.*
Besna: *30 is groter dan 3.*
Henk: *Klopt.*
Besna: *0,30 is groter dan 0,3.*
Henk: *Klopt niet.*
Besna: *0,3 is groter?*
Henk: *Nee, ook niet.*
Besna: *Oh, het is hetzelfde. De 0 telt niet. Is dat goed?*
Henk: *Ja, dat is goed. Wat betekent 0,3?*
Er komt geen antwoord meer. Besna is niet bereid om er

verder op in te gaan. (Ze heeft immers het goede antwoord gegeven!)

Eigenlijk zou je je moeten afvragen, of je de notaties 0,3 en 0,30 door elkaar gebruikt. Binnen de wiskundige context van "kommagetallen" is dat toegestaan. Maar hoe zit dat bijvoorbeeld in de context van meten?
Daar wordt steeds met benaderingen en afrondingen gewerkt. En is 0,3 een "afronding", dan betekent het zoiets als "een getal tussen 0,25 en 0,35".
De afronding 0,30 betreft dan een getal tussen 0,295 en 0,305. Het verschil tussen 0,3 en 0,30 in die context heeft dan te maken met hoe gedetailleerd, hoe verfijnd men wenst te kijken. Op een liniaal (getallenlijn) kun je dit verschil in beeld brengen:

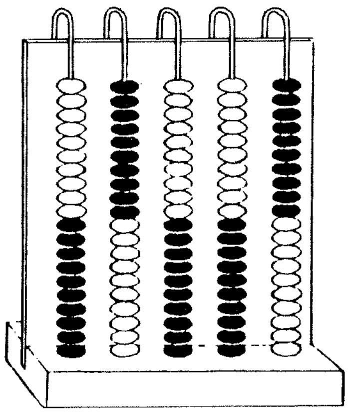


Niemand kwam hierop. Basisschoolleerlingen leren in het algemeen niet getallen te doordenken op hun meet-aspect. (On)nauwkeurigheid en tolerantie komen niet in de aandacht. Dit geldt evenzeer voor het wiskundeonderwijs na de basisschool. Blijkbaar troffen we hier dus geen breuk tussen bo en vo, maar een scheur over de hele linie.

Steunpunten voor het reken/wiskundige denken

Kijken we nog even terug naar de interviews, dan blijkt dat kinderen bij het oplossen van eenvoudige rekenopgaven gebruik maken van steunpunten. We zagen steunpunten in vertrouwde contexten (Harold), schematiseringen (Bert), notatieschema's (Antoinette), visualiseringen (Miranda).
In een enkel geval bleek dat het ontbreken van een dergelijk steunpunt, tot blind en zelfs panisch handelen leidde (Herman). We willen nu nagaan welke mogelijkheden steunpunten in de vorm van denkmodellen, in het basisonderwijs naar voren (kunnen) komen (6).
De wiskundige didactische gedachtengang, die achter het aanbieden van denkmodellen schuilgaat, is niet moeilijk te vatten. Wiskunde, opgevat als activiteit, vraagt o.a. om het aanbrengen van structuur. Kinderen, evenals andere beginnelingen in het vak overigens, hebben vaak behoefte aan concretiseringen. Deze gaan van *manipuleerbaar*, via *zichtbaar* naar *voorstelbaar*. Van het doen met je handen, via ondersteund worden door een schetsje naar het denken in voorstellingen. Bij het hanteerbaar, zichtbaar of voorstelbaar maken van een (wiskundige) structuur komt men tot het maken van "modellen", die de werkelijkheid op essentiële aspecten kunnen vervangen, beschrijven en láten denken. Modellen, met een groot toepassingsbereik, kunnen onder bepaalde voorwaarden tot denkmodellen promoveren.

Denkmodellen onderscheiden zich niet alleen naar de (wiskundige) structuren, die eraan ten grondslag liggen. Ze verschillen ook naar de wijze, waarop ze gebruikt worden: als *schema*, om over de werkelijkheid te leggen, als *context*, waarin een werkelijkheid (anders) begrepen kan worden, als *invulformulier* om de werkelijkheid in kaart te brengen, als *handelingsmodel* om veranderingen te realiseren, als *momentopname* om even bij stil te staan. Sommige denkmodellen hebben een afgerond karakter, er valt weinig meer aan te sleutelen, ze passen wel of ze passen niet. Andere laten meer veranderingen toe, men kan er nog allerlei nieuwe zaken mee ontdekken, ze krijgen steeds grotere gebruikswaarde. De getallenlijn is er zo een, wellicht heeft bij het onderscheiden van 0,3 en 0,30 in de meetcontext de getallenlijn voor u iets nieuws gebracht. We komen hier straks op terug. Een star model was het oude telraam, met horizontale staven waarop tien ballen. Het was zeer goed manipuleerbaar, maar kreeg naar ons weten nooit de status van denkmodel. Dat ligt iets anders voor de lusabacus, waarin de positionele schrijfwijze van onze getallen gematerialiseerd is.



