Activiteiten met de band van Möbius

H. Zeitler

M.I. Universität Bayreuth

Summary

Geometry can be pursued in different ways, sometimes intuitively, artistically, constructively, and then locally, or globally deductive and axiomatic.
Intuitive geometry is especially good for work in school. In this article an experimental hour is sketched, that should be a pleasure for teacher and pupils alike.

Je kunt op meerdere manieren meetkunde bedrijven, soms intuïtief, artistiek, constructief maar ook lokaal of globaal deductief en axiomatisch. Vooral de intuitieve aanpak leent zich uitstekend voor activiteiten op school. In dit artikel zal ik een voorbeeld van deze soort van meetkunde bedrijven uitwerken.
Ik zal een beschrijving geven van een experimenteel stukje wiskunde-onderwijs en hoop daarmee een kleine bijdrage te geven aan de "Didaktiek van het Plezier". Ik zal geen nieuwe wiskunde introduceren, ook zal ik me niet bezighouden met het formuleren van zaken die het gezag hebben van malle "onderwijskundige doelen". De lessen die ik zal beschrijven moeten gewoon een genoegen zijn voor leraar èn leerling, ze moeten interesse opwekken in wiskundige problemen en moeten de deelnemers aanzetten om verder over het onderwerp te gaan nadenken. Zoiets bereik je niet door met behulp van axioma's te bewijzen dat een lijnstuk precies éèn midden heeft.
Een pientere Amerikaan heeft eens gezegd: "Wiskunde is geen kijkspel". Wiskunde moet je doen en dàn kun je het pakken en er zelfs verslingerd aan raken. Een mogelijke eerste stap in deze richting is het verschijnsel dat leerlingen gewapend met schaar, papier en lijm de klas binnenkomen.

Een beetje techniek

Het komt in de techniek regelmatig voor dat twee assen van een machine door een band of ketting met elkaar zijn gekoppeld, zie fig. 1.

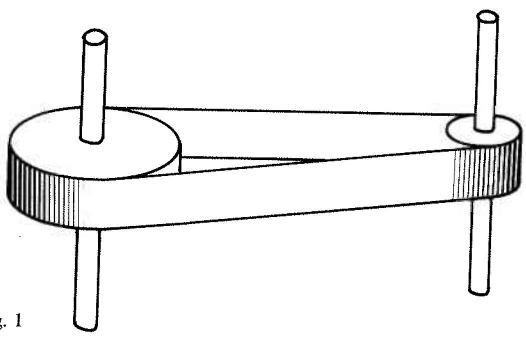

Fig. 1

De Amerikaanse firma Goodrich verwierf in 1923, 1949 en 1957 patenten voor een gedraaide band, zoals in fig. 2 is aangegeven. Waarom zou je een band zo draaien? Is deze eenvoudige draai-truc een patent waard?

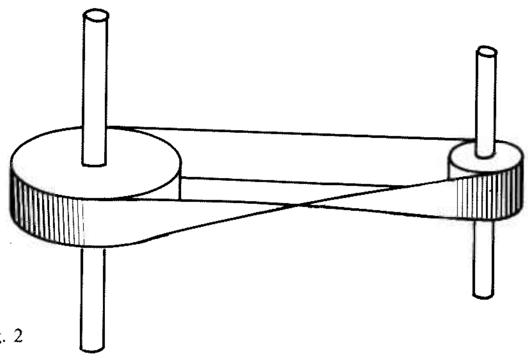

Fig. 2

De Cilinder, de Nul-draai

We zullen de eenvoudige ongedraaide band van figuur 1 een 'cilinder' of een 'nul-draai' noemen. Je kunt zoiets maken door een rechthoek uit te knippen en de twee zijden volgens de corresponderende nummers op elkaar te plakken. Zie fig. 3. Deze ring heeft twee randen. Ze heeft ook twee zijden, die de leerlingen rood of groen kunnen kleuren. Als een mier van de ene kant van de ring naar de andere wil kruipen, dan zal die daarbij altijd een rand moeten passeren.

