Algebra in het LBO, een schot voor de boeg

A.J. Goddijn
OW & OC, RU Utrecht

Samenvatting

Reeds eerder heeft de schrijver van dit artikel zijn ideeën over de algebra onder woorden gebracht: het algebra-programma is zo moeilijk omdat de eigenlijke wiskundige inhoud zo simpel is, dat die in geen verhouding staat tot de omslachtige taal die erbij gebruikt schijnt te moeten worden.
Om aan te duiden in welke richting het algebra-onderwijs zich zou moeten ontwikkelen, wordt een voorbeeld gegeven waarbij de variabele wordt ingevoerd als open plaats en het exerceren met altijd-waarheden wordt beperkt. De zakcomputer speelt daarbij een belangrijke rol.

Summary

In an earlier article the author expressed his concern about the way variables are introduced. Often they are introduced by means of very simple examples. The actual mathematical substance is often so scanty that comprehension is not aided by the use of letters.
This article gives an example of introducing variables in quite another way with use of the pocket-computer.

Samenvatting van het voorafgaande

In jaargang 1, nr. 4 van de Nieuwe Wiskrant heb ik een paar voorbeelden gegeven uit ons "gewone" algebra-onderwijs. Er bleek dat er met letters en wetten, met zware middelen dus, op tamelijk onschuldige zaken werd geschoten. Kort gezegd kwam mijn stellingname er op neer dat het algebra-programma o.a. zo moeilijk is, omdat de eigenlijke wiskundige inhoud zo miserabel simpel is, dat die in geen verhouding staat tot de "omslachtige" taal die erbij gebruikt schijnt te moeten worden.
Zo valt het heus niet mee de "diepgang" van

$$\forall a,b \in \mathbb{R} \quad : \quad a + b = b + a$$

te doorgronden, d.w.z. daar méér in te zien dan $5 + 4 = 9$ én $4 + 5 = 9$ en dat je net zo iets hebt met andere getallen. Op zijn minst moet je daar zonder stotteren het woord "commutativiteit" bij uitspreken, anders begrijp je het niet. Een veel gebruikte methode legt nog uit dat "commutare" een Latijns woord is, zonder overigens te vermelden wat Latijn precies is.
In het artikel "Het is een valstrik" (Nieuwe Wiskrant jrg. 2, nr. 2) is beschreven hoe leerlingen op een andere manier met de klassieke nalatenschap werden geconfronteerd.
Zonder de Griekse oorsprong van het probleem te kennen, redeneerden groepjes 1e klas LBO/MAVO leerlingen enthousiast over deze versie van de paradox van de leugenaar.

a) $2 + 2 = 4$
b) $2 - 2 = 4$
c) $2 \times 2 = 4$
d) $2 : 2 = 4$
e) In deze cirkel staan precies twee ware beweringen.

De vraag is hoeveel beweringen binnen de cirkel juist zijn. Gesprekken over e) gaven de indruk dat deze leerlingen tot interessantere zaken in staat zijn dan het stotteren van waarheden als koeien.
Notaties met letters kunnen, indien slecht verwerkt, een belemmering zijn i.p.v. een hulp. Misschien dat een wat andere introductie van de letters, die voor getallen staan, het mogelijk maakt om sneller echt begripsmatig daarmee te werken. In Nieuwe Wiskrant jrg. 2 nr. 1 is onder de kop "Eindeloos geduld voor minder dan *f* 500,–" een poging daartoe beschreven.
Daar werd een zakcomputer gebruikt. Geef je een getal, bijv. 7, aan de zakcomputer, dan maakte deze er iets anders van, bijv. 15. Je probeert een aantal keren en vindt

$$\begin{array}{rcl} 7 & \rightarrow & 15 \\ 2 & \rightarrow & 5 \\ 10 & \rightarrow & 21. \end{array}$$

Nu is het zaak de "regel" daarin te vinden. Eerst formuleren de leerlingen die in hun eigen taal, maar door beperking tot getallen, de tekens +, −, ×, : en een kaartje jouw getal komt er:

jouw getal ×2 + 1.

De volgende stap, 2 × G + 1, is niet ver meer. Goed redeneren met uitdrukkingen als P + Q − P en 3P − 2P volgde, uiteraard zonder gebruik van de bezweringsformule "distributiviteit".

