Matrices van begin tot eind

J. de Lange Jzn
OW & OC, RU Utrecht

Summary

The Hewet-project is an experiment which includes a school experiment with "Mathematics-A" which – rather than "advanced" – means a new academic highschool program appropriate to be taught students who will not be confronted with much more mathematics in their university curriculum though they are expected to use mathmatics as an instrument.
For one of the subjects – matrices – the picture of what should be taught gets rather clear after two years of experiments. This article gives a rough sketch of the program as it materialized in the booklet "Matrices" which will appear in an English translation later this year.

Bij matrices denkt men in het huidige VWO-programma (wiskunde II) vooral aan lineaire afbeeldingen.
De (Hewet) werkgroep denkt bij dit onderwerp aan een geheel andere aanpak, waarbij de matrix wordt ingevoerd aan de hand van toepassingen zoals kostenmatrix en datamatrix. De matrix is hierbij niets meer dan een handige opslagplaats voor getalgegevens. De betekenis van de diverse matrix-operaties in verschillende contexten zal voldoende aandacht moeten krijgen en verder zal het verband van matrices met grafen en netwerken een rol kunnen spelen.

Tot zover het Hewet-rapport, dat nu inmiddels al weer zo'n drie jaar geleden het licht zag. Het begin van het onderwerp matrices waar zo'n 25% van de totale tijd van het A-programma aan besteed zou mogen worden.
Men kan nauwelijks spreken van een gedetailleerde omschrijving, al ging de omschrijving gepaard met een literatuurverwijzing. Veel docenten hadden dan ook geen idee wat ze zich bij dit onderwerp moesten voorstellen. Natuurlijk, men kende de matrix uit de wiskunde II, maar dat was nu juist zoals het in de wiskunde A niet moest.
Bij deze Nieuwe Wiskrant treft u het boekje "Matrices" aan. Dat is te beschouwen als een poging bovenstaande alinea uit het Hewet-rapport gestalte te geven. Een poging die al getoetst is door een jaargang leerlingen. Over de belevenissen in klasseverband met een eerdere versie van dit boekje heeft u al het één en ander kunnen lezen in eerdere afleveringen van dit blad (1). Daarbij werd niet gepoogd de grote lijn van het boekje aan te geven. Daarin komt nu verandering.

Ontstaan

Ruim voor het uitbrengen van het Hewet-rapport werd er al werk verricht naar welke onderwerpen waar zouden kunnen functioneren. Een leidraad daarbij waren de rapporten van de Commissie Molenaar (werkgroep wiskunde I – Sociale Wetenschappen), een commissie ingesteld door de Academische Raad. Daarin werd vrij nauwkeurig omschreven wat de sociale faculteiten voor "wensen" hadden wat betreft de wiskunde voor aankomende studenten. Maar – uiteraard – moet niet uitsluitend het vervolgonderwijs bepalen wat er op het VWO behandeld moet worden. Er is ook nog zoiets als een algemene wiskundige vorming die met name van belang is voor mensen voor wie het VWO het eindstation van hun opleiding is, of die in hun vervolgopleiding niet meer met wiskunde geconfronteerd worden.
Ongeveer vanaf het moment dat de Hewet-commissie werd ingesteld, is door haar adviseurs gezocht naar materiaal dat eventueel in aanmerking zou komen om het programma nader in te vullen. Dat wiskundeboeken daarbij nauwelijks een bron van inspiratie vormden, zal misschien niet veel verbazing wekken.
Nee, het zoeken was naar matrices in niet-wiskunde- of nauwelijks wiskundeboeken. En na geruime tijd van speuren kwamen er langzaam maar zeker enige – althans op het oog – zinnige toepassingen boven water. Jammergenoeg vielen enkele heel aardige direct weer af, omdat het wiskundig gezien van een te hoog niveau was. Maar het is niet uitgesloten dat enkele daarvan toch nog eens op zullen duiken. We denken daarbij aan Markow-ketens en Leontief input-

output matrices. In het huidige boekje zit al een Markow-keten zonder dat dit overigens expliciet wordt vermeld.
Toepassingen die wèl onmiddellijk te gebruiken leken, waren o.a.:

- afstandstabellen – een matrixvorm die we – bijna – allemaal kennen;
- voorraadmatrix – bekend uit de economie;
- verbindingsmatrix – uit de geografie;
- frequentiematrix – uit diverse toepassingsgebieden;
- directe-wegen-matrix – uit de geografie;
- relatie-matrix – sociale wetenschappen;
- kans-matrix – o.a. sociale wetenschappen, biologie;
- bevolkingsvoorspellingsmatrix – geografie, (demografie), biologie;
- Lesliematrix – idem.

