Ongelijknamige breuken aftrekken met een slakkengang (2)

L. Streefland
OW & OC, RU Utrecht

Summary

The present contribution deals with the same partial course in fractions, aimed at a process of gradual algorithmization in which the pupils could acquire a general procedure for the subtraction and addition of fractions with different denominators, on which had been reported earlier (vol. 2 nr. 3).
Some research results at the level of classroom-practice will be reported. The main question to be answered was whether or not the pupils would be capable to make further progress in algorithmization spontaneously and whether or not some of them would reach final stages when the process of progression in schematisation and applying shortcuts comes into final terms and a more or less definite algorithm will be established.

Inleiding

In de eerste bijdrage over het aftrekken van ongelijknamige breuken werd aan het eind gesteld:

> Natuurlijk is met het laatst beschreven niveau van schematisering de volledige leerweg nog niet geschetst.
> Maar... men zou het hierbij kunnen laten.
> Het is echter twijfelachtig of de leerlingen dit zullen doen. De mogelijkheden tot verkorten zijn nog niet uitgeput. De rek is er nog niet helemaal uit. En die ruimte moet benut, al was het maar door een beperkt aantal leerlingen. Zij zullen al toewerkend naar de meest doelmatige methode zo en passant hun ideeën over delers en kleinste gemeenschappelijke veelvouden wèl ontwikkelen en de toepasbaarheid daarvan in dergelijke situaties ervaren. Uiteindelijk zullen zij zelfs de tabellen de rug toekeren en ongelijknamige breuken aftrekken volgens klassiek recept. In een volgende bijdrage zullen we hier iets van laten zien (1).

Wat we bedoelden en ook duidelijk hebben laten zien, was, dat de verhoudingstabel bij het leren aftrekken (en optellen) van breuken een belangrijke rol kan spelen.
In essentie kwam het erop neer, dat de tabel als schema het voortbrengen van nieuwe situaties uitlokte, om het vergelijken van gegeven situaties te vergemakkelijken.

Voorbeeld:
Voor een koffiezetmachine luidt het recept '$\frac{3}{4}$ schepje per kop'. Hoeveel koffie is er nodig voor vier kopjes? Bedenk meer situaties.

S	$\frac{3}{4}$	3	6	..							
K	1	4	8	..							

Wordt dit vergeleken met:

S	$\frac{4}{5}$	4			
K	1	5			

Met het oog op de vraag: "Welke koffie is sterker?" dan kan dat via:

S	$\frac{3}{4}$	3	6	9	12	15
K	1	4	8	12	16	20

en

S	$\frac{4}{5}$	4	8	12	16
K	1	5	10	15	20

Op den duur worden tussensituaties meer en meer overgeslagen en het schema aangepast aan de steeds korter wordende oplossingen, b.v.

			×2	
S	$\frac{4}{5}$	4	8	16
K	1	5	10	20

en

			×5	
S	$\frac{3}{4}$	3		15
K	1	4		20

Dit proces nu van verkorten en aanpassen van het schema vormde de kern van "Slakkengang (1)", maar was niet tot het einde toe beschreven.
In vervolgonderzoek werd o.a. nagegaan of de geciteerde twijfel terecht was, dus in hoeverre de kinderen nog verder op de ingeslagen weg van steeds kortere oplossingen met aangepast schema zouden voortgaan. Ook waren we er benieuwd naar of de leerlingen wat los konden komen van de voorbeelden (in een context), zodat de ontwikkelde procedure als algoritme voor het aftrekken (en optellen) van ongelijknamige breuken een wat meer algemeen karakter zou (kunnen) krijgen.
Tien kinderen uit de zesde klas van dezelfde school waar het eerste onderzoek verricht was, deden mee aan dit voortgezette onderzoek. Met iedere leerling werd afzonderlijk gesproken. Door de leerkracht waren deze leerlingen ingedeeld in goed (g), gemiddeld (m), zwak (z) en zeer zwak (zz) (resp. 2, 3, 3, 2 leerlingen).

