Kortste wegen op een krom oppervlak

H. Freudenthal
OW & OC, RU Utrecht

Summary

In a previous paper I promised to deal with shortest paths on curved surfaces. When cylinders, cones and finally torsi are rolled out upon a plane, shortest lines reproduces as straight lines.
In order to be rolled out upon a plane a surface must touch the plane at every moment along a straight line; so it must consist of straight lines along which the tangential plane is constant.
How about shortest lines on other surfaces, such as the sphere? Again, rolled out on the plane along a shortest line, its trace is rectilinear.

Het is om een belofte in te lossen uit Nieuwe Wiskrant nr. 2 dat ik op de "Kortste Wegen" terugkom. De kortste weg in het vlak is de rechte, althans als er geen beletselen zijn of als je niet verplicht bent onderweg een spiegellijn of een biljartband aan te doen. Kortste wegen of veelvlakken komen neer op rechte lijnen in hun uitslagen – de uitslag bijvoorbeeld van het (binnen-)oppervlak van een kamer waar een vlieg van de ene muur naar de andere moet.
Maar er zijn ook *kromme* oppervlakken die je kunt "uitslaan" – een cilinder bijvoorbeeld of een kegel. Ze worden langs een beschrijvende opengeknipt en dan op het vlak uitgestreken. Uitgestreken uiteraard zonder rekken en knippen, dus zó dat afstanden behouden blijven.

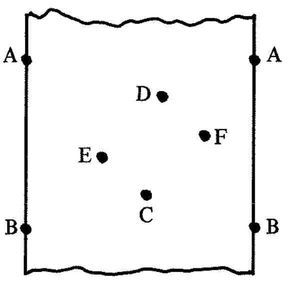

Fig. 1

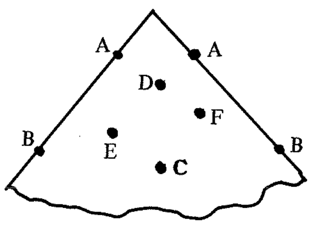

Fig. 2

Fig. 1-2 vertonen zo'n oppervlakte in uitgeslagen staat – gelijke letters geven een aanwijzing hoe de randen van de uitslagen, afkomstig van de sneden in het oppervlak, aan elkaar te plakken. Of die uitslagen afkomstig zijn van een omwentelingscilinder en -kegel, dan wel van een elliptische of nog algemenere, valt hier niet uit af te leiden. Je hebt dus nog alle kans om het oppervlak na het samenplakken te vervormen.
Trouwens je hoeft de cilinder of kegel niet eens open te knippen om hem uit te slaan. Je kunt het ook doen door hem al te wentelen op het vlak. Afwentelen uiteraard zonder slippen, zodat dus alle afstanden behouden blijven. Op elk ogenblik van het afwentelen valt een hele beschrijvende van de cilinder of kegel binnen het platte vlak en valt het raakvlak aan die beschrijvende samen met het platte vlak waar je op afwentelt.
Maar laten we het nog eventjes bij het openknippen laten en naar kortste wegen op het oppervlak kijken.
De kortste weg tussen twee punten op het oppervlak wordt in de uitslag weer rechtlijnig weergegeven. Maar hierbij past voorzichtigheid. Tussen C en D kun je inderdaad met het rechte lijnstuk volstaan, maar van E naar F is het "achterom" korter dan langs het lijnstuk EF. Met afwentelen i.p.v. doorknippen zie je dat beter (fig. 3-4), vooral als je meervoudig wentelt, waarbij dan niet alleen de punten van de snede, maar alle punten van het oppervlak (behalve de kegeltop) meervoudig worden gerepresenteerd

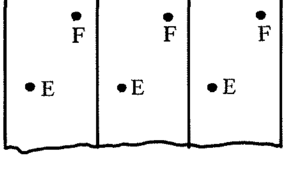

Fig. 3

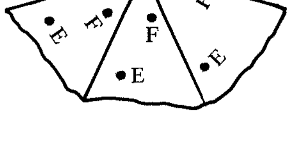

Fig. 4

In fig. 3-4 is duidelijk te zien dat het over de snede heen van E naar F het kortste is. Andere rechtlijnige verbindingen van E naar F in het afgewenteld oppervlak leveren op het oppervlak zelf krommen die wel bij stukjes en beetjes, maar niet in het groot kortste wegen zijn. Teruggebracht op een omwentelingscilinder of -kegel vertonen ze zich als schroeflijnen respectievelijk naar de top toe spiraliserende lijnen (fig. 5-6).

