Grafen en matrices

S. Kemme
RU Groningen

Summary

In the experimental text "Matrices" developed for the HEWET-project one is confronted with two new subjects: graphs and matrices.
Not only new subjects, but also the way the subjects are treated are completely different from the usual approach.
Much attention is paid to the interpretation of a matrix, its square, or the product with another matrix. What do the entries in each specific case mean?
This article gives some background information on one of the chapters in the matrices-book: the chapter on connectivity matrices and graphs.

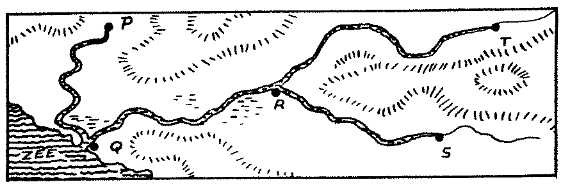
Inleiding

In het HEWET-pakket MATRICES word je tegelijkertijd geconfronteerd met twee nieuwe wiskundige onderwerpen: *grafen en matrices*, die voordien niet in het wiskunde-programma aan de orde kwamen. Van matrices heb je in het algemeen in je studie wel het nodige te verwerken gehad, voor grafentheorie zal dat wel anders liggen. Nog erger wordt het als je bij het doorlezen van het pakketje tot de ontdekking komt dat matrices heel anders worden gebruikt dan je tot nu toe gewend was. Geen gereken met "schoonvegen", inverteren, determinanten, eigenwaarden en eigenvectoren bepalen, maar meetkundige reeks van matrices maken, het kunnen interpreteren van vermenigvuldigen van matrices in deze situatie, enz. Wil je wat geïnspireerd les kunnen geven over dit onderwerp, dan zul je je wat verder moeten verdiepen in de materie en de andere manier van werken.
Met de tekst van MATRICES als uitgangspunt wil ik proberen wat meer achtergrond-informatie te geven over de grafen en matrices. Deze achtergrond zal niet alleen wiskundig van aard zijn, want werken met HEWET-materiaal betekent niet alleen maar met andere wiskunde bezig zijn, het heeft ook didactische gevolgen: je zult anders (minder formeel) met de wiskunde moeten omgaan (zeker in het wiskunde A programma), je zult andere vragen en eisen aan leerlingen moeten stellen,... Ook dit aspect van het HEWET-programma wil ik in mijn achtergrond-informatie proberen te verwerken.
In dit artikel zal ik me beperken tot grafen en matrices. Over matrices en bevolkingsgroei valt ook wel het nodige (en misschien nog wel veel meer) te schrijven, maar dat zou een verhaal op zich worden.

De tekst

Je begint opgetogen te lezen. Het ziet er mooi uit en het nodigt uit om er mee aan de gang te gaan. Op blz. 44 blijf ik haken. Je moet bepalen welke plaats in figuur 22 een centrale rol gaat spelen binnen een bepaald systeem.

De oplossingsmatrix T kan – zeker in gecompliceerde gevallen – snel bepalen of voorspellen welke plaats een centrale rol gaat spelen binnen een bepaald systeem.



> 110. *Vijf plaatsen, P, Q, R, S en T zijn verbonden door een tamelijk snel stromend rivierensysteem. In de goede oude tijd was daardoor over de rivier alleen éénrichtingsverkeer mogelijk.*
Maak een "gerichte" (d.w.z. met pijlen) graaf van dit systeem en een verbindingsmatrix D.

Dat vind ik nu zo verraderlijk, wat bedoelen ze met "centrale plaats binnen een bepaald systeem"? Dat kan natuurlijk van alles zijn. Eerst maar eens verder werken, dan blijkt misschien vanzelf wat de bedoeling is.

> 111. *Bepaal D^2, D^3 en $D^1 + D^2 + D^3$.*
Waarom zijn vier-staps-routes niet mogelijk?
Welke plaats ligt het meest centraal?