Schot voor de boeg

In dit artikel wil ik een schets geven wat voor algebraprogramma we volgend jaar in 2 brugklassen gaan onderzoeken. Enkele karakteristieken kunt u wel raden uit het voorgaande:

a. Variabelen (verschijnend als letters in de algebra) zijn geen doel op zich, maar dienen als beschrijving van iets, bijv. van een algoritme.
b. Problemen die aan de orde komen mogen best moeilijk zijn, maar dan omdat de wiskundige kern lastig is en niet omdat de verpakking op zich veel moeilijkheden oplevert.
c. De zakcomputer speelt een grote rol, met name bij de invoering van het begrip variabele.

Met behulp van nog één uitgewerkt voorbeeld en wat korte ideeënschetsen wil ik nog een paar andere karakteristieken van het programma toelichten.
Ik noem ze vast, aansluitend bij a t/m c.

d. Variabelen worden o.a. ingevoerd als z.g. open plaatsen. Maar alleen als er iets met de in de open plaats gezette waarden gebeurt. (Dit sluit aan bij a.).
e. Exerceren met altijd-waarheden als a(b−c) = ab − ac blijft beperkt, wel komen vragen aan de orde als: hoe reken je 13a − 7a snel uit als a = 14,258?
f. Zo vroeg mogelijk komt de dynamische kant van het variabele-begrip aan de orde. (Voor de duidelijkheid: Als a gelijk 3 is, is 6a − 7 gelijk 11. Dat is een "statisch" probleem, je pint je vast op één waarde. Een vraag waarin a beweegt, zoals "Wat doet 20 − a als a van 5 tot 15 stijgt?" houdt zich meer met de dynamische kant bezig. De soepele afwisseling tussen statisch en dynamisch werken is belangrijk voor toepassingen).
g. Variabelen zijn ook: bewegende punten in vlak en ruimte, invulbare woorden in een zin of nog andere zaken. M.a.w. we beperken ons niet tot getallen.

Tot zover voorlopig, zonder uitwerking blijft het toch maar theorie ...
Het dadelijk volgende voorbeeld "BABBEL" illustreert enigszins d. en g.
Punt e. licht ik toe onder het kopje "Algoritmetaal of Algebrataal?" Voor f. verwijs ik nog even naar (oude) Wiskrant 21, het artikel op blz. 3 van Martin Kindt.
Omdat de term computer – al is het maar in de zwakke vorm zakcomputer – is gevallen, wil ik op diens rol en de mogelijke gevaren ook nog terugkomen. Maar nu eerst het voorbeeld.

BABBEL

"Babbel" bestaat uit twee delen:

1. een gesprek met de zakcomputer;
2. een probleem, waarin dat gesprek een rol speelt.

Hier is het gesprek dat Elles en Gonnie hadden; ik geef het droog weer, dus zonder technische details en gelach. Links staat wat de zakcomputer laat zien in het schermpje, rechts wat Elles en Gonnie om beurten intypen.

DAAGG!!
HOE HEET JE?–
→ELLESGONNIE
HOE LAAT IS HET?
(BIJV. 16.45)–
→9.30
GOEIEMORGEN ELLESGO!
BESTE ELLESGO,
WAT EET JE GRAAG?–
→PATAT
LEKKER? PATAT!
JE LIEVELINGSDIER IS DE–
→PAARD
JAKKES EEN PAARD.
HOE BEWEEGT EEN PAARD?
HIJ–
→LOOPT
BEDANKT VOOR DE ANTWOORDEN
LET NU GOED OP.
SCHRIJF OP:
(de computer piept vijf keer en er verschijnt:)
PAS OP ELLESGO
DE PAARD LOOPT IN JE PATAT!

Tot zover is het flauw, al valt het vinden van de P de I en de J niet mee. Maar nu het probleem:

> Begin nog eens opnieuw maar zorg dat er na de piepjes komt te staan:
> "PAS OP SCHILDER
> DE VERF PLAKT IN JE HAREN".

Als de vraag eenmaal begrepen is verandert de sfeer van lacherig in geconcentreerd.
Elles: "Oh! Ja, ik snap het, maar het lijkt me wel een beetje moeilijk".
Maar ze toetsen toch weer netjes als antwoord op de eerste vraag hun namen in. Dan de tijd, enz.
Karin zegt, aan dezelfde tafel met een andere machine bezig, tegen Yolanda: "Volgens mij hier schilder".
Yolanda: "Oh, ja". En het lukt!
De computer van het eerste duo brabbelt intussen "PAS OP ELGON". En gaat verder met een aap die wiebelt.
Wat later komt de doorbraak:
"O jéé! Je moet schilder zetten bij je naam".
Ik ben geneigd te denken dat dit inzicht een essentiële stap richting variabelen is. Op een open plaats (hier "naam" geheten) mag je wat invullen. Er gebeurt iets mee, het krijgt zijn plaats in een skelet van de zin. In de algebra vaak in het skelet van een berekening. Omdat aan "SCHILDER" in dit propgramma niets verandert, is dat heel duidelijk. In de "echte" algebra is er het storend effect dat "getallen iets anders worden" in de berekening. Je zegt vaak: neem een getal, (bijvoorbeeld 13), vermenigvuldig met 3, nu *wordt het* ... . Alsof "13" verandert in "39".
Je moet bij "Babbel" wel vreemde antwoorden durven