Dat lijkt misschien een hele rij, en misschien is dat ook wel zo, maar daar staat tegenover dat de wiskundige aspecten van het geheel betrekkelijk mager zijn te noemen. De kneep zit hem in het zinnetje uit het Hewet-rapport:

– de betekenis van de diverse matrix-operaties in verschillende contexten zal voldoende aandacht moeten krijgen –.

Gepoogd is om dit aspect goed tot z'n recht te laten komen.
Wat zijn nu die "diverse matrix-operaties"?
Dat kan afgedaan worden met: scalaire vermenigvuldiging, optellen, vermenigvuldiging. Maar in werkelijkheid is er iets meer, zoals bij een nadere bestudering van het boekje blijkt. Wat er in ieder geval *niet* in staat is: de inverse van een matrix. Dit is in de Hewetcommissie wel degelijk onderwerp van discussie geweest, maar besloten is om dit – voorlopig? – niet in de onderwerpenlijst te zetten.
Ook eigenwaarden en eigenvectoren hebben het onderspit moeten delven. Alhoewel bij de computerverwerking van met name Lesliematrices duidelijk de eigenwaarden zich manifesteren. Maar ook hier weer impliciet.
Nadat een inventarisatie van de onderwerpen had plaatsgevonden kwam de volgende fase: het in lijn zetten van de diverse onderwerpen. Welke gebruik je als instap, welke om vermenigvuldiging uit te leggen, welke vereisen veel inzicht en moeten dus achteraan? Daarbij werd dan direct in het achterhoofd gehouden dat "het verband van matrices met grafen en netwerken" ook moest worden meegenomen. En het vermoeden rees dat dit direct al vanaf het begin zou moeten gebeuren, omdat veel leerlingen nu eenmaal erg visueel zijn ingesteld.
Deze overwegingen speelden mee bij het ontwerpen van een eerste concepttekst die in het voorjaar van 1981 vorm kreeg binnen de Vakgroep OW & OC. Na de gebruikelijke gezamenlijke brainstorming over de tekst, zag in augustus 1981 de eerste versie het licht. Toch altijd nog een heel weekend vóór het de klas inging.
Dit tijdsprobleem heeft gedurende het gehele eerste experimenteerjaar een rol gespeeld. Maar wat leerlingteksten betreft lijkt de zaak nu onder controle. De leerlingen hebben in ieder geval nog geen uur duimen zitten draaien, omdat er geen tekst was. Maar dit terzijde.
Deze eerste versie van 'Matrices' voldeed wel, maar uiteraard zijn er toch, naar aanleiding van de ervaringen opgedaan in de klas, wat veranderingen. Zowel naar vorm als inhoud.

De huidige tekst

Als we de eerste en tweede versie naast elkaar leggen vallen allereerst uiterlijkheden op: de eerste versie moest het doen met een ringbandje en pentekeningen, de tweede is, zoals dat zo mooi heet, ingehangen en rijkelijk voorzien van fraaie foto's. Misschien zijn er onder u die zo'n detail onbelangrijk voorkomt. Maar de onderwijspraktijk leert dat zo'n verschil voor leerlingen heel wezenlijk is. Het minste wat je wint is een extra motivatie. Niet dat we tijdens experimenten daarover te klagen hebben. Het is echter opvallend om te zien hoe gretig leerlingen naar zo'n boekje kijken. Men moet dit soort zaken niet onderschatten.
De eerste twee hoofdstukken zijn nogal "kaartachtig". Afstandstabellen, kaarten, grafen staan in deze aardrijkskundig getinte context centraal. Daarbij is zoveel mogelijk van authentieke kaarten uitgegaan. Er is slechts één fantasie-eiland bij. Dat is het eiland Hau, waarmee het boek begint. Een van de facetten van wat men het "instapprobleem" zou kunnen noemen is: waar moet op het eiland Hau de school geplaatst worden, zó dat de grootste afstand voor een leerling zo klein mogelijk is.
Dit probleem is als volgt op te lossen:
Van de kaart:

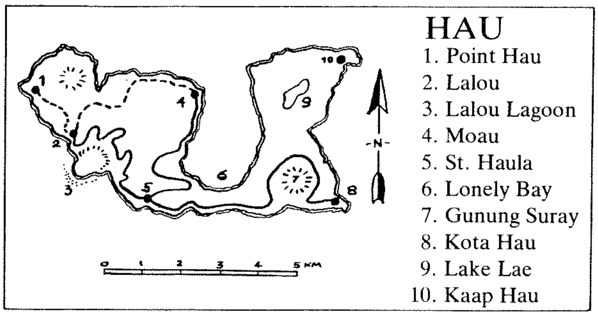
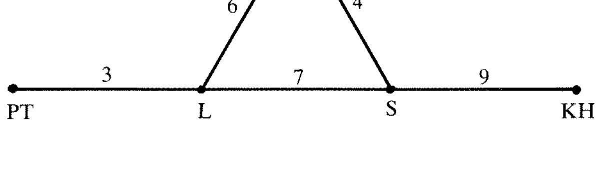
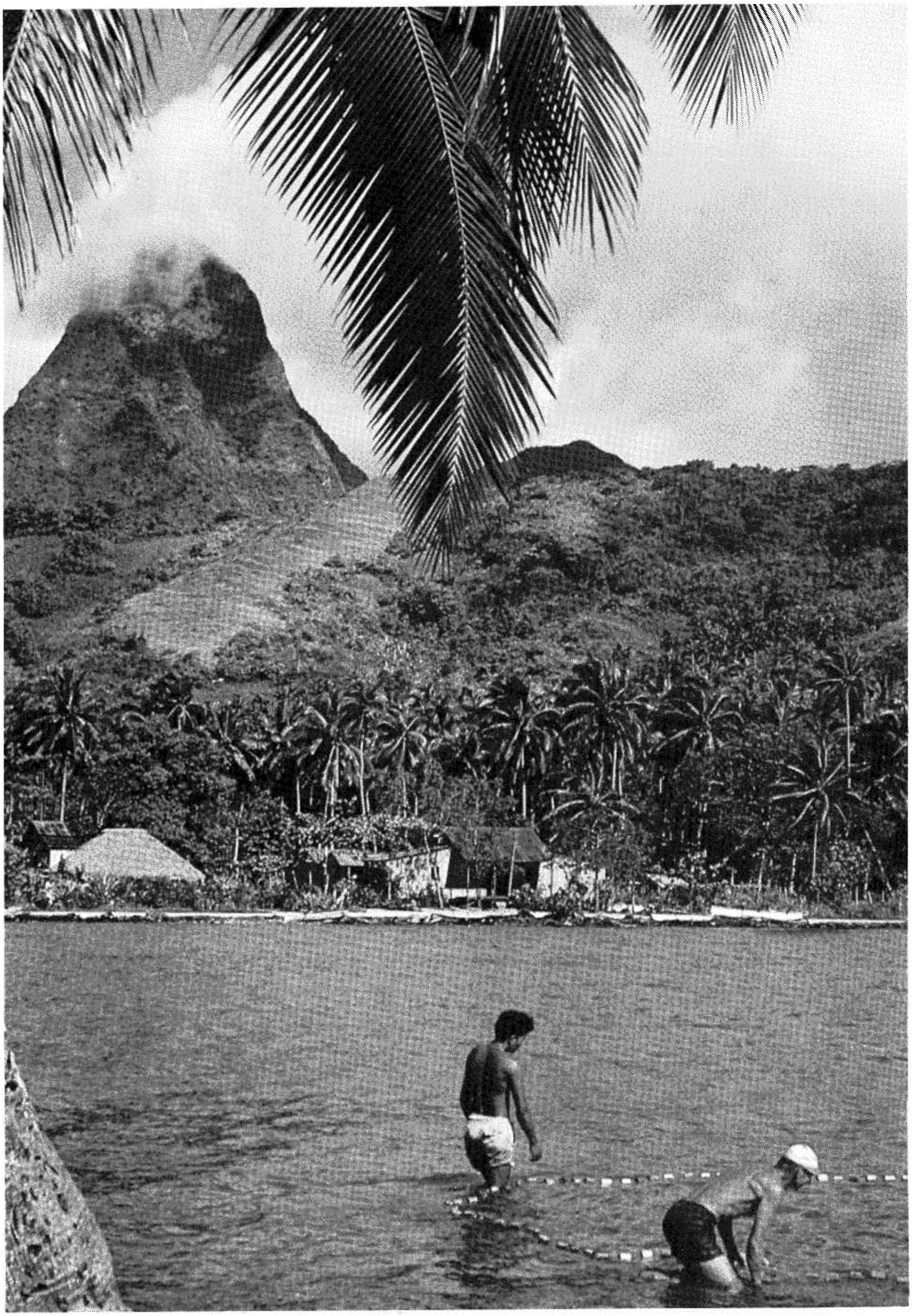


