K.J.Z.Z.I.P.V.Q.E.D.

W.M.G. Querelle
K.S.G. Lunetten, Utrecht

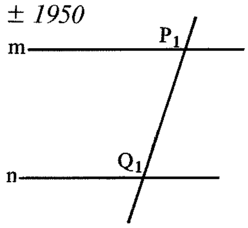
Summary

That goes without saying. This answer one often gets after posing a simple question. But when this is done on a test, children get – at least in the Netherlands – very low marks. Because, however trivial the problem may be, one never is allowed to answer "that goes without saying".
We, adults, developed the habit to answer easy questions in a very complicated way. We shouldn't expect this form children, but pose the right question instead.

Het zal september 1966 geweest zijn. Welgemoed, zij het met enige tegenzin reizen twee docenten wiskunde naar Amersfoort voor de eerste bijeenkomst heroriëntering wiskundeleraren-MAVO.
Beiden zijn onderwijzer geweest en hebben vanaf hun slagen aan de kweekschool alle vakken regelmatig vernieuwd.
Leerde je op de eerste cursus dat tekenen aangeleerd moet worden door gebruik te maken van grondfiguren:

drie jaar later is dat het slechtste wat je kunt doen en kliederen we met onze handen als driejarige kleuters in gekleurde stijfsel, smeren dat op een papier, wrijven er met een prop doorheen en leren dat dit expressie is.
Momenteel kunt u voorin 'n klas op een tafeltje een bootje zien staan en terwijl de leerkracht regelmatig met een doordringende stem zegt: "Goed kijken", proberen de leerlingen het ding na te tekenen.
Niet alle vakken veranderen zo ingrijpend, maar een kwart draai is toch vaak wel het minste. Als je lang genoeg in het vak blijft, maak je de draai terug ook weer mee.
Tafels leren was in, raakte uit en is onderhand weer in, meen ik. Zuiver Nederlands schrijven was in, raakte uit en is nu niet meer heel erg onbelangrijk. Kunt u zich voorstellen, dat die twee lieden rijk aan ervaring op heroriënteringsgebied in die trein tegen elkaar zeiden:
"Nou, het zal er wel op neerkomen, dat het superslecht is om met de evenwijdige lijnen te beginnen, dat moet vast de driehoek zijn."
Achteraf bezien bleek het wel wat meer in te houden, maar sloegen ze de plank zo ver mis?
In de loop der jaren is het weer rustig geworden binnen het wiskunde-onderwijs.
We weten weer waar we aan toe zijn.
Er heeft zich een nieuwe traditie gevormd en een beetje ervaren leraar leidt weer feilloos op. Tot??
Als ik bepaalde vragen van nu vergelijk met die van dertig jaar terug weet ik niet zo zeker of we er didactisch en inhoudelijk zoveel op vooruit zijn gegaan;

± 1950



Geg. m // n
Te bew.: $\angle Q_1 + \angle P_1 = 180°$

Er was iets, dat je mocht aannemen. Daar was een woord voor, moest je onthouden. De rest, even duidelijk te zien, mocht je niet zo zien, maar moest je bewijzen. Soms had je ineens een tien, dan weer een onvoldoende. Het was een zeer wisselvallig vak. Herkent u dit?
Na enige lessen werd het allemaal wat duidelijker, omdat de opgaven wat moeilijker werden.
Als ik tijd en zin had zocht ik nu naar verhandelingen van toen over meetkunde-onderwijs aan dertienjari-

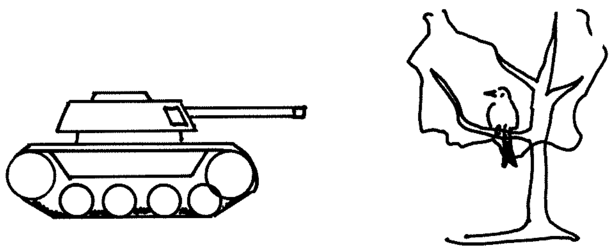
gen. Dan vond u onder dit artikel een rijtje nageplozen werken.
Ik hoop dat u op mijn en mogelijk eigen herinnering gelooft, dat men het er toen over eens was, dat dit niet de goede manier is om aan meetkunde te beginnen.