geven op de vraag naar je lievelingsdier. Maar precies die vervreemding geeft het verschil aan tussen de open plaats en zijn waarde. In Gonnie's taal: "Je moet verf zetten bij je lievelingsdier".

De tussenzin JAKKES EEN VERF verwekt nu nog wel hilariteit, maar er is daarin een ondertoon van bevestigde zekerheid. De computer houdt zich aan wat jij denkt, dat hij moet doen.

Bij een groep leraren – niet alleen wiskunde, zo hoort het in de burgerinformatica – lagen de problemen juist zo. Het duurde even voor de structuur achter het geheel het won van de neiging eerlijk te antwoorden.

Iemand van die groep vond dat er "HET PAARD" moest staan. Kan dat ook? Na proberen bleek de "DE" niet te onderdrukken. In dit program is "DE" een constante.

Het onderscheid tussen wat jij bepaalt en wat al vast ligt is hier duidelijk. Net als bij het raad-mijn-regel spel. In het voorbeeld hierboven lagen 2, ×, + en 1 vast, maar jouw getal niet.

Andere onderdelen in het kort

Hier zijn nog wat mogelijkheden tot algebra per z.c.

- Voor oefenen met coördinaten is het spel "Schateiland gemaakt".

Een schat ligt verborgen op een 10 bij 10 roostereiland. Je mag stappen noord-zuid-west-oost doen. De computer geeft steeds jouw positie en de afstand tot de schat.

- Grafieken maken bij "Raad mijn regel".

Zonder dat je de formule's kent (die zitten in het programma in de zakcomputer) kun je toch steilheid, maxima e.d. verkennen.

Lineaire functies als 3,91 × + 6,54 kunnen nu ook. Het programma geeft de mogelijkheid zelf een functie in te voeren.

Zonder lastig rekenwerk kan onderzocht worden wie er op den duur wint:

1,99 × + 1000 of 2 × − 1000.

Enzovoort ... .

- Het programma in de z.c. is nu:

```
10: INPUT "BEGIN BIJ:"; A
20: PRINT A
30: A = A + 3
40: GOTO 20
```

Als je start staat er:

BEGIN BIJ:-

Zeg bijvoorbeeld 7. Als je steeds $\boxed{\text{ENTER}}$ indrukt zie je nu: 7, 10, 13, 16, 19 ... enz. Kun je de tafel van 3 laten opzeggen?

Begin onder de 10, maar zorg dat je op 25 komt!

Het programma is direct begrijpelijk, behalve die +3. Blijkbaar wordt er steeds 3 opgeteld.

Hoe krijg je de tafel van 7? Dan zul je die 3 moeten veranderen!

Hoe krijg je 5, 10, 20, 40 ... enz.?

Stel je voor dat je ook ×10 i.p.v. +32 zet of −7, of /10! Machten en negatieve getallen komen te voorschijn als voortzetting van wat je al jaren wist.

Genoeg voorbeelden om een idee te krijgen van de vele mogelijkheden!

Algebrataal en Algoritmetaal

Vol boos opzet heb ik in het vorige gedeelte een BASIC-programmaregel opgenomen die er (zonder regelnummer) zo uitziet:

A = A + 3.

Waarschuwende didactische vingers worden opgeheven:

Pas op! Verwar algebra niet met Basic!

Even vooraf: dat doe ik niet, het is niet de bedoeling leerlingen in dit stadium zelf te laten programmeren. Toch kunnen we aardige dingen demonstreren aan de hand van juist dit voorbeeld.

A = A + 3 betekent:

a. reken het rechterlid uit, dat kun je als je A weet;
b. stop de uitkomst in geheugenplaats A.

Eigenlijk, in sommige talen moet dat zo, is

$A \leftarrow A + 3$

mooier.