Ik geef maar even de antwoorden, dat maakt het wat gemakkelijker.

$$D = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad D^2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad D^3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

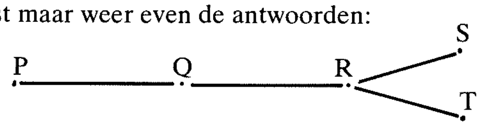
(Ik heb die matrices natuurlijk niet echt zitten vermenigvuldigen, maar heb gewoon even geteld wat het aantal 2-staps en 3-staps routes is:)

$$D^1 + D^2 + D^3 = \begin{array}{c|ccccc|l} & P & Q & R & S & T & + \\ \hline P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rightarrow 0 \\ Q & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \rightarrow 4 \\ R & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \rightarrow 2 \\ S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rightarrow 0 \\ T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rightarrow 0 \\ \hline + & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & \end{array}$$

Q ligt duidelijk het meest centraal, want naar Q gaan 4 routes en naar R gaan er maar 2 en van Q vertrekken er 0, van R 1, dus totaal voor Q: 4 routes (van en naar), voor R: 3. (Trouwens daar heb je dat hele matrixgedoe natuurlijk niet voor nodig, je ziet zo ook wel dat Q het meest centraal ligt: het is de havenplaats.)
Oh ja, de tweede vraag van > 111 was ik even vergeten. Anwoord: omdat 3-staps routes al niet mogelijk zijn. (Stomme vraag, verder naar 112.)

> 112. *Toen er stoomboten kwamen kreeg het hele systeem tweerichtingsverkeer. Noem de bijbehorende matrix F en beantwoord overeenkomstige vragen als bij > 111.*

Eerst maar weer even de antwoorden:



$$F = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&1\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix} \quad F^2 = \begin{pmatrix} 1&0&1&0&0\\ 0&2&0&1&1\\ 1&0&3&0&0\\ 0&1&0&1&1\\ 0&1&0&1&1 \end{pmatrix} \quad F^3 = \begin{pmatrix} 0&2&0&1&1\\ 2&0&4&0&0\\ 0&4&0&2&2\\ 1&0&2&0&2\\ 1&0&2&2&0 \end{pmatrix}$$

$$F + F^2 + F^3 = \begin{pmatrix} 1&3&1&1&1\\ 3&2&5&1&1\\ 1&5&3&3&3\\ 1&1&2&1&3\\ 1&1&3&3&1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \overset{+}{\rightarrow} 6 \\ \rightarrow 12 \\ \rightarrow 15 \\ \rightarrow 9 \\ \rightarrow 9 \end{array}$$

(Ha, dat is dus de oplossingsmatrix!) Welke plaats ligt er nu het meest centraal? Van en naar Q gaan 24 routes, van en naar R gaan er 30. Dat is een uitgemaakte zaak: R. (Toch blijft Q de haven-plaats, of wordt Q nu gedegradeerd tot voorhaven?) Nou vergeet ik weer de tweede vraag van > 111. Die is nu nog stommer dan ie al was, want er zijn wèl 4 staps-routes mogelijk.
Maar waarom zou ik eigenlijk bij $F + F^2 + F^3$ ophouden om te bepalen wat de meest centrale plaats is? Waarom zou je ook geen 4-staps routes in je beslissing betrekken, of ook 5-staps routes, enz.? Gewoon even doen.

$$F^4 = \begin{pmatrix} 2&0&4&0&0\\ 0&6&0&4&4\\ 4&0&8&0&0\\ 0&4&0&2&2\\ 0&4&0&2&2 \end{pmatrix}$$

$$F + F^2 + F^3 + F^4 = \begin{pmatrix} 3&3&5&1&1\\ 3&8&5&5&5\\ 5&5&11&3&3\\ 1&5&3&3&5\\ 1&5&3&5&3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \overset{+}{\rightarrow} 13 \\ \rightarrow 26 \\ \rightarrow 27 \\ \rightarrow 17 \\ \rightarrow 17 \end{array}$$

R wint het nog steeds, al is het verschil met Q een stuk kleiner geworden. Dat geeft moed om door te gaan.

$$F^5 = \begin{pmatrix} 0&6&0&4&4\\ 6&0&14&0&0\\ 0&14&0&8&8\\ 4&0&8&0&0\\ 4&0&8&0&0 \end{pmatrix}$$

$$F + F^2 + F^3 + F^4 + F^5 = \begin{pmatrix} 3&9&5&5&5\\ 9&8&19&5&5\\ 5&19&11&11&11\\ 5&5&11&3&5\\ 5&5&11&5&3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \overset{+}{\rightarrow} 26 \\ \rightarrow 46 \\ \rightarrow 57 \\ \rightarrow 29 \\ \rightarrow 29 \end{array}$$

R heeft weer dik gewonnen. Ik geef het op. Als je naar de graaf kijkt, zie je trouwens dat het ook onzin is om naar 4 en 5-staps routes te kijken. Je krijgt alleen maar meer "heen-en-weer-lussen" en die zijn voor het centraal zijn van een plaats niet interessant. Je moet dus stoppen na 3: de diameter.