Lusabacus

De posities (plaatswaarde) zijn op de staven gefixeerd. De verschuifbare kralen maken het mogelijk (tien tegen een) in te wisselen, waardoor het tientallige bundelen actief beoefenbaar en goed zichtbaar wordt.
Via een schematische notatie, nauw verwant aan de abacus zelf, wordt gepoogd de kinderen van materiële handelingen tot mentale te brengen.

h	t	e
		138
	13	8
1	3	8

Positiekaart

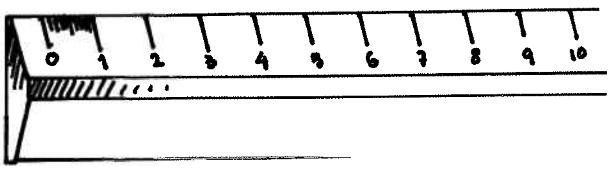
Men kan zich voorstellen dat het cijferend optellen (onder elkaar, met onthouden) geschiedt op basis van een cognitief schema, dat ontwikkeld is op basis van het werken met lusabacus en positiekaarten. Om de positionele schrijfwijze van de getallen te verbinden aan de ordening ervan, wordt het honderdveld gebruikt.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

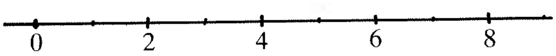
Honderdveld

Deze structuur legt verband tussen tientallen en eenheden in verschillende getallen. Het bedenken van bijvoorbeeld de naaste buren van 53 laat u dat ervaren. Voorts geven horizontale verplaatsingen veranderingen in de eenheden te zien, verticale verplaatsingen laten de tientallen veranderen.
We gaan nu voorbij aan bekende concretiseringen als de Multibase Arithmetic Blocks (MAB-materiaal) en het Gouden Materiaal van Montessori. Eveneens aan minder bekende inwisselspelletjes en abacussen uit andere culturen. Getallen hebben namelijk, onafhankelijk van de wijze waarop ze geschreven worden, allerlei functies. Getalverzamelingen vertonen daarom dan ook allerlei structuren, zoals: ordenings-, hoeveelheids-, herhalings- en verhoudingsstructuur. Al deze structuren kunnen herkend worden in het denkmodel, dat waarschijnlijk het meest fundamentele in het reken/wiskundeonderwijs is: de getallenlijn.

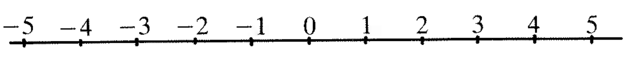
zo hangt hij in de lagere school,



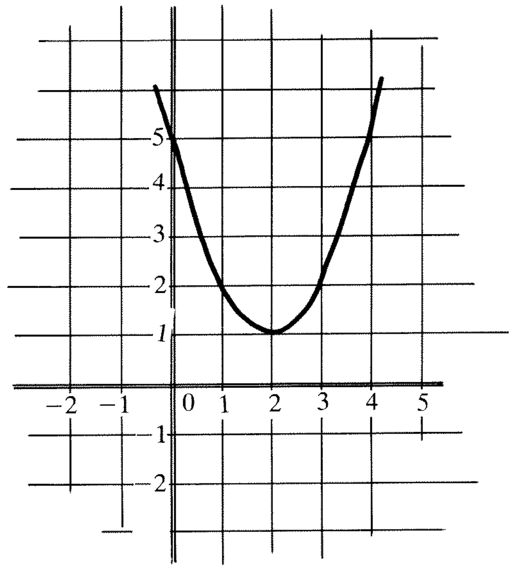
zo wordt hij gebruikt in de middenbouw,



zo staat hij in het boek voor de zesde klas,



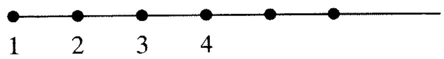
zo in de brugklas
en



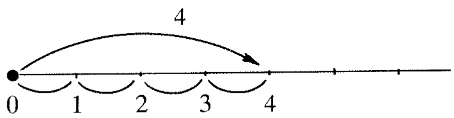
en zo op het mavo-examen.