De A in het rechterlid stelt voor "de waarde van A", de A in het linkerlid: de plaats waar het resultaat heen moet. ("Echte" programmeertalen maken soms dat onderscheid. Bijv. in LOGO:

MAKE $\underbrace{\text{"A}}_{\text{de naam}}$ $\underbrace{\text{:A}}_{\text{de waarde}}$ + 1)

Maar we zien in ieder geval: het =-teken is hier niet symmetrisch gebruikt. Er is een leesrichting van belang.

Nu weet iedereen dat leerlingen aan de = ook sterk de betekenis hechten van "reken-uit-en-zet-de-uitkomst-aan-de-andere-kant.

Vraag eens "tel de getallen van 1 tot 10 op". Negen van de tien leerlingen in het basisonderwijs zullen schrijven 1 + 2 = 3 + 3 = 6 + 4 = 10 + 5 = ... En komen op de juiste uitkomst.

Jan v.d. Brink beschrijft in Willem Bartjens (jrg. 2 nr. 2) dat 1e klassers wel raad weten met:

... = 3 − 4

maar niet met:

... = 4 − 3.

Blijkens gesprekken speelt de leesrichting een rol: ze beginnen ver van de = af.

De = heeft de rol van operator, niet van gelijkheidsaangever.

Wat is het nut van:

$3\,(a + b) =$

als je a en b niet weet? Met 3a + 3b ben je nog niets verder.

De taal van het rekenen, resultaten krijgen uit berekeningen verschilt dus van de taal van:

$a + b = b + a.$

Dat laatste is een open deur: altijd waar. Heel anders dan:

$a = 756$, dan : $7a - 4278 = 1000.$

Dat zegt tenminste iets, waar of niet-waar.

Algoritmetaal dus, om resultaat uit een berekening te krijgen, i.p.v. subtiele etherische relaties. Men kan mij tegenwerpen dat een identiteit als $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ zijn nut kan hebben bij het snelle uitrekenen van bijv. 81×79.
Ik moet bekennen dat ik als leerling in de 3e klas zocht of je ook zo'n snelle truc had voor 82×77. Het lukte me niet. Ik zou dergelijke identiteiten nu liever een plaats geven waar ze meer thuis horen: in de meetkunde van oppervlakte en omtrek; in de algebra zijn ze pas van nut als je grote formule's wilt herleiden tot kleine en dat is een doel dat voor de meeste leerlingen uit het LBO/MAVO niet aan de orde is. De algebra die we ze nu voorzetten is niet gelegitimeerd door het feit dat je dit nodig hebt voor later, die vlieger gaat voor de grootste hap leerlingen gewoon niet op.

De zakcomputer

Zoals op de Nederlandse Onderwijs Tentoonstelling was te zien, hebben de grote industrieën het onderwijs als afzetgebied ontdekt.
Ik heb er gekeken naar 50 dia's vol Nederlands dierenleven. Op een beeldscherm was te lezen waarom de das 's nachts jaagt en dat de ringslang niet giftig is. Dit programma werd besloten met een volautomatische multiple-choice-toets, waarvoor ik uitbalorigheid probeerde te zakken. Ik had beter meteéén goed antwoorden kunnen geven, dan had de computer tenminste niet 10 keer geduldig

DAT IS FOUT!

gebloosd, gevolgd door herhaling van de vraag.
Tegen de vriendelijke vertegenwoordiger heb ik gezegd dat het toch te gek is dat we met behulp van geavanceerde apparatuur terugvallen in een didactiek waar we nu net vanaf willen.
Dat idee was nieuw voor hem. "Ach, voor zo'n onderwijstentoonstelling zet je even snel iets in elkaar".
M.a.w.: kopen a.u.b., de rest kan ons niet schelen.
De nieuwe tovenaarsleerling stort emmers vol chips en belabberde programma's in het onderwijsbad.
Gelukkig weten wij wel de formule om dat te stoppen.
Heel simpel: uw propgramma past niet op mijn machine.
Alleen: over zeg 20 jaar is dat anders. Dan kun je net als je nu elke grammofoonplaat op elke pick up kunt leggen ... etc.
Dan moeten we weten wat we willen. Dit onderzoek naar de z.c. in het algebra-onderwijs is daarvoor. Het programma is niet direct bruikbaar met elke andere computer, maar geeft misschien wel inzicht in computergebruik bij algebra in het algemeen.
Ter afzwakking van deze opmerking: we geven de voorkeur aan korte eenvoudige computerprogramma's i.p.v. grote en lange. Dat verhoogt weer die uitwisselbaarheid.
Dat komt omdat de z.c. niet ter vervanging van de leraar dient (zoals in het NOT voorbeeld), maar alleen als hulpmiddel wordt gebruikt.