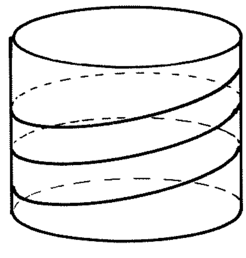

Fig. 5

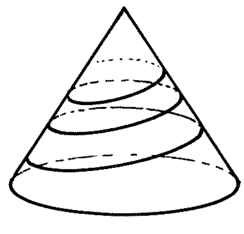

Fig. 6

Zijn er nog meer oppervlakken die je op het vlak kunt afwentelen – uiteraard altijd afwentelen zonder te laten slippen, dus met behoud van alle afstanden? Beslissend voor de afwentelbaarheid van cilinder en kegel was dat bij het afwentelen het platte vlak waar je op afwentelt telkens niet maar in een enkel punt, maar in een hele lijn wordt geraakt – dus anders dan bijvoorbeeld bij een bol, die je nogal willekeurig op een vlak kunt laten rollen, maar er niet op afwentelen.
Opdat je enig oppervlak nu op een plat vlak kunt afwentelen is vereist dat het oppervlak uit lijnen is samengesteld, zodat door elk punt P van het oppervlak een lijn gaat die geheel op het oppervlak ligt. Maar dat is nog niet eens voldoende. Bij een eenbladige hyperboloïde gaan er zelfs door elk punt P twee lijnen die op het oppervlak liggen.

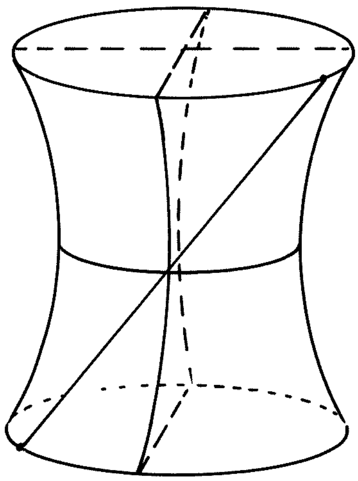

Fig. 7

Ten behoeve van de afwentelbaarheid komt er nog iets bij. We weten immers dat op elk ogenblik van het afwentelen het raakvlak van het oppervlak moet samenvallen met het platte vlak waar je op afwentelt. Dit betekent dat we moeten uitkijken naar kromme oppervlakken met door elk punt één lijn die op het oppervlak ligt, maar dan zodanig dat langs die lijn het raakvlak aan het oppervlak standvastig is (dus niet om de lijn heendraait).

Zulk soort oppervlak heet een *torsus*. Een torsus is dus een oppervlak dat in elk punt door zijn raakvlak langs een hele lijn wordt geraakt. Cilinders en kegels zijn speciale – men mag zelfs zeggen ontaarde – torsi.
Elke torsus laat zich inderdaad op het platte vlak afwentelen. Om dat in te zien, begin maar in een punt P en wentel het raakvlak vanuit P verder, zodat het aldoor raakvlak blijft – het glijdt als het ware over de torsus heen. Stel je nu het omgekeerde voor: houd het vlak vast en laat de torsus eroverheen wentelen. Hij wordt dan inderdaad op het platte vlak afgewenteld.
Neem nu zo'n torsus T en wentel hem op het platte vlak V af. Op elk ogenblik krijg je als afdruk van T op V een rechte lijn. Die afdruklijnen volgen er als het ware continu op, maar terwille van de tekening doe ik het bij "rukjes" (fig. 8). De afdruklijnen "omhullen" een vlakke kromme C′ waarvan ze de raaklijnen zijn.

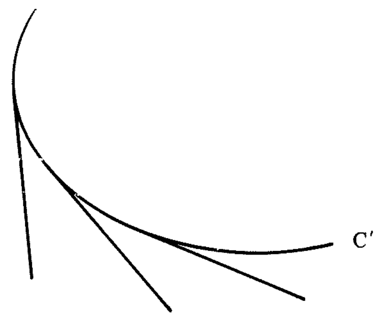

Fig. 8

Deze vlakke kromme C′ is zelve de afdruk van een ruimtelijke kromme C op de torsus T gelegen en de raaklijnen van C′ in het platte vlak V zijn de afdrukken van de rechte lijnen op de torsus T (fig. 9). Zoals de lijnen in V de raaklijnen van C′ zijn, evenzo zijn de lijnen op T de raaklijnen van C.