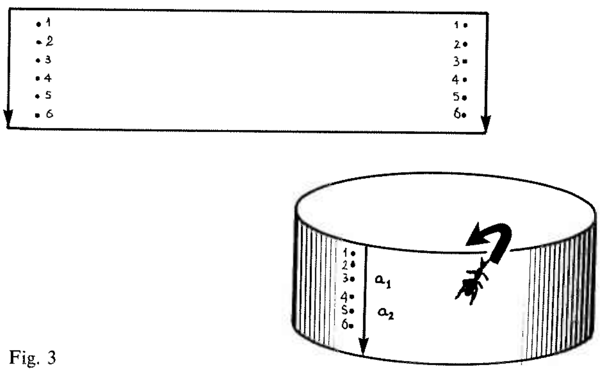

Fig. 3

De Möbius-band, de 1-draai

De gedraaide band van figuur 2 noemen we de Möbius-band of '1-draai'. Ze is genoemd naar de Duitse wiskundige August Ferdinand Möbius (1790-1868) die haar als eerste gedetailleerd bestudeerde. (Iedere wiskundige zou eigenlijk moeten weten dat de vader van A.F. Möbius dansleraar was en zijn oom de psychiater die beroemd werd door de ontdekking van een wiskunde-knobbel (abnormale botvorming en een overhangende huidplooi boven het linker-oog), maar nog beroemder door zijn boek "Over de Fysiologische Zwakzinnigheid van de Vrouw" (1900). Dat dit boek nog steeds in de belangstelling is wordt wel bewezen door de recente herdruk in facsimile van 1977!)

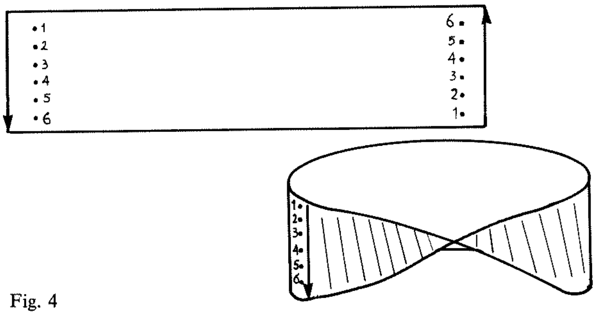

Fig. 4

We kunnen ons voorstellen dat de Möbius-band volgens fig. 4 in elkaar wordt gezet. Vóór je de kanten a_1 en a_2 aan elkaar lijmt, moet je een draai in de rechthoek maken. Hier ontdekten de leerlingen dat je op twee manieren kunt draaien: volgens een rechts- of een links-draaiende schroef. Dit leidde tot een niet al te lange discussie over het draaien van schroeven. Een leerling bracht een links-gewonden schelp mee. Ik had nog nooit zo'n schelp gezien. Zo kwamen we op de definitie van een plus- of min-draai. Het zoeken naar twee randen werd niet beloond. De 1-draai heeft maar één rand. Tenslotte begonnen we de

