Even krijten (2)

G. Schoemaker
OW & OC, RU Utrecht

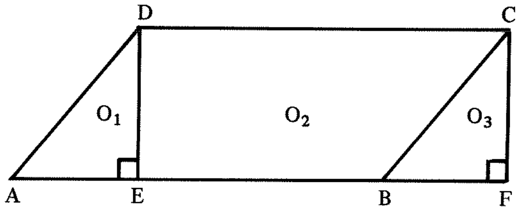
Summary

A circle has no area because it lacks length and height. A rather common saying among pupils. This attitude is created by authors of most mathematic textbooks. A way to avoid this is to work with glue and scissors.

Toen ik de eerste aflevering van "Even krijten" in de Nieuwe Wiskrant, jrg. 2 nr. 2 afgedrukt zag, moest ik wel even krijten van verdriet: de tekeningen van de grafieken waren niet afgedrukt en daar ging het net om. In de tekst stond slechts × en + als verwijzing naar de illustraties.
Collega's meenden te troosten door te zeggen, dat ze de tekeningen niet gemist hadden. Verhaal halen bij de eindredacteur gaf weinig genoegdoening. Hij trok meteen het boetekleed aan.
Er zit niets anders op dan verder krijten. Deze aflevering zal veel tekeningetjes bevatten, dat kan ik nu al beloven.

In de tweede klas van het voortgezet onderwijs wordt de formule voor de oppervlakte van een parallellogram afgeleid. Soms gebeurt dit als volgt:

> In deze figuur is een parallellogram ABCD getekend. De zijde AB is verlengd aan de kant van B. De lijnstukken DE en CF staan loodrecht op de lijn AB. De figuur bestaat uit drie delen. De oppervlakten van deze delen noemen we O_1, O_2 en O_3.



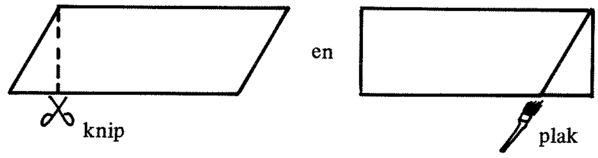
> Vul in:
> a. het beeld van △ AED bij translatie over vector ... is △ BFC, dus $O_1 = O_3$.
> b. $\left.\begin{array}{l} O(ABCD) = O_1 + \ldots \\ O(EFCD) = O_3 + \ldots \\ O_1 = O_3 \end{array}\right\} \Rightarrow O(ABCD) = 0(\ldots)$
> c. vierhoek EFCD is een rechthoek, dus
> $O(EFCD) = DC \cdot \ldots$
> Dus ook $O(ABCD) = DC \cdot \ldots$
> Omdat DC = AB, hebben we
> $O(ABCD) = AB \cdot \ldots$
> enz.

Oppervlakte parellellogram = basis × hoogte.

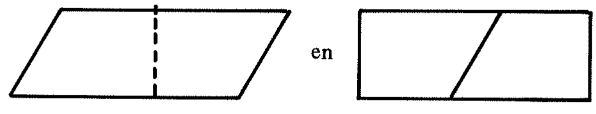
Allereerst valt me op dat de leerling hier geen enkele kans krijgt zelf een gedachtengang op te zetten. Je wordt als leerling gedwongen de gedachtengang van de schrijvers te volgen. Hier en daar mag je op de stippeltjes wat invullen.

Stippeltjesdidaktiek

Is hieraan te ontkomen? Je zou leerlingen een knip- en plaktaak kunnen geven. Daarmee kunnen ze tot de essentie van het bewijs komen.

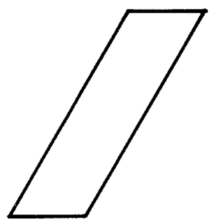


Als leerlingen echt de schaar hanteren, komen ze ook met:



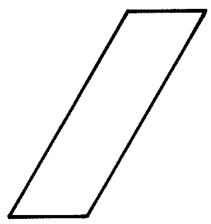
Blijft de vraag: Hoe schrijf je dit netjes op? Als je daarop in wilt gaan als lerares of leraar dan weten leerlingen tenminste van te voren *wat* je netjes op wilt schrijven. Ze hebben overzicht.
In het voorbeeld met de stappen a, b en c hebben de schrijvers van te voren geknipt in de gedachtengang. Tijdens het werken heeft een leerling geen *overzicht.* Het letterlijk en figuurlijk tegengestelde geldt: de leerling is *onderhorig.*

Het komt zelden voor dat een leerling opmerkt: "Hoe gaat 't dan met zo'n parallellogram?"

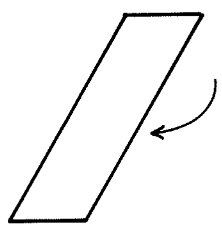


Ik heb altijd de neiging zelf op de ketting te springen als geen enkele leerling deze vraag stelt. Terughoudendheid is hier op z'n plaats. Als de leerlingen een volgende les hun zaakjes geleerd hebben en niemand komt met deze vraag, dan is het tijd voor een confrontatie.

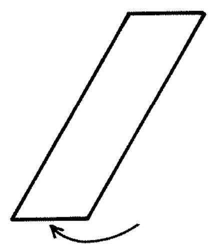
Leraar: "Hoe zit 't dan met dit parallellogram?"