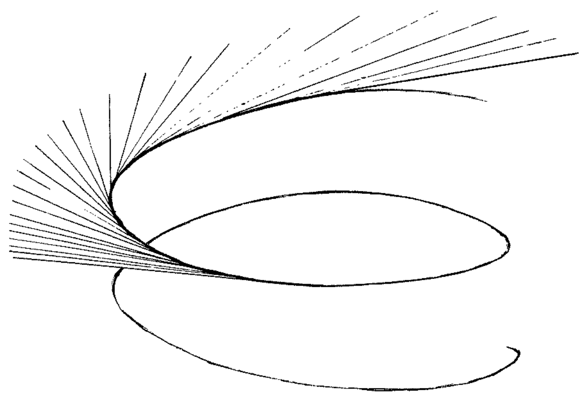

Fig. 9

Dus: de torsus T bestaat uit de opeenvolgende raaklijnen van de ruimtekromme C.
Om aan torsi (buiten cilinders en kegels om) te komen, zou je dus omgekeerd met een ruimtelijke kromme C kunnen beginnen – denk bijvoorveeld aan een schroeflijn – en in elk punt van C de raaklijn moeten trekken. Die raaklijnen bij elkaar vormen een oppervlak, het "raaklijnenoppervlak" van C. Is dat nu echt een torsus? Het antwoord luidt: ja. Maar het is niet vanzelfsprekend. Om dit "ja" de vereiste bewijzende kracht

bij te zetten, zou je moeten aantonen: Bij het raaklijnenoppervlak van C is langs elke van die raaklijnen het raakvlak standvastig – in feite is het zogenaamde osculatievlak van C in het variabel punt P, het vlak dat zich in P het dichtst koestert bij de kromme C.
Ik heb me er suf over zitten te peinzen hoe ik dit althans plausibel kan maken zonder het geduld van de lezer te misbruiken – een uitdaging voor wie het wèl lukt. Dus maar weer terug tot de kortste wegen. Hoe vind je die op de torsus? Je wentelt hem op een plat vlak af. Elke weg op de torsus drukt zich als een evenlange op het platte vlak af. De kortste drukken zich als lijnstukken af. Dus om de kortste lijnen op een torsus te vinden, hoef je alleen naar de lijnstukken in het platte vlak te kijken waar ze zich op moeten afdrukken. De rechte lijnen waar de torsus uit is samengesteld, zijn er een speciaal geval van.
Torsi zijn heel speciale kromme oppervlakken. Op het boloppervlak zijn er geen rechte lijnen te bekennen zoals je die in het platte vlak vindt, laat staan dat je het boloppervlak op het platte vlak zou kunnen afwentelen of anderszins zó afbeelden dat de afstanden behouden blijven. Geen van de projectiemethoden waarvan cartografen zich bedienen is lengtegetrouw.
Toch zijn er kortste wegen op het boloppervlak, de stukken van wat je noemt de grote cirkels, de cirkels waarvan het vlak door het bolmiddelpunt gaat. Van een punt naar zijn tegenvoeter zijn er zelfs oneindig veel kortste wegen, halve grote cirkels.
Laten we eens proberen zo'n boloppervlak B langs een kortste weg W over een plat vlak V te laten rollen, uiteraard weer zonder te laten slippen. B raakt nu V op elk ogenblik maar in een enkel punt en al die punten bij elkaar vormen een lijnstuk. De kortste weg W op B wordt afgerold als een kortste weg in V. Bij een boloppervlak is dat direct te zien. Maar kortste wegen zijn er op heel wat kromme oppervlakken. Laten we er een nemen dat wat netjes is, een convex oppervlak, met erop een kortste weg W, een strak gespannen touwtje. Laten we het kromme oppervlak over het platte vlak V zodanig rollen dat V achtereenvolgens in de punten van de (kortste) weg W door het krom oppervlak wordt geraakt.
Wat, denkt u, zal het spoor zijn van de gekromde maar kortste weg W op het krom oppervlak beschreven in het plat vlak V?
U hebt het geraden: weer een recht lijnstuk. Maar om dàt te bewijzen of ook maar plausibel te maken is meer vereist dan een verhaaltje waarin ik u elke formule heb bespaard.