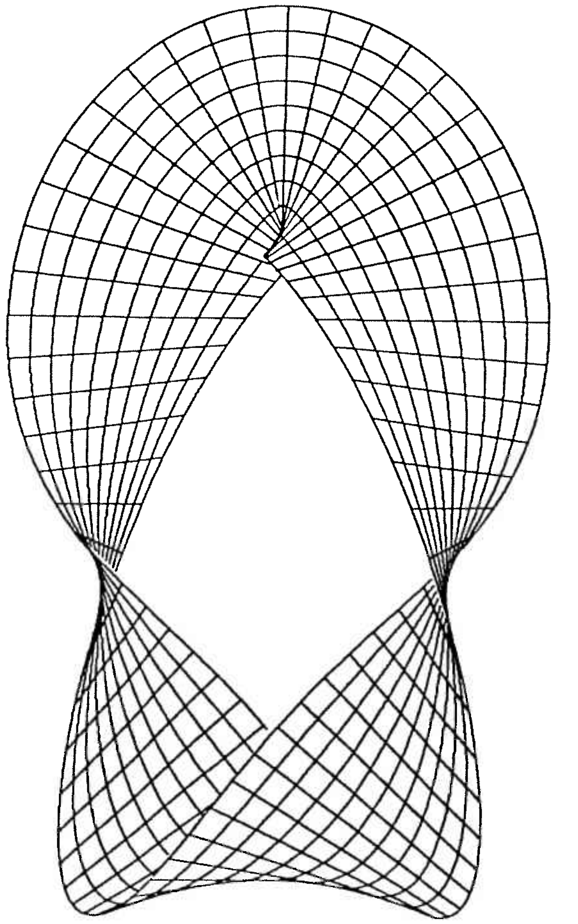

Fig. 6

ring aan de ene kant rood en aan de andere kant groen te kleuren. Verbazing alom. De leerlingen ervoeren dit als paradoxaal maar dat is het niet. De Möbius-band heeft maar één zijde. Een mier zou dus naar ieder gedeelte van de band kunnen kruipen zonder daarbij de rand te passeren. De tekening van Maurits Cornelis Escher (1898-1972) laat op niet mis te

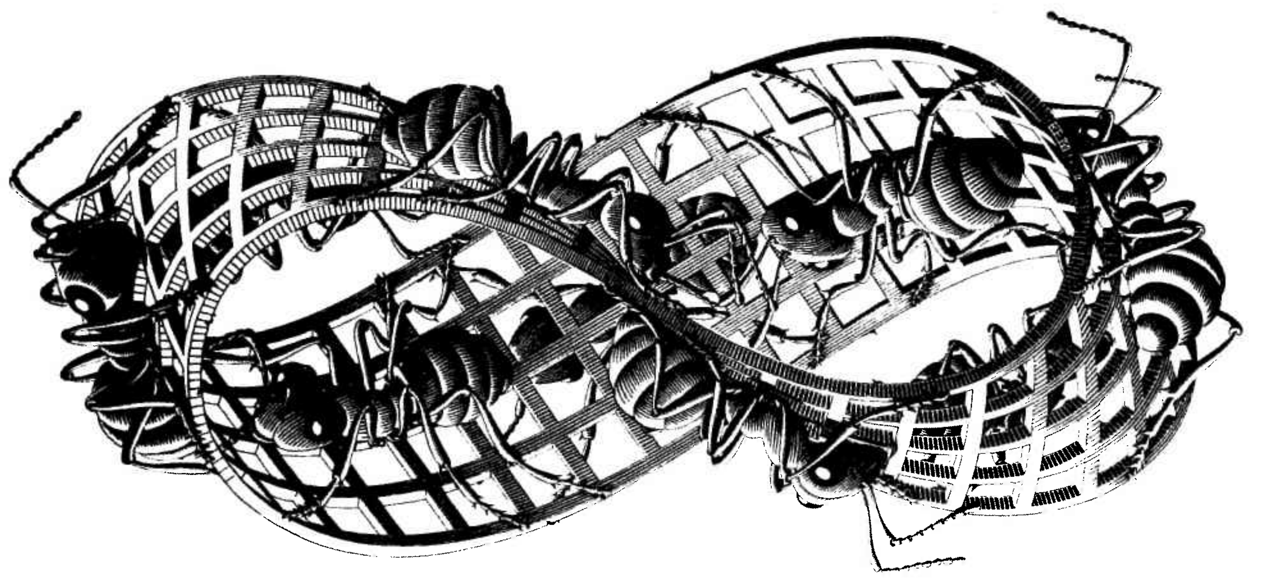

Fig. 5

verstane wijze de enkelzijdigheid van de Möbiusband zien. Dit maakte aan de klas duidelijk wat het idee achter het Goodrichpatent was: de band slijt gelijkmatig, omdat die maar één zijde heeft. Daardoor zal ze in veel praktische situaties, bv. transport van heet of grof materiaal, langer mee kunnen.