In de ene situatie beschouw je de getallenlijn als verzameling punten, netjes geordend en op gelijke afstanden van elkaar. De eraan opgehangen getallen zijn als huisnummers, van huizen op een dijk weliswaar. Een andere situatie leidt ertoe om niet de punten, maar de afstanden tussen de punten te beschouwen.

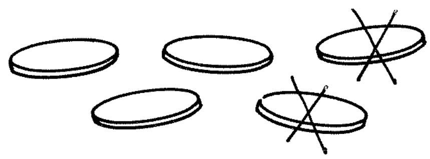
Niet dus



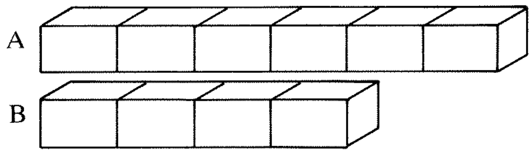
maar



Ogenschijnlijk is er geen verschil. Dat is de kracht van dit denkmodel, je kunt het in allerlei omstandigheden naar je hand zetten. De tweede benadering (geen punten, maar afstanden) laat toe de getallenlijn als meetstok (liniaal) te gebruiken. Dan komt de meetstructuur, met begrippen als nauwkeurigheid, meetfout, tolerantie, naar voren.
Besna (wat is groter 0,3 of 0,30) en haar docent werden niet geïnspireerd door de vraagstelling om in deze context te gaan werken. Dat is begrijpelijk, omdat bij het zien van de kale getallen eerder rekenen dan meten in de gedachten naar voren komt.
Dat de getallenlijn verderop in de wiskunde meer "denkding" dan tekenschema wordt, ondervinden havo-leerlingen o.a. als hen blijkt dat met alle rationale getallen (breuken e.d.) de getallenlijn nog niet half vol "getekend" kan worden. Alle irrationale getallen, en dat zijn er heel wat, kunnen er nog tussen. Ook over bewerkingsstructuren valt nog veel te zeggen. We moeten ons hier beperken tot een voorbeeld (7). Neem de bewerking aftrekken. Voor velen bestaat het bijbehorende denkmodel uit zoiets als:

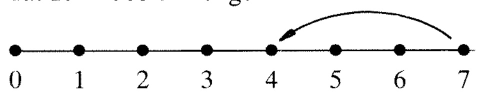


Aftrekken beschrijft dan zoiets als ergens iets af (weg) nemen. Maar ook het volgende model wordt door de rekenbewerking aftrekken beschreven:



(A is twee méér dan B)

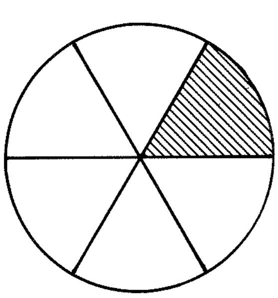
Hoe zit het met terugtellen?
Je kunt dat zo in beeld brengen:



En (bijna) iedereen komt in moeilijkheden bij problemen als: Het is vandaag 18 februari. Hoeveel nachtjes slapen is het nog voordat het 28 februari is? Mag je gewoon aftrekken? Of pak je maar liever een kalender?
Tenslotte een opmerking over een verhoudingsstructuur. Iedereen kent de breukcirkels (taart van Bert), velen weten van de breukstroken, wellicht een kleiner aantal herinnert zich het stok-schaduw model. Misschien hebben velen de grote ondersteuningskracht ervaren van het notatieschema, dat in het lager onderwijs "verhoudingsblok", en in het voortgezet onderwijs evenredigheidsmatrix wordt genoemd.

$$\left|\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 10 & 15 \end{array}\right| 5\times$$

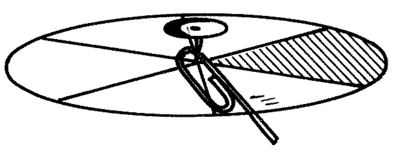
Daarover willen we het dan ook niet hebben. Wel vragen we aandacht voor het sectordiagram, vaak toegepast in de beschrijvende statistiek, vanwege de (met onderzoek aangetoonde) grote duidelijkheid. In feite berusten de breukcirkels op sectordiagrammen:



$\frac{1}{6}$ gearceerd

$\frac{5}{6}$ blanco

Neem nu een dobbelsteen. De kans dat je een zes gooit, is $\frac{1}{6}$. Uitgebeeld in bovenstaand sectordiagram. Maar het toevalselement is niet aanwezig. Maak nu van het diagram een tolletje, bijv. m.b.v. een uitgebogen paperclip:



Geef de paperclip een flinke zet, hij draait rond. Hoe groot is de kans, dat hij op zwart komt? Juist precies $\frac{1}{6}$, dat kun je *zien.* (Beter dan op de dobbelsteen?) Dat ook deze "kanstol" (dat is dus een sectordiagram waaraan het toeval is toegevoegd) tot denkmodel kan worden voor basisschoolleerlingen, hebben we elders al eens beschreven.
We hebben nu een aantal structuren, van wiskundige aard en soms herkenbaar in niet-wiskundige contexten, de revue laten passeren:
- de positionele structuur (bijv. "abacus")
- de inwisselstructuur (bijv. "honderdveld")
- de hoeveelheidsstructuur (bijv. "vijf kippen")
- de meetstructuur (bijv. "liniaal")
- de aftrekstructuur (bijv. "wegnemen")
- de optelstructuur (bijv. "wegwijzer")
- de relatiestructuur (bijv. "sneeuwballen gooien")
- de waarschijnlijkheidsstructuur (bijv. "kanstol")
- de verhoudingsstructuur (bijv. "evenredigheidsmatrix")
- de benaderingsstructuur (bijv. "0,3 en 0,30")

Zoals we zagen kan het denken in deze structuren ondersteund worden met behulp van concretiseringen, visualiseringen, voorstellingen, contexten, denkmodellen. Wiskundeleraren kwamen, door de interviews op het spoor van een en ander. Men vond dat zoeken en opsporen een inspirerende bezigheid, want men voelde aan dat het ging om fundamentele elementen van wiskunde en wiskundige vorming.
We veronderstellen dat basisschoolleraren en leraren wiskunde elkaar op dit terrein kunnen ontmoeten, juist als het ook nog gaat over concrete leerlingen.

De wiskundeleraar onderzoekt het rekenen van brugklassen

We lieten in het voorgaande nogal wat praktijksituaties de revue passeren. Daarbij traden tal van brugklassertjes met hun rekenwerk op de voorgrond. Het verschafte enig zicht op, en inzicht in:
- hoe brugklassers rekenen (denk aan Dianes worsteling met de helft van 0,1);
- wat zij daarbij denken (bijvoorbeeld Hermans ideeën bij 84 : 28 =);
- welke modellen zij daarbij gebruiken (het geldrekenen van Harold en Bert, de wegwijzer van Miranda, de tabel van Antoinette), en
- de kennelijke behoefte aan concrete steunpunten in hun denken.

Wat meer op de achtergrond zagen we ook wiskundeleraren in hun pogingen om in gesprekken met kinderen te achterhalen hoe deze het rekenen begrepen hebben en wat daarvan nog functioneerde. Waarom zou een wiskundeleraar al deze moeite doen? Om lacunes te vinden en het basisonderwijs ter verantwoording te roepen? Of om lacunes te vinden en remedial te teachen?
Zou het ook mogelijk zijn dat de leraar met het geleerde rekening kan houden in de wiskundeles? Of zou het misschien interessant zijn om bepaalde rekenonderwerpen nog eens wiskundig te laten doordenken? Of zou het de moeite waard zijn het rekenonderwijs van de basisschool gewoon voort te zetten? Onderhouden en uitbouwen dus.

Nog anders. Zou het kunnen zijn dat onoverkomelijke problemen uit het rekenonderwijs in een wiskundige context beter begrepen worden, zoals bijvoorbeeld de breuken, en daarvan vooral het algoritmische aspect? Of zou de wiskundeleraar alleen al gebaat zijn met enig inzicht in de wijze, waarop de brugklassers tegenover het vak rekenen staan? Is het een verzameling trucjes, of kun je zelf nog eens wat uitdenken? Dit, om in de wiskundeles de juiste toon te treffen. U begrijpt het al. Al deze bedoelingen, welke je ervan ook kiest, vragen om inzicht in hoe brugklassers het rekenen begrepen hebben. We laten daarom dan ook met een gerust geweten die bedoelingen buiten beschouwing. Het ging ons tenslotte om de mogelijkheid van het onderzoeken.