Fig. 1

naar de graaf:





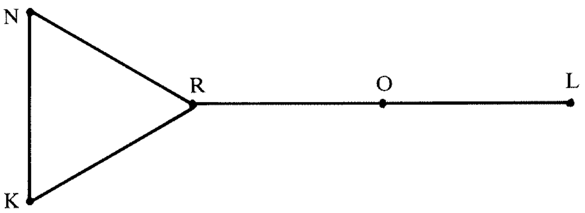
Bora-Bora is één van de vele eilanden die een rol spelen in "Matrices".

naar de afstandstabel:

	PT	L	S	KH	M	MAX
PT	0	3	10	19	9	19
L	3	0	7	16	6	16
S	10	7	0	9	4	10
KH	19	16	9	0	13	19
M	9	6	4	13	0	13

waarna de conclusie gerechtvaardigd lijkt om de school in St. Haula te plaatsen.
Dat dit een wel erg eenzijdig selectiecriterium is blijkt bij klassikale discussie al snel. Maar verderop in het boekje wordt nog eens op dit probleem teruggekomen, op een wat reëlere manier.

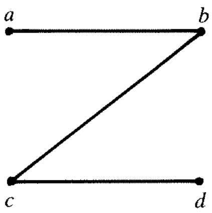
De rest van deze twee hoofdstukken heeft betrekking op de eilanden Malaïta, Tanna, Moen, Nauru, Moorea en Bora-Bora, terwijl ook de Sahara nog een rol speelt. Afgezien van afstandstabellen en frequentie-matrices (frequentie van LandRoverservice op de eilanden) en kostenmatrix (kosten taxi op de eilanden) vindt de introductie plaats van de verbindingsmatrix: daarin vind je alleen énen en nullen. Énen als twee plaatsen-direct-met-elkaar verbonden zijn, nullen elders.
Een voorbeeld:



heeft

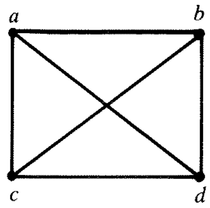
$$\begin{array}{cc} & \text{VAN} \\ & \begin{array}{ccccc} K & R & N & O & L \end{array} \\ \text{NAAR} \begin{array}{c} K \\ R \\ N \\ O \\ L \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

als verbindingsmatrix.
Deze verbindingsmatrices vormen een rijke bron van toepassingen. Zo kun je aan een verbindingsmatrix zien welke plaats het "meest centraal" ligt. (De meeste énen).
Of kun je aan een graaf zien of hij *minimaal*:



met $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

of *maximaal*:



met $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

verbonden is.
Aangezien er vele "graden van verbondenheid" tussen deze twee uitersten liggen, leidt dit tot:

$$\text{Graad van verbondenheid} = \frac{\text{aantal bestaande verbindingen}}{\text{maximaal aantal verbindingen}}$$

De wiskundige inhoud van de eerste twee hoofdstukken? Eigenlijk "alleen maar" de "definitie" van een matrix en de relatie tussen een matrix en z'n graaf.