Daarna begonnen we ons tweedimensionale wezens voor te stellen die òp, of liever gezegd *in* de Möbiusband leven. Je kunt je dat het beste voorstellen als je de band doorzichtig denkt. Deze wezens moeten volledig tweedimensionaal zijn, zodat ze ook alleen maar tweedimensionaal kunnen denken. Een derde dimensie kunnen ze zich totaal niet voorstellen. Stel je nou eens voor dat zo'n wezen in het inwendige van de ring rondloopt langs de middenlijn; dan zal hij na het eerste rondje, bij het beginpunt aangekomen, gespiegeld zijn. Stel dat hij een horloge had meegenomen op zijn rondje, dan zou het bij terugkomst in tegengestelde richting lopen. Linksom zou veranderd zijn in rechtsom en een linker handschoen in een rechter. Wiskundigen noemen de 1-draai, in tegenstelling tot de 0-draai, 'niet-oriënteerbaar'. De discussie in de klas kreeg een wat wijder perspectief toen we van twee naar drie dimensies gingen. Is ons driedimensionale heelal soms ook op één of andere manier gedraaid? Dan zou je, alleen door te gaan reizen, een linkerhandschoen in een rechter kunnen veranderen. Wat zou er met ons allen gebeuren? We kunnen het ons gewoon niet voorstellen omdat we volledig driedimensionaal zijn. De Amerikaanse natuurkundige George Gamov (geboren in Odessa in 1904) achtte het niet beneden zijn waardigheid een verhaal te schrijven over het gedraaid zijn van de ruimte. Het heet: "Het Hart aan de Andere Kant", het is betoverend maar vooral erg rijk van geest. Het gaat over de liefde van een jong wiskundige, Situs, voor de dochter van een schoenmaker. De leerlingen hebben dit met veel plezier gelezen en er ook wat van geleerd. Ze ontwikkelden zelf hun eigen ideeën over oriëntatie, dimensie en het gedraaid zijn van de ruimte en raakten daardoor gemotiveerd tot een preciese verwoording van begrippen. Dit noem ik de "Didaktiek van het Plezier".

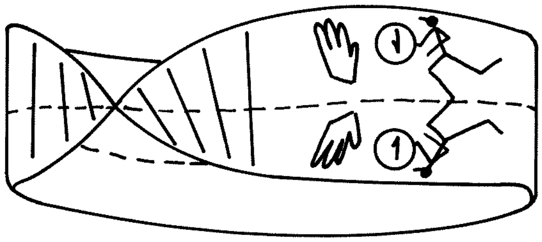

Fig. 7

De meervoudige draaien

Op dit punt aangekomen was de vraag onvermijdelijk wat er zou gebeuren als je vóór het plakken de rechthoek van fig. 3 niet één maar meer keren zou draaien. Het sprak voor de leerlingen volledig vanzelf, en het werd door vele voorbeelden bevestigd, dat $\pm$ (2n-2) draaien (waarin n een natuurlijk getal voorstelt) het karakter van een cilinder opleveren, dat wil zeggen: twee zijden, twee randen en oriënteerbaar; terwijl aan de andere kant alle $\pm$ (2n-1) draaien het Möbius-karakter hebben, dat wil zeggen: één zijde, één rand en niet-oriënteerbaar. Het teken van de draaien verschafte weer de informatie over de richting waarin gedraaid werd.

Toen kwam er een leerling met een interessant probleem. De vele papieren ringen die hij thuis had gemaakt waren platgevouwen toen hij die in zijn boek mee naar school had genomen. Ze waren gevouwen als figuur 8. Hoe zou je de draaien uit die plaatjes kunnen halen? Hoe groot is het aantal draaien in iedere situatie? Om deze vraag te beantwoorden kenden we aan iedere vouw een getal $+1$ of -1 toe en wel op de volgende manier: stel we verplaatsen ons over de ring in de richting van de wijzers van de klok en we doorlopen daarbij een vouw van beneden naar boven, dan geven we die vouw de waarde $+1$, gaan we van boven naar beneden, dan krijgt die vouw de waarde -1. Ga je in tegenovergestelde richting rond dan verwisselen de tekens. De som van deze getallen geeft het aantal draaien zoals aangegeven in figuur 8.

Er ontstonden wat problemen met vouwsels die zichzelf kruisen, zoals in figuur 7, maar die konden we oplossen door ze weer te 'ontkruisen' zoals te zien is in figuur 9.