Diameter en centrum

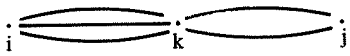
Hoe bepaal je nu het centrum van een graaf?
Je rekent de oplossingsmatrix uit en daarvan bepaal je de kolom- en rij-totalen. Voor ieder hoekpunt reken je zo het totale aantal *van-* en *naar-*routes uit door de bijbehorende kolom- en rij-totalen bij elkaar op te tellen. Het grootste dergelijke getal levert het centrum hoekpunt. Er kunnen dus meer centra in een graaf zijn.
Dat is het recept. Maar wat betekent dat in een graaf? Wat voor bijzonders is er aan dat centrumpunt?
Van alle hoekpunten is (zijn) dit het (de) punt(en) met de meeste routes met een aantal stappen kleiner dan of gelijk aan de diameter.
Wat betekent dan *diameter*?
De diameter is het getal dat het grootst mogelijke aantal stappen van kortste routes in een graaf aangeeft. Dus voor iedere route met meer stappen dan de diameter zul je een kortere met hetzelfde begin- en eindpunt kunnen kiezen. Centrum en diameter zijn samenhangende begrippen. De diameter geeft de grens aan welke n-staps routes je nog voor het "centrum zijn" van het hoekpunt relevant acht. Dat was

mijn ontdekking nadat ik maar wat verder was gaan rekenen met hogere machten van de verbindingsmatrix.
In MATRICES staat het recept om de diameter te bepalen: je bepaalt de oplossingsmatrix, de hoogste macht van de matrix die je daarvoor nodig had is de diameter. Is dat recept in overeenstemming met de betekenis van diameter in de graaf?
Even kijken. T, de oplossingsmatrix, ziet er zó uit:

$$E + E^2 + E^3 + \ldots + E^d$$

(diameter = d), t_{ij}, het i, j-element van T, geeft het aantal routes aan van i naar j waarvan het aantal stappen $\leqslant$ d is.
Waarom?
E is de verbindingsmatrix en geeft dus per afspraak het aantal 1-staps-routes aan in de graaf dus e_{ij} = aantal 1-staps-routes van i naar j. (Ik heb de hoekpunten genummerd van 1 t/m n.) Om handig te kunnen rekenen moeten we even een duidelijke en efficiënte notatie uitvinden. Laten we de elementen van E^n aangeven met $e_{ij}^{(n)}$, dan is: $e_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} e_{ik} \cdot e_{kj}$

Nu stelt $e_{ik} \cdot e_{kj}$ het aantal wegen van i naar j voor die via k gaan, met k als enige tussenpunt.

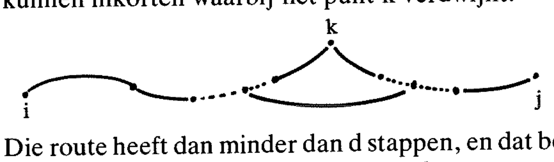


Dat is het aantal 2-stapsroutes van i naar j via k. Laat je nu k alle hoekpunten van de graaf doorlopen dan stelt $\sum_{k=1}^{n} e_{ik} \cdot e_{kj}$

het totale aantal 2-staps routes van i naar j voor.
Voor E^3 geldt een soortgelijke redenering: $E^3 = E^2 . E$

dus $e_{ij}^{(3)} = \sum_{k=1}^{n} e_{ik}^{(2)} . e_{kj}$.

$e_{ik}^{(2)}$ is het aantal 2-staps routes van i naar k, e_{kj} het aantal 1-staps routes van k naar j, dus $e_{ik}^{(2)} . e_{kj}$ stelt het aantal 3-staps routes van i naar j via k voor.
Dezelfde redenering hang je op voor de overgang van E^n naar E^{n+1}. Daarmee is de laatst gestelde vraag beantwoord. Gaan we verder met de vraag daarvoor.
d is het kleinste getal waarvoor $E + E^2 + \ldots E^d$ geen nullen meer heeft. Dat wil zeggen: er is een plaats i, j die in $E + E^2 + \ldots + E^{d-1}$ nog nul is maar in $E + E^2 + \ldots + E^d$ niet meer. Dan geeft t_{ij} het aantal d-staps *kortste* routes van i naar j aan. Stel namelijk dat er een d-staps route van i naar j gaat (via k) die je zou kunnen inkorten waarbij het punt k verdwijnt.