Vermenigvuldiging

Zo langzamerhand wordt het zaak aan het vermenigvuldigen van matrices te gaan denken. De geografie-context wordt verlaten en in plaats van op de Zuidzee-eilanden, raken we nu verzeild in de wat minder prozaïsche economische toepassingen. En wel in spijkerbroeken en hardloopschoenen.
Martin Kindt heeft al eens beschreven hoe gedeelten van deze hoofdstukken verlopen (2).
Een spijkerbroekenzaak heeft van vijf merken vier maten in voorraad. Op een gegeven moment is dat:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \textit{Wrangler} & \textit{Levi's} & \textit{Club de France} & \textit{Bobos} & \textit{Ball} \end{array} \\ \begin{array}{c} 28'' \\ 30'' \\ 32'' \\ 34'' \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 6 & 3 \\ 11 & 5 & 7 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Nadat leerlingen deze matrix zelf hebben opgesteld wordt de volgende vraag gesteld:

De verkoper wil z'n voorraad op peil brengen, waarbij hij onder andere de volgende zaken in het achterhoofd heeft:
- *van de merken Wrangler en Levi Strauss verkoopt hij ongeveer tweemaal zoveel als van de andere drie merken;*
- *de maten 30" en 32" "gaan" tweemaal zo snel als 28" en 34";*
- *van één merk wil hij niet meer dan veertig exemplaren in huis hebben.*

> *57. Maak zelf een bestelling op grond van bovenstaande gegevens en schrijf deze in matrixvorm.*

Een schuchtere aanzet tot mathematiseren en een opgave waarop meer dan één antwoord mogelijk (b)lijkt.

Daarmee is gelijk iets aangesneden wat voor leraren nog wel eens een probleem kan zijn: niet op alle opgaven is een éénduidig antwoord mogelijk of nodig. Dat verschijnsel doet zich vooral voor bij het boekje "Grafische Verwerking" (3) maar ook bij andere, zoals "Matrices". Het laat zich op dit moment moeilijk inschatten hoe "ernstig" dit probleem is. Er zijn signalen die erop wijzen dat het snel went, maar andere leraren zouden zich wat meer op hun gemak voelen als ze van te voren weten bij wèlke vraag meerdere antwoorden mogelijk lijken. Dit zal dan in de – geplande – lerarenboekjes moeten gebeuren.
De optelling van matrices – die in dit hoofdstuk voor het eerst niet vierkant zijn – wordt binnen een context meestal als vanzelfsprekend beschouwd. Uiteraard staat er ook een formele definitie betreffende het optellen van matrices in het boekje. Met de opmerking: In het *algemeen* kun je matrices alleen optellen als zij dezelfde afmetingen hebben.
Om vervolgens deze zekerheid weer te relativeren:

Soms echter kun je best een ander soort "optelling" rechtvaardigen. Kijk maar eens naar het volgende voorbeeld.
Twee concurrerende sportzaken verkopen hardloopschoenen. De ene heeft de volgende schoenen in voorraad:

$$\begin{array}{l} \textit{maat} \\ \textit{Adidas Marathon} \\ \textit{Adidas TRX} \\ \textit{Nike Daybreak} \\ \textit{Nike Tailwind} \\ \textit{N. Balance 620} \\ \textit{N. Balance 430} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 38 & 40 & 42 & 44 & 46 & 48 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

De andere zaak heeft de volgende voorraad

$$\begin{array}{l} \\ \textit{N. Balance 620} \\ \textit{N. Balance 430} \\ \textit{Brooks Vantage} \\ \textit{Brooks Hugger GT} \\ \textit{Puma Marathon} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & & & & \textit{maat 50} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

> 59. *De zaken fuseren. Wat wordt de nieuwe voorraadmatrix?*

Dus in bepaalde gevallen is ook "optelling" van ongelijke *matrices wel mogelijk.*