De leerlingen hadden er zichtbaar plezier in om allerlei wetmatigheden binnen hun theorie te formuleren en die dan experimenteel te testen. Volgens mij is dat de eerste stap op het pad van de wiskunde.

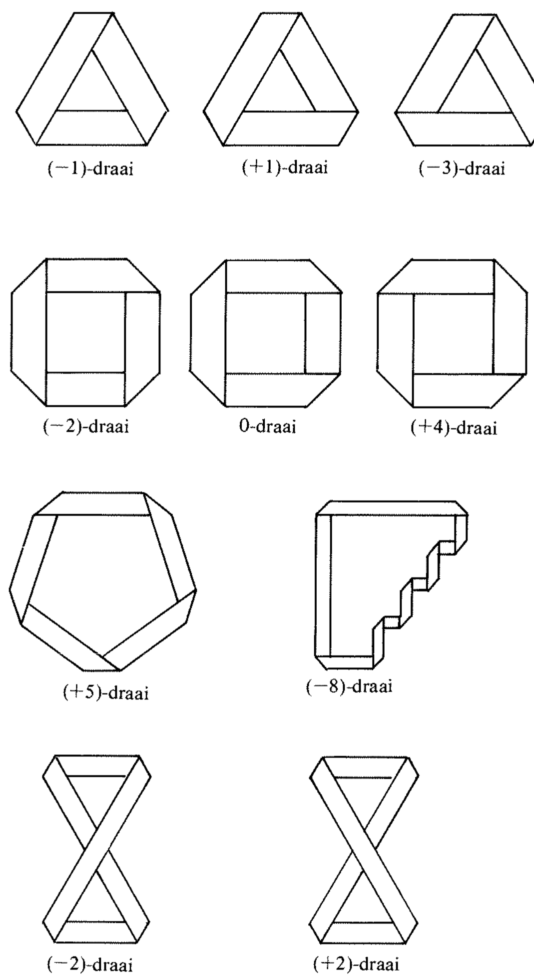

Fig. 8

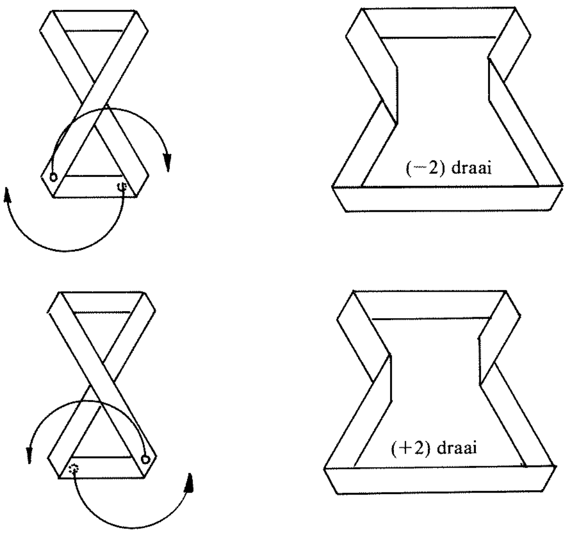

Fig. 9

Het doorknippen van de ringen

Het fascinerende gedoe van experimenteren en ontdekken was nog niet afgelopen. We gingen onze ringen evenwijdig aan de rand doorknippen. Wat zou er gebeuren? Hoeveel ringen zouden er ontstaan? Hoe lang en breed zouden die zijn in vergelijking met de ring waar we mee zijn begonnen? Kun je ook van te voren beredeneren wat er zal gaan gebeuren? Stel dat we beginnen met een ring van lengte *l* en breedte *a*.

Even-tallige draaien: ± (2n-2) draaien
We knippen de gegeven ring door op een afstand *d* van de rand van de rechthoek van figuur 3. Zo krijg je twee rechthoeken. Als we nu de stukken aan elkaar plakken volgens de oorspronkelijke opdracht, vinden we dat er twee ± (2n−2) draaien ontstaan met lengte *l*, één met breedte *d* en de ander met breedte *l-d*. Is $n \geqslant 2$, dan zijn deze ringen door elkaar heen geknoopt. (Wie gaat die draaien en knopen nog eens wat preciezer onderzoeken?)