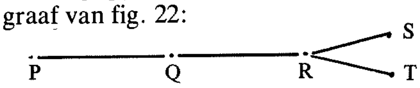


Die route heeft dan minder dan d stappen, en dat betekent dat er op plaats i, j al eerder een element ongelijk 0 moet hebben gestaan.
Uit de definitie van $T(t_{ij} \neq 0)$ en uit het feit dat $e^{(r)} \geqslant e^{(s)} \geqslant 0$ als $r \geqslant s$, volgt dat er voor een m-staps route van i naar j, waarbij m > d, ook een kortere moet bestaan.
Hiermee hebben we laten zien dat het recept precies doet wat het voorstelt.
Tot zover over diameter, nu weer terug naar het centrum. In onze opvattingen is dat het punt (die punten) van de graaf waarvan de som van de bijbehorende kolom en rij van de oplossingsmatrix maximaal is, of:

$$\sum_{k=1}^{n} t_{ik} + \sum_{k=1}^{n} t_{ki} \text{ is maximaal.}$$

Even in een hoek over grafentheorie kijken. In Bondy en Murty (1976) staat: het centrum is dat punt i (die punten) van de graaf waarvoor $\max_j d(i, j)$ minimaal is.

d(i, j) is de kortste afstand tussen twee punten, dat is: het kleinste aantal stappen dat je nodig hebt om van i naar j te komen. Je berekent dus voor ieder punt i de afstand tot het verst van i verwijderde punt, het punt i (de punten) waarvoor die afstand het kleinst is noem je het centrum (de centra). Hier geldt als criterium niet de optimale verbondenheid met de andere punten, maar, in zeker opzicht, het "dichtst bij liggen".
Ook in Berge (1973) en Wilson (1972) staat deze definitie. In het boekje "Grafentheorie" van het Mathematisch Centrum komen de begrippen centrum en diameter niet voor.
Dat de begrippen niet gelijkwaardig zijn zie je al aan de graaf van fig. 22:



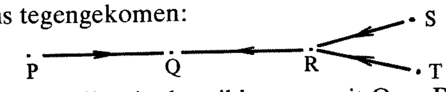
In onze definitie is R het centrum, in de "officiële" zijn R en Q het allebei.
Welke definitie je kiest hangt af van de aard van het probleem. Als je een centrale plaats voor een telefooncentrale wilt bepalen, dan zul je het aantal ondercentrales zo klein mogelijk willen houden, en zul je voor de tweede definitie kiezen. Bij het bepalen van een centrale vestigingsplaats voor een vertegenwoordiging van een bedrijf, zul je juist zoveel mogelijk mogelijkheden willen hebben om andere plaatsen te bereiken en kies je misschien voor de eerste definitie.
Je kunt natuurlijk zelf ook wel een definitie voor "centrum" bedenken. Bijvoorbeeld door vanuit een punt de totale afstand tot alle andere punten te berekenen en het punt met de kleinste totale afstand tot centrum te benoemen. Deze definitie wordt zeker interessant als je iedere route van een getal voorziet dat de echte afstand tussen twee punten aangeeft, of de tijd die nodig is om vanuit toestand i in toestand j te komen.

Nog meer vragen

Hoe weet je nu of die oplossingsmatrix bestaat? Stel dat je vlijtig die meetkundige reeks van matrices

$$E + E^2 + E^3 + \ldots$$

aan het uitrekenen bent, maar dat in het resultaat hardnekkig nullen blijven verschijnen. Gelukkig kan dat nooit op wisselende plaatsen, is een plaats één keer ongelijk nul, dan blijft dat zo. Dus die nullen moeten hardnekkig op één plaats blijven terugkomen.
Hoe ziet de graaf in een dergelijke situatie eruit? Stel dat er zo'n 0 op plaats i, j terug blijft komen. Dat betekent dat je nooit van i naar j kunt komen, ook niet met een ontzettende omweg. Maar zo'n situatie zijn we al eens tegengekomen:



P, S en T zijn niet bereikbaar vanuit Q en R.
In de reeks moeten nogal wat nullen blijven zitten.