De opgaven

Elk gesprek begon met de opgave: $\frac{1}{4} - \frac{1}{3} = ..$ (soms aangevuld met $\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$; $\frac{1}{2} - \frac{1}{6}$; $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$).
Voor kinderen in het onderzoek was dit een *conflictopgave*. (Negatieve uitkomst).
Ontmaskering van het conflict direct bij het begin van het oplossen wijst op een hecht breukbegrip, dat is opgewassen tegen storende invloeden door de natuurlijke getallen.($\frac{1}{4} > \frac{1}{3}$ omdat $4 > 3$!).
Dit betekent overigens niet dat leerlingen, die geen conflict zien en argeloos rekenen, geen goed breukbegrip zouden hebben. Bovendien – en dat is het mooie van zo'n vraagstuk – komen degenen die direct aan het rekenen slaan het conflict later ook nog wel tegen en kunnen het dan alsnog beslechten.

$\frac{3}{8} - \frac{3}{12} =$ (Eén keer ook $\frac{1}{2} - \frac{2}{5}$).

Deze opgave werd gegeven vanwege de gemeenschappelijke factor in de noemers. De leerlingen die $\frac{3}{12}$ in verband zouden brengen met $\frac{1}{4}$ en $\frac{2}{8}$ konden zodoende snel tot een oplossing komen.

$\frac{2}{3} - \frac{3}{5} =$

Een gewone opgave, die zonder meer moest uitnodigen tot toepassing van het geleerde.

$1\frac{5}{6} + 1\frac{1}{8} =$

Optellingen waarbij "helen" betrokken waren, hadden de leerlingen tot dusverre nog niet gehad. Opnieuw dus een klein conflict. (Wat doe je als leerling met die enen in je tabellen?)

Reacties van kinderen

Een leerling (zz) kon zich de geleerde tabelmethode niet meer te binnenbrengen. Voor hem werd het leerproces van destijds (zes weken daarvoor) versneld herhaald. Acht leerlingen wisten zonder hulp aan de opgaven te beginnen. Een leerling (m) moest duidelijk op gang geholpen worden.
Tussen de genoemde acht leerlingen onderling bestonden echter de nodige verschillen, die betrekking hadden op het overslaan van tussensituaties, zeg het *verkorten* van de tabelmethode. Zelfs was het zó, dat de oplossingen van éénzelfde leerling per opgave qua verkortingsstadium, onderling konden verschillen. Drie leerlingen (g, m, z) die het meest systematisch te werk gingen, richtten zich direct op het bepalen van gemeenschappelijke noemers en gaven hieraan ook uiting.
Hun oplossingen kenmerkten zich door *algoritmisch tabelgebruik* met als verkortingsfasen:

a_1 het samenstellen van tabellen voor beide situaties tot en met de eerst gemakkelijk vergelijkbare:

1	2	3
4	8	12

en

1	2	3	4
3	6	9	12

a_2 Het aanbrengen van extra verkortingen "onderweg" b.v.

$\frac{3}{8} - \frac{3}{12} =$

3	9
8	24

en

3	6
12	24

b. Het toepassen van de uiterste verkorting, volgens de zgn. "kgv-methode".

Bv. $\frac{3}{8} - \frac{3}{12} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$.
$\frac{9}{24} - \frac{6}{24}$

Een enkele leerling ondersteunde deze wijze van werken door voor tellers en noemers enkele tafelprodukten uit te schrijven.

$\frac{1}{4} - \frac{1}{3} =$

$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{\cancel{3}1}{12}$

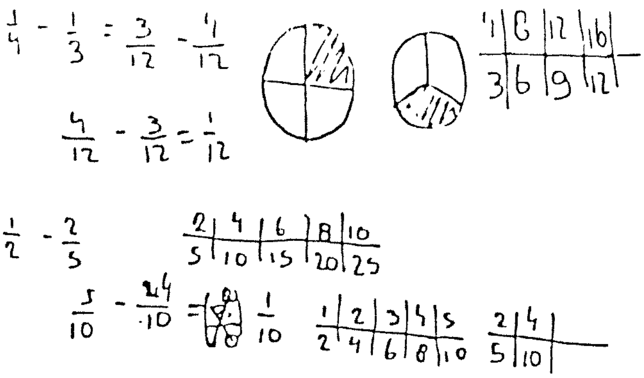
4×3=12
4×1=4) + ~~6x~~ :2 (noemers)
~~3~~ 3×4=12) + (TELLERS)
3×1=3