Oneven draaien ± (2n-1) draaien
Deze situatie bleek veel ingewikkelder te zijn. Nadenken hielp niet in het begin. Daarom gingen de leerlingen het uitproberen. Ze waren enorm verrast toen al hun aanvankelijke voorspellingen fout bleken te zijn. Allereerst werd er ontdekt dat er twee totaal verschillende situaties konden optreden, ze zochten naar een verklaring en probeerden wetmatigheden te ontdekken om verder te kunnen experimenteren. Hier volgen de resultaten.

De midden-knip
Je maakt een 'midden-knip' als je de rechthoek van fig. 4 doorknipt op een afstand ½a van de rand. Vervolgens draai je elk van de zo ontstane rechthoeken 2n-1 keer en plak je zoals is aangegeven in fig. 10. Door de tweede stap krijg je 2 (2n-1) draaien en door de laatste stap komen er nog twee bij. In totaal krijg je dus 4n draaien met lengte *2.l* en breedte *½a*. In de figuur hebben we n=1 gekozen. In het geval van −(2n-1) draaien, draaien we in negatieve richting, moet je één van de andere vormen kruisende vouwen kiezen, zoals te zien is in fig. 8 en 9. Zo krijg je dan een (−4n) draai met lengte *2l* en breedte *½a*.

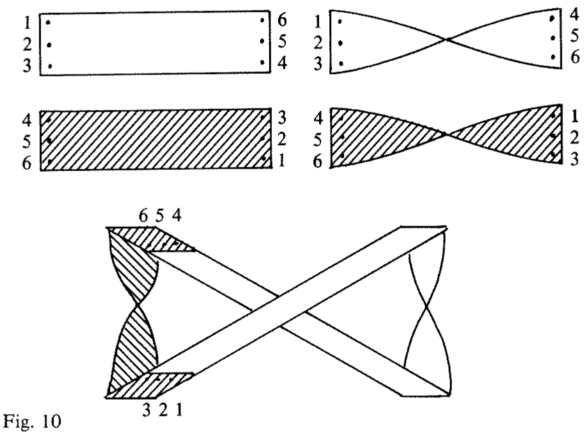

Fig. 10

De rand-knip
Nu knippen we de ring op een afstand d≠½a van de rand door. Fig. 11 laat zien hoe dit eruit ziet voor de rechthoek van figuur 4. Alles kon nu weer door beredeneren worden opgelost. Het gearceerde gedeelte in fig. 11 is het resultaat van het plakken van een (2n-1) draai na een positieve draai; het heeft lengte *l* en breedte *a-2d*. Net zoals in de afleiding van de midden-knip heeft het restant een 4n-draai met lengte *2l* en breedte *d*. Bij negatieve draaien, draaien alle tekens gewoon om.

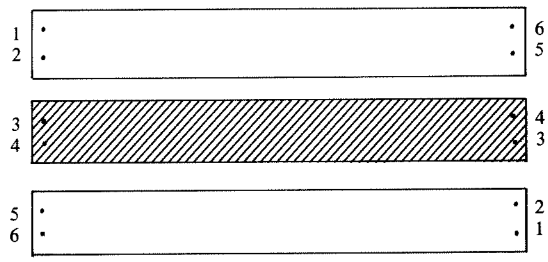

Fig. 11

Na deze knip-les was de klas bezaaid met stroken papier. Bijna alle leerlingen voelden zichzelf kleine onderzoekers of ontdekkers. Dat waren ze ook echt geweest. Aan het slot van deze bijeenkomst keken we nog naar een andere tekening van M.C. Escher (fig. 12). In de taal die de leerlingen nu ontwikkeld hadden was hier een (−3) draai met een midden-knip getekend het resultaat is dus een (−8) draai.