We hadden al gevonden dat:

$$D + D^2 + D^3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 1&0&1&1&1 \\ 0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Dat is dus duidelijk geen oplossingsmatrix, maar D^4, D^5, D^6, ... zijn verder allemaal 0 en zullen geen bijdrage meer leveren. Met andere woorden de oplossingsmatrix bestaat niet in deze situatie!

Onder welke omstandigheden bestaat die dan wel?

Alle elementen van $E + E^2 + E^3 + \ldots + E^d$ ongelijk 0 betekent dat alle punten met elkaar verbonden zijn door 1- of meerstaps routes. Een dergelijke graaf heet *samenhangend.*

Omgekeerd, heeft iedere samenhangende graaf natuurlijk een oplossingsmatrix. Je zoekt op hoe je van ieder punt i naar ieder punt j kunt komen, je bepaalt de lengte van de langste van deze wegen, bijvoorbeeld s, dan weet je zeker dat ieder element van

$$E + E^2 + E^3 + \ldots + E^s$$

ongelijk 0 is. Je hebt misschien niet meteen alle kortste wegen genomen, het getal s kan dus misschien nog wel kleiner gekozen worden, dat bepaalt dan uiteindelijk de diameter.

Het begrip "samenhang" kom je in de grafentheorie los van het begrip "oplossingsmatrix" tegen. Achteraf blijkt er dus een sterke overeenkomst te zijn. Over het algemeen bekijk je de samenhang van een graaf alleen bij ongerichte grafen (dat zijn grafen waar je heen en weer kunt van i naar j). De relatie "verbonden zijn met" is dan een equivalentie-relatie (als je tenminste naar meer-staps routes kijkt en een punt per definitie met zichzelf verbonden acht) en de graaf valt dan uiteen in een stel samenhangende componenten.

In een dergelijke situatie ziet de verbindingsmatrix er zó uit:

$$E = \begin{pmatrix} E_1 & & O \\ & E_2 & \\ O & & \ddots \; E_k \end{pmatrix}$$

In de richting van de hoofddiagonaal staan allemaal verbindingsmatrices van de samenhangende componenten, de rest is nul. De hoekpunten zijn daarbij wel geschikt genummerd, zodat opeenvolgende nummers in één component zitten.

Kijk je nu naar de meer-stapsroutes in de graaf, dan vind je die alleen maar binnen de samenhangende componenten.

Dus:

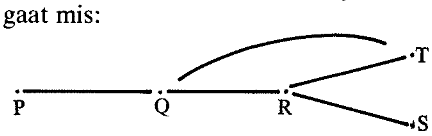
$$E^n = \begin{pmatrix} E_1^n & & O \\ & E_2^n & \\ O & & \ddots \; E_k^n \end{pmatrix}$$

Zó bewijs je een stelling uit de matrixrekening met behulp van de grafentheorie. Je ziet nu ook meteen dat de graaf in dit geval geen oplossingsmatrix heeft.

Zijn er situaties waarin de reeks $E + E^2 + E^3 + \ldots$ convergeert? Je moet natuurlijk eerst afspreken welke convergentie je gaat bekijken. In ons geval ligt het voor de hand om de reeks als reeksen van n^2-getallen op te vatten. Bovendien zullen we ons beperken tot verbindingsmatrices met nullen en enen.

Eén voorbeeld van convergentie hebben we al gezien:

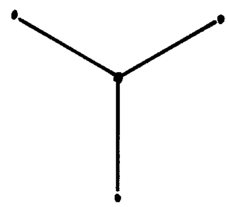
maar er hoeft maar een heel klein beetje te veranderen en het gaat mis:



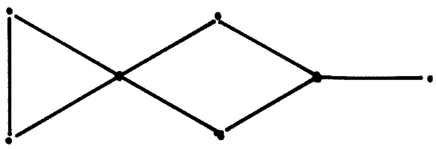
Je kunt nu uit Q wegkomen en dat geeft de mogelijkheid om steeds langere routes te gaan maken doordat je kunt gaan rondlopen.

Hoe kun je nu aan E zien of $E + E^2 + E^3 + \ldots$ zal gaan convergeren? Die convergentie zal alleen maar optreden als je kunt laten zien dat $E^n = 0$ voor zekere n. Een dergelijke situatie doet zich precies dàn voor als de bijbehorende graaf één of meer "putten" bevat: dat zijn punten waar je wel kunt komen, maar van waaruit je nooit meer kunt vertrekken. Bovendien moeten alle wegen in dergelijke putten uitkomen.

