De man van 1 miljard

ofwel grote getallen op een te kleine rekenmachine

F.J. van den Brink
OW & OC, R.U. Utrecht

Summary

Handheld calculators and qualitative research in teaching. The research reported in the present and previous issues (see: 'Nieuwe Wiskrant' 1981, 1982) deals with the use of handheld calculators by kindergarten and elementary school children. The aim of the research is: recommendations for instructions with calculators based on the use of handheld calculators by children.
In the present issue ('The man of 1 milliard') one will find great numbers which leads to discussion.
The problem 'How many years is a man of 1 milliard seconds' shows the children the restrictions of the calculator to work with great numbers.
The first problem also demonstrates us that children in spite of that limitation are able to solve derivated problems with great numbers.

In het rekencentrum van klas 2 (eind juni) worstelen Paul en Jeroen met het probleem hoeveel jaar een man van 1 miljard seconden is. Ze proberen met de rekenmachine het vraagstuk op te lossen en ontdekken daarbij o.a. dat de rekenmachine wel veel, maar niet alles kan met zulke grote getallen.
Ze ondernemen drie pogingen om het probleem in hun macht te krijgen. Via hen *bekende relaties* zoals '1 minuut is 60 seconden' en '1 dag is 24 uur' proberen ze meer greep te krijgen. Maar ondanks het feit dat de jongens daarbij vaardig met de rekenmachine omspringen, lukt hen dit niet.
Leemten in hun kennis t.a.v. bovenbedoelde relaties doen deze eerste poging stranden.
Dan trachten ze het probleem *verhoudingsgewijs* op te lossen door 31 jaar dat overeenkomt met de 1 miljard seconden, te vergelijken met hun eigen leeftijd: 8 jaar. Deze poging lijdt schipbreuk, omdat ze niet verhoudingsgewijs, maar *additief* het probleem op de rekenmachine trachten op te lossen. Ze hebben zelfs nog niet de ⊠ -toets ontdekt binnen deze context.
Een derde poging wordt ondernomen door eerst één miljard op de rekenmachine te zetten. Maar nu blijkt dat zo'n groot getal niet eens op het venster van de rekenmachine past! Kortom: alom kommer en ellende.
Hoe nu verder?
Ondertussen heb ik geleidelijk aan de moeilijkheden voor ze gereduceerd. Eerst vroeg ik nog te controleren dat 1 miljard seconden overeenkomt met 31 jaar en 8 maanden. Daarna veranderde ik het probleem in: Hoeveel seconden ben jij (8 jaar) eigenlijk? En toen dat niet lukte, stelde ik voor om het aantal seconden te berekenen dat een baby van 1 jaar is. Tevens gaf ik uiteindelijk de serie relaties (1 jaar is 365 dagen, 1 dag is 24 uur, enz.) omdat die kennis uiteindelijk niet zelf gevonden kan worden, maar eenvoudigweg ooit eens aangegeven is.
Uit het verhaal is te leren dat worstelen met grote getallen, waartoe de rekenmachine aanleiding geeft, tot allerlei ontdekkingen leidt:

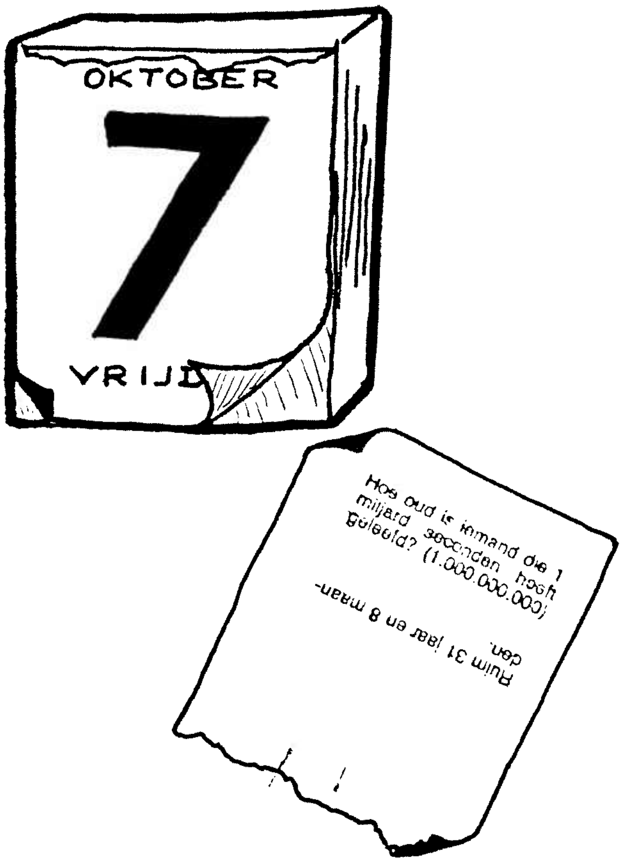
- Op de rekenmachine blijkt dat je, als leerling, het vermenigvuldigen niet uitsluitend als herhaalde optellingen hoeft te beschouwen, maar dat er op de machine andere faciliteiten (de ⊠ -toets) bestaan.
- Dat binnen een context 365 × 24 niet hetzelfde is als 24 × 365 wordt direct ingezien. Maar dat de opgaven dezelfde grote uitkomst opleveren is toch een verrassing voor de kinderen.
- Grote getallen kunnen zo groot worden, dat ze niet meer op het venster passen. Van het feit, dat de rekenmachine dan nog wel de mantisse aangeeft, wordt dankbaar gebruik gemaakt.
- Helaas blijkt dat het verhoudingsgewijze denken over een probleem steeds gestoord wordt door het additieve denken en dat schattingen over grote getallen eveneens door optellingen worden bepaald.
- Kennis van relaties zoals '1 dag is 24 uur' is nog moeilijk te hanteren binnen het probleem.
- Opvallend is dat de kinderen letterlijk van alle

kanten het probleem aanpakken om er vat op te krijgen. Ze beginnen bij het begin, maar ook aan het einde en overwegen allerlei tussenstappen.

We laten nu via gedeelten van het protocol het gesprek volgen en we voorzien dat van commentaar.

Kalenderblaadje

Op kalenderblaadjes staat soms, naast de betreffende datum, een wijze raad, een aardige hint, een moeilijk probleem.
Op de achterkant van mijn kalenderblaadje stond dit vraagstuk, met – gelukkig – ook het antwoord erbij:



'Ik weet het!'

Paul (L) en Jeroen

Ik lees de tekst voor aan Paul (die zelf 8 jaar is en 4 maanden) en aan Jeroen (8;1).
'Een hele moeilijke vraag', verontschuldig ik me nog. Maar Paul zegt: 'Maar ik weet het!'
'Jij weet het?', vraag ik ongelovig. 'Hoe weet je het dan?'
'Ruim 31 jaar en 8 ... maanden'.
Het klopt. Hij heeft het antwoord al op het blaadje gelezen.

8 jaar

'Hoeveel jaar ben jij eigenlijk, Paul', vraag ik – we moeten toch érgens beginnen met het probleem.
'8 jaar'. En Jeroen ook.
Hoeveel seconden zou dat zijn?
'Moet je uitrekenen op een rekenmachientje', stelt Paul voor.

We proberen het. Maar dat is lang niet eenvoudig.

Drie pogingen

Waar begin je dat probleem? (Eerste poging)

'Elke week is ... Nee, elke dag ... Nee, een dag is ...', steeds hapert Paul maar stelt tenslotte vast dat '60 seconden één minuut is'. Hij mijmert verder: 'En dan moeten we een paar keer 24 uur doen. Eens kijken'. En na eerst al deze 'weetjes' te hebben afgetast, pakt hij de rekenmachine en drukt toetsen in.
Ook Jeroen is bezig. Hij maakt een rij van 25-vouden i.p.v. 24-vouden: ... 200, 225, 250, ...
'Wat gaan jullie precies doen?'
Jeroen wijst me op wat hij doet: hij leest de getallen voor: 225, 350, ...
En Paul antwoordt: 'Het is heel wat seconden of zoiets'. En hij maakt een eerste schatting: '1000, zeg maar'.

Het idee om 24-vouden te vinden is wel uitvoerbaar, maar het 'waarom' ontbreekt hen.
Ze worden wat moedeloos.
Maar dan heeft Paul een nieuw idee.