Nog wat problemen

Er zijn nog veel meer vragen te stellen over Möbiusbanden. Ik zal er een paar geven. Kijk eens naar fig. 13. Je ziet daar een riem met een dubbele sluiting. Iedere sluiting is één keer in positieve richting gedraaid. Hoeveel randen zijn er nu? Heeft de nieuwe ring één of twee zijden? Wat gebeurt er als we langs de gestippelde lijn gaan knippen of langs andere lijnen? Hoe zouden deze resultaten afhangen van het aantal

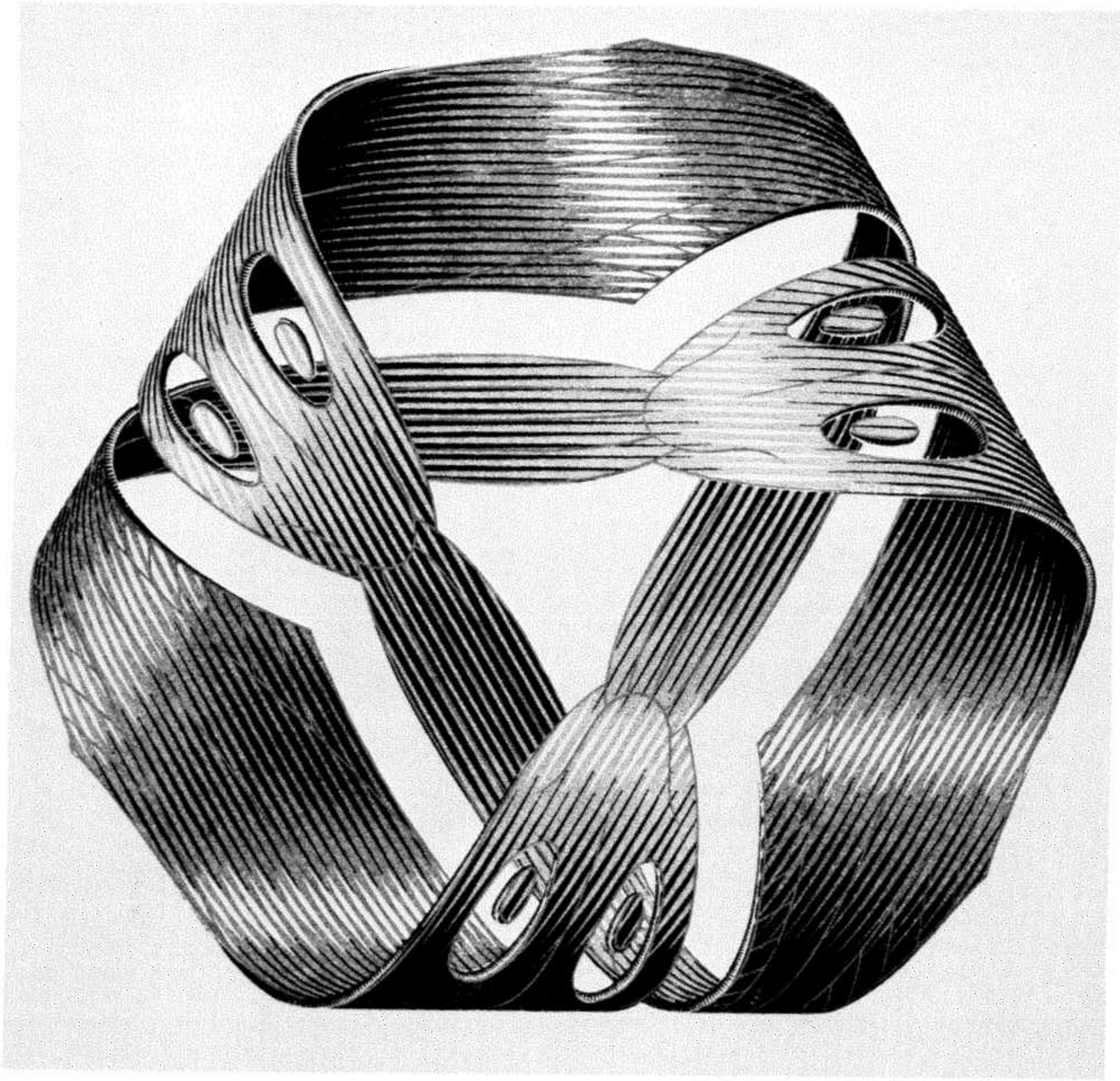

Fig. 12

draaien? Wat zou er aan het probleem veranderen als we sluitingen gingen toevoegen?