Maar goed. De vermenigvuldiging, hoe zit het daarmee?
Gekozen is voor een getrapte introductie.
Eerst een matrix met een vector vermenigvuldigen (die vector heet gewoon een n x 1 matrix), daarna een matrix met een matrix.
Dat gebeurt niet geheel zonder redenen. Wat mij bijgebleven is uit de tijd dat ik zelf matrixvermenigvuldiging leerde, en geruime tijd later, dat ik het anderen probeerde uit te leggen, is een algeheel gevoel van verwarring. Was het nu rijen maal-kolommen of omgekeerd, en hoe zit het ook al weer met de afmetingen van de matrices? En waarom wordt er eigenlijk niet gewoon vermenigvuldiging van overeenkomstige elementen uitgevoerd? Dat doe je bij optelling toch ook? Dat laatste, en zeker niet meest onbelangrijke, probleem is redelijk te omzeilen door weer met een – passende – context te werken.
Nadat de leerlingen op intuïtieve wijze al enigszins op het spoor zijn gezet (blz. 24 van het boek), begint hoofdstuk 4 als volgt:

In het vorige hoofdstukje zagen we een zaak spijkerbroeken verkopen (in één week):

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Winst op Wrangler f 30,–; Levi f 35,–; Club de France f 40,–; Bobos f 25,–; Ball f 40,–.
De winst op de kleinste maat kun je als volgt vinden, waarbij we de winst per merk voorstellen als een 5 x 1 matrix:

$$\textit{winst } 28'' \ (1\ 3\ 0\ 1\ 2) \begin{pmatrix} 30 \\ 35 \\ 40 \\ 25 \\ 40 \end{pmatrix} = 1.30 + 3.35 + 0.40 + 1.25 + 2.40 = 240.$$

> 65. *Bepaal op dezelfde manier de winst 30"; winst 32" en winst 34".*
> 66. *De winst kun je in een 4 × 1 matrixvorm gieten:*

$$\begin{pmatrix} W\,28 \\ W\,30 \\ W\,32 \\ W\,34 \end{pmatrix}$$

Hiermee is de basis gelegd. Nadat een hoofdstuk lang een matrix met een "vector" wordt vermenigvuldigd – waarbij de interpretatie van het produkt erg belangrijk is – volgt dan in het volgende hoofdstuk de uitbreiding. In plaats van alleen met de "Winst-kolom" te vermenigvuldigen wordt successievelijk vermenigvuldigd met de winst-, inkoopprijs-, verkoopprijskolommen.
Een aanpak die het in de klas wel leek te doen. En ook buiten de klas, want een docent aan de T.H. Delft introduceert inmiddels op deze wijze matrixvermenigvuldiging bij de eerstejaars studenten.
Nu de vermenigvuldiging geïntroduceerd is, kunnen we terugkomen op ons instapprobleem:

We begonnen in hoofdstuk 1 met dit kaartje van HAU; we bepaalden toen de plaats van een school waarbij alleen rekening werd gehouden met het aantal kilometers dat een leerling maximaal zou moeten reizen. Dui-

delijk zal toen ook al geweest zijn dat het aantal leerlingen dat in ieder der plaatsen woont ook een grote rol zal spelen. Ofwel: het aantal leerlingkilometers *zal een grote rol spelen. (Zie hoofdstuk 4, opgave 75). Het aantal inwoners van de betrokken plaatsen is:*

Lalou	*1200*
Moau	*1000*
St. Haula	*700*
Kota Hau	*250*
Point Hau	*150*

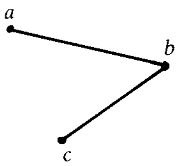
Van de drie grote plaatsen bezoekt 15% de school, van de kleinste twee 25%.