Verhoudingsgewijs? (Tweede poging)

Hij pakt het kalenderblaadje, wijst in het antwoord op 31 jaar en zegt: 'En dan rekenen we dat hier 8 wordt gezet'.
Prachtig, denk ik, ze gaan verhoudingsgewijs de som oplossen: 31 jaar 'is' 1.000.000.000 seconden, dus 8 jaar 'is' ...
Maar Paul vraagt aan Jeroen: '31 jaar. Hoeveel moet er dan af?'
'Een stuk of tien, elf', zegt Jeroen.
En nu wordt me duidelijk dat de jongens het probleem 'additief' (erbij, eraf) benaderen en niet verhoudingsgewijs.

Stipsom

31 — • = 8. Deze som willen ze dus eerst oplossen. Maar dat is evenmin direct uitvoerbaar op een rekenmachine.
Paul: 'Dan doen we eerst de 1 eraf....'
Jeroen: 'Nee, eerst 10 eraf'.
Paul weer: 'Twee tienen, twee tienen eraf. Twintig'.
Jeroen die een 'truc' met de $\boxed{=}$ -toets voor ogen staat om '31 — 10 = = =' te doen, laat zich overhalen. 31 — 20 = 11 vinden ze.
Uit het hoofd rekenen ze dan uit dat er nog 3 afmoeten om 8 te krijgen. Dus 31 — 23 = 8. '23 jaar eraf', stelt Paul vast.

Uren, maanden, dagen, jaren

Jeroen: 'Nou moeten er een heleboel minuten af'.
Maar Paul corrigeert: 'Nee, we gaan ervan 24 uren maken. Hoeveel is ook alweer een jaar?'
Jeroen: 'Een jaar? 12 maanden. En 135 dagen, geloof ik.'
Hier loopt het gesprek weer vast. Paul wil duidelijk van jaar naar dagen en dan verder naar uren, enz. Maar ze denken anderzijds steeds 'additief'. De poging om verhoudingsgewijs van 31 jaar naar 8 jaar te gaan, lukte niet.

Een derde poging

Paul pakt weer het kalenderblaadje om een nieuwe derde poging te onderzoeken. Hij blijft actief! Jeroen leest het getal 1.000.000.000 en zegt:

'Dat ga ik maar eerst even opschrijven' en hij dicteert Paul het getal. Deze zet het op de rekenmachine.
Jeroen: 'Eén; punt; drie nulletjes: 1, 2, 3; dat is al duizend. Nog een punt en weer drie nulletjes...'
'Het gaat er denk ik niet op', voorspelt Paul al.
Hij heeft gelijk. Tenslotte staat er op het venster: 1.0000000, al knipperend.
Jeroen kijkt er naar en zegt verbaasd:

'Er zit maar één punt op! Er moeten meer puntjes op. En hij knippert als een knipperlicht. Kijk maar'.
'Dit getal komt er niet op', zegt Paul en vervolgt op verontschuldigende toon tegen mij: 'Jammer, hebben we het toch fout gedaan'.

Een baby van 1

Ik doe nog een stap terug en vraag niet naar het aantal seconden dat ze zelf als achtjarigen zijn, maar naar het aantal seconden dat een baby van 1 jaar is. Ze gaan weer op zoek naar verbanden.
Jeroen: 'Eén jaar .... Eén uur is 60 minuten'.
Paul: 'Een uur ... hoeveel seconden is dat wel? Eén jaar is, ik denk, laten we maar eens gokken: 1000 seconden'.
Jeroen: 'Of 2000. Tussen de 1000 en 2000 seconden'.
De jongens 'spelen' met het woord duizend als 'heel groot getal'. Ik geef weer een hint: 'Eén jaar, hoeveel dagen is dat?'
Jeroen: 'Ik dacht 135 of zo'.
Paul: 'Eén maand is ...' maar dan val ik hem helaas in de rede: 'Eén jaar is 365 dagen, dat moet je eenvoudig even weten'.
Achteraf beschouwd ben ik ervan overtuigd, dat Paul zelf wel op die 365 dagen zou zijn gekomen via het aantal maanden. Want na mijn opmerking gaat hij direct verder met: 'Dan moeten we steeds 24 uur nemen.... en zoveel keer (hij bedoelt 365 keer) 24 gaan we dus maken. Maar daar moeten we een blad papier voor hebben'.
En Paul begint een rij van '24' op het papier te schrijven. 365 keer '24' op papier!
'Dat is toch handig', zegt hij en maakt alvast een rij van 19.