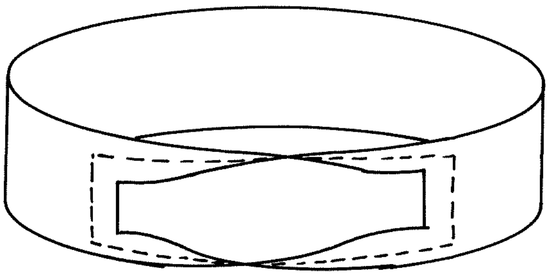

Fig. 13

Kun je een Möbiusband met gegeven breedte zó kort mogelijk maken?

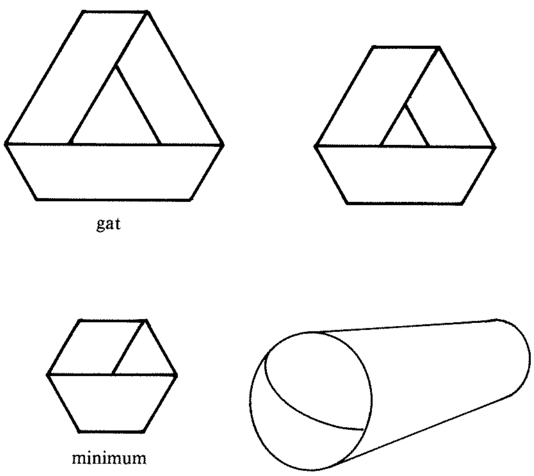

Fig. 14

In 1935 maakte Max Bill (een beeldhouwer die in Zwitserland woont) een beeld geheten: "Strook zonder Einde". Het is een Möbius-band waarvan de

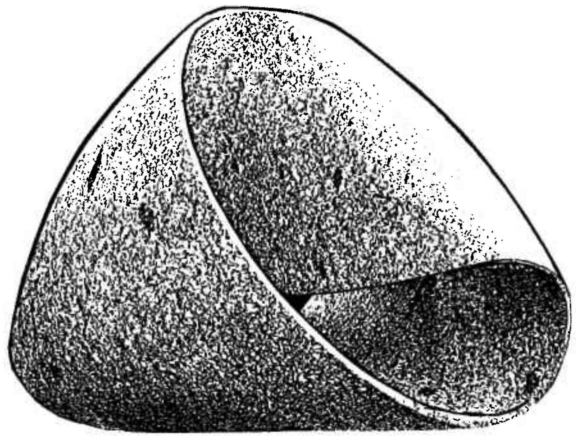

Fig. 15

lengte kleiner is dan onze kortste lengte. Bill kende de Möbius-band niet. Hij wou een symbool van oneindig maken en was geschokt door het feit dat hij niet de eerste was die dit object ontdekte.
Is het mogelijk om met een rand-knip twee gelijke ringen te krijgen?

Kun je elk van onze Möbius-banden zó platvouwen dat er een regelmatige veelhoek ontstaat?
Wat kun je over een dubbele Möbiusband zeggen? Je legt twee rechthoeken op elkaar, draait die en plakt ze.
Je ziet, vragen genoeg.

Tenslotte

Na deze lessen was de toestand waarin het lokaal verkeerde een soort controle van de 'leerdoelen'. Maar boven alles stond toch wel het plezier dat de lessen hadden opgeleverd.
Voor dit soort lessen heb je veel tijd nodig. Daarom zou ik een klemmende vraag willen stellen: geef ons meer ruimte bij het wiskunde-onderwijs en bevrijd ons van tè strakke dwingende roosters!

Literatuur

Burger, D., *Sylvestergespräche eines Sechsecks*, Köln.
Emmer, M., *Visual art and mathematics:* The Moebius Band, Leonardo 13 (1980), 108-111.
Gamow, G., *Das Herz auf der anderen Seite*, Phys. Blätter 17 (1961), 176-182.
Griffiths, H.B., *Oberflächen*, Stuttgart (1976).
Picture from M.C. Escher, *Graphik und Zeichnungen*, München 1975.
Picture from E. Hüttinger, *Max Bill*, Zürich 1977.