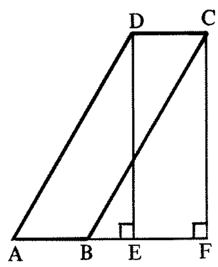
Meestal reageren leerlingen verward: " 't Kan niet... 't moet kunnen."
Vaak hoorde ik: "Je moet die als basis nemen."



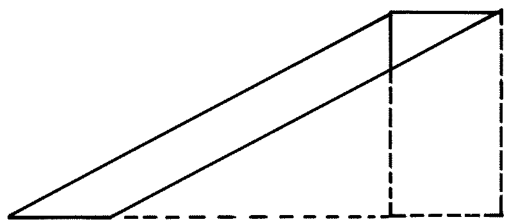
Op zich een prima antwoord, maar betekent dit dan dat deze zijde ongeschikt is voor het basisschap?

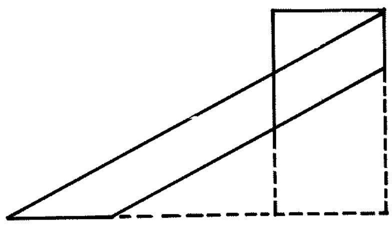


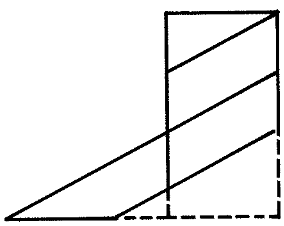
Ik heb nog nooit een leerling consequent het eerste bewijs zien toepassen:



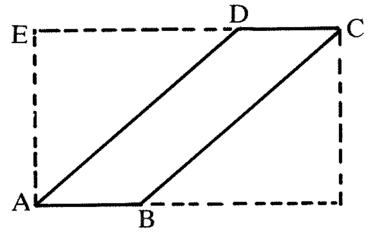
O_2 moet dan worden gelezen als het verschil in oppervlakte van de twee driehoeken.
Met een schaar in de hand kan het heel ingewikkeld worden. Al knippend kun je aardig in de war raken.



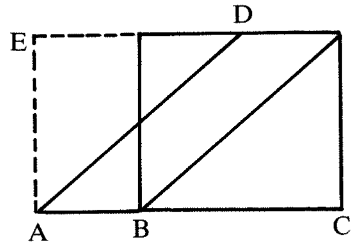




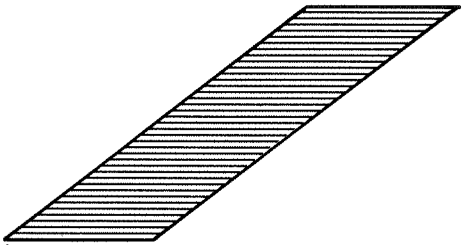
Weet ik zeker dat 't altijd uitkomt? Tja... dat wil je nu net bewijzen.
Is er een bewijs dat zonder complicaties verloopt ook als het parallellogram veel tegenwind heeft?
Sla om het parallellogram een rechthoek met de gewenste basis langs een rechthoekszijde:

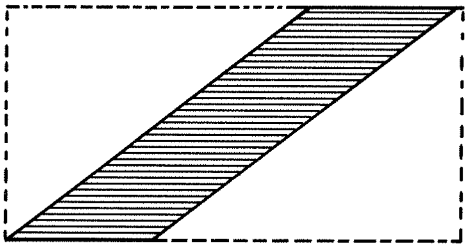


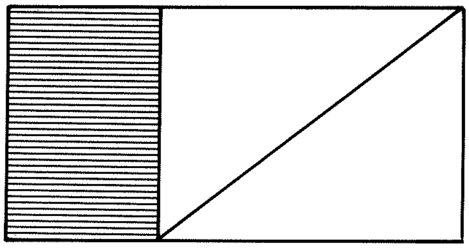
Hier helpt daadwerkelijk knippen en schuiven van de rechthoekige driehoek ADE langs $\overrightarrow{AB}$.



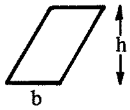
Het bewijs berust op het behoudsprincipe waar Piaget gebruik van maakt om kinderen te classificeren naar niveau van ontwikkeling.
In drie plaatjes:



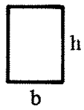




Je kunt de stelling: "De oppervlakte van het parallellogram

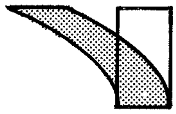


is net zo groot als de oppervlakte van de rechthoek."



op een dynamische manier illustreren op de zijkant van een telefoonboek:

Dat lukt nog beter als we een strook van circa 5 cm afzagen van een telefoonboek.
Hessel Pot schreef hierover in Wiskrant 7 van mei 1977. Hij maakte een houten hulsje waar de strook in past. Ook gebruikte hij een doorzichtig stukje plastic met daarop de contouren van de oorspronkelijke rechthoek. Hij kreeg ook zulke figuren:



Het parallellogram is de aanloop naar de oppervlakteformule van de driehoek. Ook hier kan na verloop van tijd een confrontatie plaatshebben.
"Als ik van deze driehoek de basis vast houdt en ik zorg dat de hoogte gelijk blijft, verandert de oppervlakte van de driehoek niet... Als ik de top een paar kilometer weg breng dan wordt de driehoek toch veel groter."