± *1980* Gegeven $\vec{OA} = \binom{6}{2}$ $\vec{OB} = \binom{-2}{6}$
Bewijs $|\vec{OA}| = |\vec{OB}|$

Leerling: "ja, want $\binom{6}{2} = \binom{-2}{6}$."
Onnodig te zeggen dat hier geen punten voor gegeven mogen worden, want het is helemaal fout wat er staat. Daar had moeten staan: Pythagoras:

$|\vec{OA}|^2 = 6^2 + 2^2$. $|\vec{OA}| = 2\sqrt{10}$.
$|\vec{OB}|^2 = (-2)^2 + 6^2$.
$|\vec{OB}| = 2\sqrt{10}$. Dus $|\vec{OA}| = |\vec{OB}|$.

Vergeet vooral dat laatste zinnetje niet. Scheelt weer een punt.
Voor een redelijk denkend mens is dit:



Het enige juiste antwoord op zulke vragen is toch: K.J.Z.Z. (Kun Je Zo Zien.)
Regelmatig stuit je zowel bij MAVO- als bij LBO-examens en bijgevolg ook in je onderwijs op dit soort vragen.
Ze zijn zo overbodig of simpel, dat ze moeilijk te beantwoorden zijn. Leerlingen snappen, evenals die van dertig jaar geleden, niet wat ze ermee moeten doen.

$f(x) = -2x + 3$.

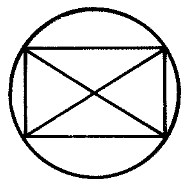
Bereken voor welke waarde van x $f(x) = -1$. Antwoord: 2. Meer niet. "Hoe kom je er aan?'. "Nou, dat zie je zo, dat moet -4 zijn, dus dat moet 2 zijn. Eventueel wijzen ze daarbij wat. "Maar waarom moet dat -4 zijn?"
??? "Ja, nou, anders wordt 't toch geen -1!".
Ze "zien" -4, maar realiseren zich niet dat dit "zien" berust op een bewerking.

Een ander jaar.

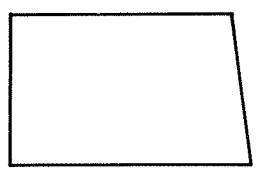
$f(x) = x^2 - 4x$.

Voor het berekenen van de nulwaarden 2 punten.
Maar er valt toch niets te berekenen! K.J.Z.Z. $\{0,4\}$.
Waarom vinden we dit niet volledig goed?
Omdat wij, leraren, een oplossingspatroon hebben vastgelegd en dit wensen te gebruiken, zinnig of niet.
Maar het is moeilijk om dingen, die je zo ziet, te beredeneren.
Je krijgt weer een cirkelredenering.
"Waarom 0 en 4?" "Nou, als ik die erin doe, komt er 0 uit."
Of: "Hoe kom je aan 0 en 4?" "Nou dat zie ik, dat is zo."

En waarom vinden we zo'n antwoord onvolledig? Omdat wij uitgevonden hebben dat je makkelijke vragen ook op een moeilijke manier kunt beantwoorden. Als u het mij vraagt, zitten *wij* fout en niet die leerlingen. Zij zijn niet zo dom, maar wij stellen de verkeerde vragen.
Ik moet vragen of er 27 uit kan komen.
En als het antwoord ja is, voor welke x dit dan zo is. Dan moet je als leerling iets gaan doen. Heb je de oplosmethode door, dan komt die op papier te voorschijn, zo niet dan teken je of je probeert wat en vindt een min of meer acceptabel antwoord. Dan kun je als leraar beslissen of je een antwoord: "tussen 7 en 8 want $f(7) = 49 - 28 = 21$ en $f(8) = 64 - 32 = 32$", voor deze leerling nog iets of helemaal niets waard vindt.
Ik wil niet beweren, dat onze leerlingen het summum van intelligentie zijn. Aan het tegendeel word ik welhaast iedere dag herinnerd. Maar dat wij daar altijd even adequaat op reageren geloof ik ook niet. Ik realiseerde me dat van de week weer eens toen ik met Thea de volgende opgave besprak:
"AC en BD zijn twee middellijnen van een cirkel. Verbind de eindpunten van die middellijnen achtereenvolgens met elkaar. Waarom is ABCD een rechthoek?"
Thea, niet te besmetten met enige wiskundige prietpraat, ze is er immuun voor, laat me haar oplossing zien:



Meer niet. Maar alles staat er. Want als ik een samenspraakje begin over middellijnen van cirkels en diagonalen van rechthoeken krijg ik weinig contact en repliceert ze: "Nou anders was het toch geen cirkel."En ze kan duidelijk niet volgen waarom er meer moet staan dan zij heeft. Ze stemt ermee in dat we "rond" veranderen in cirkel en dan vinden we het samen goed. Voor haar was het: K.J.Z.Z.
Bij de klassikale nabespreking zeg ik:
"In de andere klas zit iemand, die beweerde dat het niet helemaal een rechthoek hoeft te zijn. En 't was bij hem ook een beetje zo:"



"Dan heeft ie niet goed getekend."
"Ja dat zeg jij." "Nee hoor kijk maar, die middellijnen zijn niet even lang, want als je die even lang maakt, kom je nooit zo uit." Volledig? Nee, maar meer dan: "Omdat het een rond is."
De antwoorden op de dingen die wij vragen zijn vaak zo voor de hand liggend, dat ze moeilijk te beredeneren zijn. Het hopeloze is bovendien dat we zo inconsequent zijn.
Gelooft u dat niet? Moet u maar eens kijken.
Deze tekst staat boven de open vragen.

Lees dit eerst:
a. Schrijf de uitwerkingen van de volgende vier vraagstukken zo op, dat blijkt hoe de antwoorden zijn verkregen.

Met enige zachte dwang en eindeloos geduld krijg je een groot deel van de patiënten wel zo ver dat ze ook de in hun ogen overbodige zaken op papier zetten. Ik krijg ze zo gek dat ze schrijven:

$f(x) = 5$
$\frac{1}{2}x + 4 = 5$
$\frac{1}{2}x = 1$
$x = 2$;

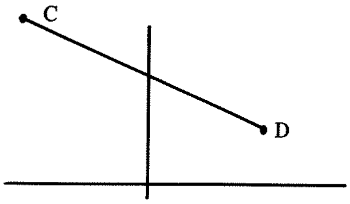
hoewel ook dit weer een duidelijk geval van K.J.Z.Z. is.

Elders: Teken de grafieken van f en g, waarbij f een tweede – en g een eerstegraadsfunctie is. Ik laat ze iedere grafiek verantwoorden, maar volgens de normering mag je een grafiek van een eerste-graadsfunctie zo tekenen. K.J.Z.Z.

Moeten de grafieken vervolgens gespiegeld worden, waarna je een vergelijking van de beeldlijn moet geven, dan mag je die weer *niet* zo zien. De lijn mag je wel "onverantwoord" tekenen, waarna je de richting afleest. Dan moet er iets gerekend worden. Wat? Nou ja, als je maar begint met $y = ax + b$ en dan pas a en b "vindt" dan zit je al aardig goed.

Raar? Vind ik ook.

Dit jaar hadden we bij MAVO-4 een opgave waarin de vergelijking van de lijn door $(-5,5)$ en $(7,1)$ gegeven moet worden. Een leerling "ziet" richting $\binom{3}{-1}$ en mag dat ook zonder meer opschrijven.



Hij/zij ziet ook dat, de daling bij de y-as $1\frac{2}{3}$ is en dus het snijpunt met de y-as $(0,3\frac{1}{3})$.

"Nee", zegt een leraar bij de nabespreking. "Daar krijgt hij niet het volledige aantal punten voor. Hij moet laten zien waarom het $3\frac{1}{3}$ is."

Dus niet nodig:

$$\vec{CD} = \vec{CO} + \vec{OD}$$
$$\vec{CD} = -\binom{-5}{5} + \binom{7}{1} = \binom{12}{-4}$$

en hieruit de richtingscoëfficiënt van de lijn berekenen maar wel eerst $y = -\frac{1}{3}x + b$ schrijven en dan $(7,1)$ substitueren om $3\frac{1}{3}$ te vinden. Ik kan me voorstellen dat je als leerling op goed geluk maar wat schrijft. Je weet nooit zeker of het deze keer zonder of met "wat erbij" moet. Als u onze manier van doen eens onderzoekt zult u ook ontdekken dat ons lesgeven van ad hoc afspraken aan elkaar hangt.

Ik kan me vergissen, maar ik meen dat men vroeger consequenter was, waardoor de leerling meer houvast had.

Het zou wel eens kunnen dat er een deel van de vormende waarde verdwenen is. En wat er voor in de plaats is gekomen is voor mij niet: K.J.Z.Z.