\> 99. *Bepaal m.b.v. de afstandsmatrix (hoofdstuk 1 opgave 3) en de 5 × 1 "leerlingmatrix" het aantal leerlingkilometers voor iedere plaats en bepaal de ideale plaats voor de school.*

\> 100. *Teken een staafgrafiek waaruit duidelijk blijkt waar de school moet komen als het aantal leerlingkilometers bepalend is en één als we alleen het aantal kilometers bekijken, zoals vroeger.*

Ook op de verbindingsmatrices kan nu zinvol worden teruggekomen. De vraag is namelijk wat het kwadraat, derde macht, enz. van een verbindingsmatrix betekent. Uitrekenen is niet zo'n kunst, maar wat betekenen die getallen nu eigenlijk?
De laatste vraag loopt als een rode draad door het hele boekje heen: je berekent steeds wat, al of niet met de computer, maar wàt heb je nu eigenlijk als resultaat? We zullen het tipje van de sluier die over de verbindingsmatrices ligt oplichten.
Stel:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array}$$



dan:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dit betekent: er is één manier om in twee stappen van a naar a te gaan (a → b → a).
Er zijn twee manieren om van b naar b te gaan:

1. b → a → b
2. b → c → b

Dus A^2 geeft het aantal "twee-staps"wegen aan.
Zo geeft A^3 het aantal driestapswegen aan.
Tellen we nu A en A^2 op, dan krijgen we:

$$T = A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dat wil zeggen dat iedere plaats met iedere andere plaats verbonden is in één of twee stappen.
Bij andere matrices kan het zijn dat we nog hogere machten van A bij de vorige moeten optellen om alle nullen te laten verdwijnen. De hoogste macht die nodig is heet de diameter van de graaf. We laten graag aan de lezer over hoe de diameter af te lezen is uit de graaf.
Zodra een matrix wat groter wordt, wordt het vermenigvuldigen een vermoeiende aangelegenheid. Maar een standaardprogramma op een computer(tje) verricht wonderen. En aangezien automatische gegevensverwerking ook onderdeel is van het A-programma, worden in het zevende hoofdstuk matrices en a.g.v. tot een – hopelijk harmonieus – geheel verweven. Het structuurschema om de matrix T en daarmee de diameter te vinden is:

INLEZEN MATRIX	
AFDRUKKEN MATRIX	
NUL ZOEKEN	
ZOLANG (GEVONDEN)	
	VOLGENDE MACHT BEREKENEN
	BIJ *T* OPTELLEN
	MATRICES AFDRUKKEN
	NUL ZOEKEN
(NIET GEVONDEN) STOP	

Er volgt na deze verbindingsmatrix-hoofdstukken een hoofdstukje met toepassingen uit de sociale wetenschappen, waar impliciet ook de markow-keten in voorkomt.
De laatste twee hoofdstukken behoeven weinig commentaar. Het betreft hier voornamelijk bevolkingsvoorspellingsmatrices (Leslie) en in de vorige Nieuwe Wiskrant ("Klapmutsen") kunt u daarvan een uitgebreid verslag vinden. Dit onderwerp vereist werkelijk veel inzicht en vormt – althans voorlopig – een mooie afsluiting.
Tussen twee haakjes, over interpretatie gesproken.
Als

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 & 0 \end{pmatrix}$$

een Lesliematrix is, wat is dan de betekenis van L^2?

Slot

"Matrices" is een eerste publicatie waaruit blijkt op welke wijze het Hewet-team het Hewet-rapport invult. Uiteraard met veel steun van leraren en leerlingen en de begeleidingscommissie. We hopen met dit artikel, en met het boekje, de groeiende belangstelling naar de inhoudelijke invulling van het project te beantwoorden.

De sfeer, het gebruik van contexten, het mathematiseren, de hier en daar nogal "open" aanpak, het gebruik van de computer, het zijn allemaal elementen die terug te vinden zullen zijn in andere Hewet-publicaties.
De ervaringen in de school met "Matrices" waren positief. Hopelijk ligt uw reactie ook in die lijn. Wilt u meer boekjes? We zullen in de Nieuwe Wiskrant regelmatig publiceren welke boekjes "het daglicht kunnen velen" en wat de daaraan verbonden kosten zijn.

(1) Lange, J. de, *Matrices en de Stille Zuidzee*, Nieuwe Wiskrant nr. 2, 1e jrg., OW & OC, Utrecht.
(2) Kindt, M., *Een sprookje wordt werkelijkheid*, Nieuwe Wiskrant nr. 3, 1e jrg., OW & OC, Utrecht.
(3) Lange, J. de, M. Kindt, *Grafische Verwerking*, OW & OC, Utrecht.