De wens van de wiskundeleraar om meer te weten omtrent het rekenen van de aan zijn zorg toevertrouwde leerlingen is zeker niet nieuw. Deze (onderzoeks)intentie spreekt ook uit de talloze (al dan niet diagnostische) toetsen, tests en peilproefwerken die jaarlijks in vele brugklassen worden afgenomen. Wel betrekkelijk nieuw is de vorm waarin dit gebeurde: Observaties en analyses van gesprekken met leerlingen.

In het voorwoord bij een bekend didactisch werk schreef Freudenthal (8): "Wat moet een didactisch practicus theoretisch leren? Vooral hetgeen hem in staat stelt leerprocessen bij anderen en zichzelf te observeren en analyseren".

Met de genoemde schriftelijke proefwerkjes neemt men evenwel momentopnamen van op gang zijnde leerprocessen, of ziet men slechts wat er op het moment van de toets aan vaardigheid of inzicht beschikbaar was. Door te praten met kinderen, door ze te observeren tijdens het werk, door met ze samen te werken, worden dit soort bezwaren weggenomen. Wie goed kan observeren heeft de mogelijkheid bepaalde denk- en leerprocessen te reconstrueren. Hierbij wordt niet alleen rekening gehouden met de verbale gedragingen van de leerling, ook de registratie van niet-verbale gedragingen draagt bij aan de analyse, evenals een reflectie op de eigen inbreng als leraar.

Dat (theoretische) informatie over de didactiek van het rekenen het observeren en analyseren kan ondersteunen, is hiervoor getoond.

Het ontwikkelteam van de SLO heeft laten zien dat leraren het observeren en analyseren kunnen, en graag willen, leren. Om ook anderen van de ervaringen te laten profiteren, noemen we een viertal voorwaarden, waaraan tenminste voldaan moet worden:

1. Er zal goed doordacht en gestructureerd materiaal beschikbaar moeten komen, aan de hand waarvan leraren samen met hun brugklassers kunnen werken.
2. De docenten in het v.o. moeten de gelegenheid hebben om hun didactische kennis van het rekenen op de basisschool te vergroten en uit te bouwen ten behoeve van voortgezet rekenen.
3. Men moet vaardigheid in het observeren en analyseren verwerven.
4. De docent dient bereid te zijn ook op de eigen inbreng te reflecteren.

Wat betreft punt 2 is in het bovenstaande iets naar voren gekomen op het gebied van het modelmatig denken. Het derde punt is geïllustreerd met enkele voorbeelden uit de observatiepraktijk. Van de analyses, die individueel gemaakt en collectief besproken werden, is ook het een en ander – zij het impliciet – naar voren gekomen. Punt 4 vraagt om een bereidheid tot reflecteren op eigen inbreng. In het ontwikkelteam heeft men zich daar met wisselend succes mee beziggehouden. In het kader van dit paper is het evenwel niet goed mogelijk om daarvan kort verslag te doen. Blijft tenslotte punt 1.

Onderwijsgevende en onderzoekende docenten zouden zeer gebaat zijn met "goed gestructureerd" materiaal om mee aan de slag te gaan. Het samenstellen van dergelijk materiaal behoort tot de opdrachten van de leerplanontwikkelaar. Vanwege de genoemde onderzoeksintentie is het een vrij ongebruikelijke opdracht. Niet te ontwikkelen leerprocessen worden ten grondslag gelegd aan het te creëren materiaal, maar juist leerprocessen, die met enige waarschijnlijkheid geheel of gedeeltelijk hebben plaatsgevonden.