Hiermee zijn de verschillende verkortingen die geobserveerd werden, wel aangegeven. Er was één leerlinge (m) die alle verkortingen toepaste. Zij koos voor a_1) bij de opgaven 1 en 4, voor a_2) bij opgave 2 en voor b) bij opgave 3.
Deze leerlinge stemde haar oplossingsmethode kennelijk af op de moeilijkheidsgraad van de opgaven. Dit verschijnsel deed zich ook bij andere kinderen voor, zij het in mindere mate. Uit één en ander blijkt dat "terugval" tot vroegere stadia van verkorting mogelijk is bij deze benadering. Bovendien is de tabelmethode kennelijk zo flexibel, dat het verkortingsstadium aan de eisen die zekere opgaven aan de leerling stellen, kan worden aangepast.
Behalve tabellen werden eveneens rijtjes van in de uitkomst gelijkwaardige (ver)delingen toegepast. Deze methode was in het schoolprogramma eveneens aan de orde geweest.

$$\frac{3}{8} - \frac{3}{12} = \qquad \begin{array}{l} 3:8 \\ 6:16 \\ 9:24 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 3:12 \\ 6:24 \\ 9:36 \end{array}$$

$$\frac{9}{24} - \frac{6}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

De leerlingen die dit deden pasten ook de tabelmethode toe bij andere opgaven. Een geheel eigen verkortingsmethode werd door één leerlinge (m) toegepast. Kennelijk belust op maximale efficiency volstond zij namelijk met het samenstellen van slechts één tabel, waarin uitsluitend de noemers van beide breuken voor verschillende verdeelsituaties werden opgenomen (2).



't Werk van E (m)

Voor het bepalen van het verschil van twee stambreuken, werkte deze aanpak zonder haperen. Voor $\frac{1}{4} - \frac{1}{3}$ staan de gemeenschappelijke noemers in de tabel resp. op de *derde* en de *vierde* plaats, dus kan de opgave worden omgezet in $\frac{3}{12} - \frac{4}{12}$ zo redeneerde deze leerlinge. Zou zij het addertje zien bij $\frac{1}{2} - \frac{2}{5} =$? Blijkens haar werk maakte zij van de opgave $\frac{5}{10} - \frac{2}{10} = \frac{3}{10}$. Het gras bleek te lang! Zou E. de opgave dan misschien met twee tabellen kunnen maken? Desgevraagd loste zij de opgave toen zonder mankeren op, wees haar eerder gemaakte fout zelf aan en herstelde die (zie haar werk). Tevens werd zij zich toen (pas) bewust van deze nadelige kant van haar aanpak.
Bij de volgende opgaven, opgelost volgens haar eigen, verkorte methode – die liet zij zich terecht niet zomaar afnemen – trapte zij niet meer in deze valstrik.

Besluit

In de beide bijdragen over het aftrekken en optellen van ongelijknamige breuken hebben we vooral accenten geplaatst bij het *algoritmiseringsproces*. Allerlei zaken bleven buiten beschouwing, zoals bijv. de rol die de getallenlijn in dit geheel zou kunnen spelen.
Voorlopig is het laatste woord over de breuken – wat mij betreft – dus nog niet gezegd.

(1) Nieuwe Wiskrant 2e jrg. nr. 3, 1983, pag. 8, OW & OC, Utrecht.
(2) Dit gedeelte is ontleend aan hoofdstuk VII uit: Streefland, L., *Aanzet tot een nieuwe breukendidactiek volgens Wiskobas (Theoretisch deel I)*, OW & OC, Utrecht, 1983.