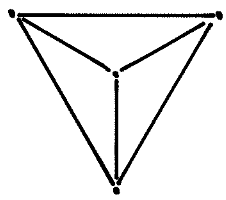
Bijvoorbeeld:



één put



twee putten



In een ongerichte graaf doet zoiets zich nooit voor, je kunt daar altijd een punt in en uit wandelen.

Dus: $E^n \neq 0$, voor alle natuurlijke getallen n, bij symmetrische matrices E.

In het asymmetrische geval ligt het lastiger. Je moet dan bij de matrix proberen af te lezen of er putten zijn en of alle wegen in dergelijke putten eindigen.

Tot slot

In MATRICES staat een tamelijk algoritmische definitie van diameter. Je ziet: er zit veel meer achter. Dat is ook weer van invloed op de manier waarop je met matrices kunt rekenen.

Er is een soort analogie tussen "functies en grafieken" en "grafen en matrices". Aan de ene kant heb je de

meetkundige voorstelling van grafieken en grafen, aan de andere kant is er de algebraïsche berekening met matrices en formules. Beide aspecten inspireren elkaar. Door de meetkundige kant ben je in staat beter en sneller te doorgronden waar je berekeningen naar toe gaan, de algebraïsche kant verschaft je meer zekerheid en behoed je voor intuïtieve misstappen.
Grafentheorie is een dankbaar onderwerp op school. Het is jammer dat het zo weinig aan de orde komt. Ook in MATRICES is het eigenlijk alleen maar een hulpmiddel om de betekenis van het vermenigvuldigen van matrices aan te geven. Grafentheorie verdient een beter lot.
Door jezelf allerlei vragen te stellen over de stof stoot je onverwacht op allerlei nieuwe feiten. Daardoor gaat het geheel meer voor je leven, maar raak je vooral ook beter thuis in het onderwerp. Het beantwoorden van die vragen is natuurlijk een gebed zonder eind en kost je menige vrije avond.

Literatuur

Het onderstaande overzicht behandelt alleen maar de boeken die tot mijn beschikking staan en die me wel aanspreken. Er zijn er natuurlijk veel meer en beter, alleen ik ken ze niet.

Berge, C.: *Graphs and Hypergraphs.* North Holland Publishing Company, Amsterdam 1973.
Indertijd (rond 1970) was dit een standaardwerk. Ik heb de indruk dat het nu al weer een beetje verouderd is. Maar het blijft een prettig leesbaar boek met veel toepassingen. Het is zeer degelijk en exact opgezet.

Bondy, J.A.; U.S.R. Murty: *Graph Theory with Applications.* MacMillan Press, London 1976.
Een heel gevarieerd boek, zowel naar onderwerp: exacte opbouw naast plaatjes, toepassingen en opgaven, als naar moeilijkheidsgraad. Aan het eind staan nog 50 onopgeloste problemen. Zeer geschikt om thuis af en toe uit te werken.

Brand, T.; A. Sherlock: *Matrices: Pure and Applied.* Arnold, London 1970.
Hoofdstuk 8 bevat een paragraaf over matrices en netwerken. Hierin staan weer hele andere toepassingen van matrices. Een heel mooi boek om in korte tijd aan de weet te komen wat je allemaal met matrices kunt doen.

Grafentheorie. Stichting Mathematisch Centrum, Amsterdam 1978.
Een bewerking van het boekje van Wilson door een aantal leraren als eindresultaat van een lerarencursus die georganiseerd werd door het Mathematisch Centrum. Het bevat veel minder dan Wilson, maar is wel leesbaarder. Erg geschikt om met het onderwerp kennis te maken.

Wilson, R.: *Introduction to Graph Theory.* Longman, 1972.
Zoals de meeste introducties in wiskundige onderwerpen, een pittig boek. Erg gecomprimeerd geschreven maar wel duidelijk.

Biggs, N.L.; E.K. Lloyd; R.J. Wilson: *Graph Theory 1736–1936.* Oxford University Press, Oxford 1977.
Een boek over de geschiedenis van de grafentheorie. Op het ogenblik één van mijn favoriete wiskundeboeken, waarin ik regelmatig zomaar eens een uurtje zit te lezen. Dat kan omdat de onderwerpen tamelijk los van elkaar staan. Veel illustraties en vertaalde "originele" teksten. Je hoeft echt geen deskundige te zijn om het te kunnen lezen.