Hiermee is één lijn in het te ontwikkelen materiaal bepaald. Er moeten vraagstukjes ontworpen worden die nog te remediëren vaardigheden en inzichten blootleggen en vraagstukjes, die voortbouwen op bestaande inzichten, op weg naar "voortgezet" rekenwerk. Langs deze lijn wordt dan het rekenen steeds meer in een wiskundige context geplaatst. Enerzijds kunnen hier reeds verloren gegane inzichten (bijvoorbeeld bij het cijferen) weer opnieuw verworven worden, anderzijds kan beschikbare kennis vanuit een wiskundig standpunt opnieuw doordacht worden. Wiskunde bedrijven is tenlotte ook nadenken over hetgeen je bij het rekenen aan het doen bent. Een tweede lijn in de bedoelde structuur betreft het toepassingsbereik van het geleerde. Kunnen de kinderen ook rekenen in nietschoolse situaties? Ook dit is voor de wiskundeleraren interessant, daar het rekenen vaak niet "sec" naar voren komt in het voortgezet onderwijs. Naast schrale (kale) rekenopgaven moeten er contextrijke opgaven ontworpen worden. Willen we dieper gaan, willen we ook nog onderzoeken hoè de leerlingen rekenen geleerd hebben en hoè ze over dat vak zijn gaan denken, dan komt er een derde lijn naar voren: *van gewone rekenopgaven naar rekendidactische opgaven.*

In de laatste opgaven wordt van de burgklassers gevraagd om zich didactisch op te stellen. Hoe zou een bepaalde oplossing tot stand zijn gekomen? Kun je je inleven in de wijze waarop die andere leerling gedacht heeft? Wat zou je hem willen vertellen over zijn oplossingsmethode? Kun je hem helpen die te verbeteren? Hoe heb je het zelf indertijd geleerd?

Dit soort vragen vraagt om reflectie en geeft een nieuwe dimensie aan het eigen rekenen. Naar onze mening kan dit een belangrijk aspect gaan vormen van, wat we nu al vast genoemd hebben "voortgezet rekenonderwijs".

We besluiten deze bijdrage met een aantal voorbeelden, die de laatstgenoemde dimensie illustreren. Het zijn niet meer dan illustraties. Binnen de SLO wordt gewerkt aan de samenstelling van een meer volledige reeks. Hiermee zou het voor wiskundeleraren mogelijk moeten zijn in gewone brugklassen een (onderzoekend) voortgezet rekenonderwijs te realiseren.

We hopen dat het voorgaande voldoende inspirerend is geweest om leraren voortgezet onderwijs tot daden te brengen. We denken dat leraren basisonderwijs zich evenmin onbetuigd willen laten.

De volgende opgaven maken wellicht een voorzichtige instap voor beide "partijen" mogelijk.

Literatuur

(1) De Moor, E. en G. Schoemaker, *Rekenkalender*, IOWO, Utrecht 1979.

(2) Hart, K., *Secondary School Children's Understanding of Mathematics*, London, 1980. (Zie ook: Treffers, A.., Onderzoek wiskunde-onderwijs, het CMS-project, Nieuwe Wiskrant, september 1981.)

(3) Goffree, F., H. Freudenthal, G. Schoemaker, *Wiskunde-onderwijs, een microdidactische beschouwing over het thema "begrijpen" in Losblad Onderwijskundig Lexicon*, juni 1981.

(4) Goffree, F. (ed.), *Steunpunten voor het denken*, SLO, Enschede, 1983.

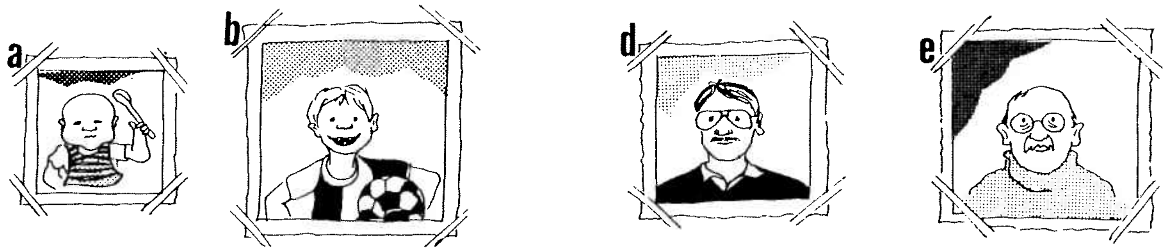
(5) Davis, R.B., *Observing students at work*, The Journal of Mathematical Behavior, mei 1982.

(6) Wiskobasteam, *Overzicht rekenmethoden anno 1980, rapportboekje 3*, Utrecht, 1980.

(7) Goffree, F., *Wiskunde & Didactiek voor a.s. leraren basisonderwijs*, deel 1, Groningen 1982, deel 2, Groningen 1983.

(8) Hiele, P. van, *Begrip en Inzicht*, Purmerend 1973.

Piet is honderdduizend uur oud



Vijf foto's van Piet. Van baby-Piet, kleuter-Piet tot opa-Piet.
Op welke foto is hij ongeveer honderdduizend uur oud?

De kleinste breuk

- ▶ Wie heeft gelijk?
- ▶ Kun je een breuk verzinnen die de allerkleinste is? Leg uit waarom.

Een auto huren

Firma De Wit

Jan: Ik wilde vragen of ik voor vrijdag een VW-kever kan huren.
De Wit: Ja hoor meneer, dat gaat nog wel. Ik heb er nog een staan die vrij is op vrijdag.
Jan: Hoeveel gaat dat kosten?
De Wit: Nou, *f* 65,– per dag, afhalen vanaf 7 uur 's ochtends, eerste 100 kilometer vrij, daarna 15 cent per kilometer exclusief benzine. Borg *f* 200,–.

Firma De Bruin

Jan: Kan ik voor vrijdag a.s. een VW-kever huren?
De Bruin: Even kijken, vrijdag zei u, ja dat kan nog net. Ik heb de gele dan net terug, dat is een splinternieuwe.
Jan: Wat kost me dat?
De Bruin: 100 gulden per dag, benzine voor eigen rekening.
Jan: Nog een kilometerprijs?
De Bruin: Neen, dat zit in die 100 gulden ingecalculeerd. De borg is trouwens *f* 500,–. 't Is nou eenmaal een nieuwe auto.
Jan: Wanneer kan ik hem ophalen?
De Bruin: Dat kan vanaf donderdagavond, na negen uur.

► Welke zou jij huren en waarom?

Harry helpen

Harry heeft de "pest" aan rekenen, vooral "vermenigvuldigen onder elkaar" vindt hij verschrikkelijk moeilijk.
"Ik heb er nooit een goed, er komt altijd een grote streep door", moppert hij, "kijk maar eens naar deze sommen uit mijn schrift".

A
$$\begin{array}{r} {}^{2}27 \\ \underline{4}\times \\ \cancel{168} \end{array}$$

B
$$\begin{array}{r} {}^{2}34 \\ \underline{6}\times \\ \cancel{304} \end{array}$$

C
$$\begin{array}{r} {}^{3}45 \\ \underline{7}\times \\ \cancel{495} \end{array}$$

► Zoek eens uit wat Harry telkens fout doet.

Als je denkt dat je het weet, kun je dan voorspellen hoe Harry deze sommen maakt?

D
$$\begin{array}{r} 68 \\ \underline{7}\times \end{array}$$

E
$$\begin{array}{r} 129 \\ \underline{5}\times \end{array}$$

► Hoe zou jij Harry uitleggen wat hij fout doet?

Tom en Kathy

Tom en Kathy hebben allebei 2,23 × 1,1 uitgerekend.

Tom deed het zo:
$$\begin{array}{r} 2{,}23 \\ \underline{1{,}1}\times \\ 2\ 23 \\ \underline{22\ 30} \\ 2{,}453 \end{array}$$

Kathy zo:
$$\begin{array}{r} 2{,}23 \\ \underline{1{,}1}\times \\ 22\ 3 \\ \underline{223\ 0} \\ 245{,}3 \end{array}$$

Wie heeft het goede antwoord?
Waarom?

Kathy vindt zelf, dat Tom het wel weer goed zal hebben. "Da's meestal zo!"

Wat vind je?

We hebben Kathy gevraagd te vertellen hoe zij de opgave maakte:

Kathy: "Nou, als je kommagetallen vermenigvuldigt, doe je dat gewoon. Als je dan hebt opgeteld om het antwoord te krijgen, zet je de komma's onder elkaar."

Mee eens?? Vertel eens waarom (niet).

De leraar vertelt niet welke som goed is. Hij vraagt alleen: "Hoe komen we er nou achter welke som goed is?"

Wat zou jij antwoorden als jij Kathy was?

Wat zou jij antwoorden als je Tom was?

Tom redeneert als volgt: "1,1 ligt tussen 1 en 2, 2,23 tussen 2 en 3. Het antwoord moet dus een getal zijn tussen 2 en 6 ... dus twee komma nog wat.

Hoe komt Tom aan 6 in zijn redenering?
Wat zouden Tom en Kathy van elkaar kunnen leren?
Wat heb jij van Tom en Kathy geleerd?