Jeroen: 'Nee, je kunt het op de rekenmachine doen'. En Paul begint de rij toetsen: 24 + 24 = + 24 = + 24 = + 24 = in te drukken. Jeroen weet nog een ander algoritme (+ 24 = = = = =) die hij eens heeft uitgevoerd (1). Paul handhaaft echter zijn eigen manier.

Vermenigvuldigen als herhaald optellen?

Het wordt mij nu toch te gortig: 365 × 24 als herhaalde optelling. En ik vraag: 'Maar kan het niet wat vlugger?'
Paul komt me tegemoet met een voorstel:

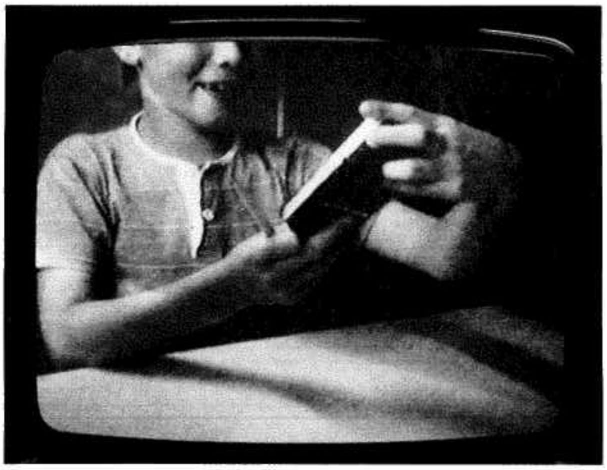
> 'Dan beginnen we allebei, Jeroen en ik, tegelijk. En doen we wie het eerste klaar is. We houden dan een soort wedstrijdje'.

Intussen drukt hij 22 in plaats van 24 in en moet helemaal opnieuw beginnen. Jeroen helpt hem het aantal keren 24 bij te houden door steeds een '24' door te strepen. Ze bereiken 120 (= 5 × 24) en Jeroen telt 5 strepen af. 'Nog een keer', de zesde streep wordt gezet. Ze gaan maar gewoon ongestoord door.

1 jaar = 365 dagen

~~24 24 24 24 24 24 24~~
24 24 24 24 24 24
24 24

Ik zeg dan: 'Je hebt 365 dagen. En elke dag is 24 uur'. Zomaar een terloopse opmerking.
Jeroen: 'Hé, wacht eens even. 24 kéér dat ...' (Hij wijst op de ☒ -toets en op 365). Jeroen heeft de ☒ -toets ontdekt voor dit probleem en drukt nu in: 24 × 365 = en vindt 8760.



Paul: 'We hebben het!' Ze zijn opgelucht. Ik ook.

Toch nog fout

'Wat betekent dat nu?, vraag ik.
Paul: 'Da's zoveel dagen. Hij kijkt peinzend naar het getal 365 en zegt dan:

'Dat hebben we verkeerd gedaan: we moeten zoveel keer één dag doen'.
Hij bedoelt dat ze 365 × 24 hadden moeten uitrekenen en niet: 24 × 365, zoals Jeroen deed. 365 keer één dag. Paul maakt snel de som 365 × 24 = op de rekenmachine. Glimlachend, zegt hij:
'We hebben het al, het is hetzelfde als wat daar staat'. (365 × 24 = 8760, 24 × 365 = 8760).
Binnen de context is de commutativiteit blijkbaar niet zo vanzelfsprekend als in het rekenen wel wordt aangenomen.

Van 8760 uren naar minuten

Jeroen: 'En nu 60'.
Paul: 'We moeten gewoon naar seconden toe'.
Maar zo 'gewoon' gaat dat hem niet af. Hij wil eerst weer 365 × 60 als herhaalde optelling uitvoeren (het optellen zit hem in het bloed), maar hij corrigeert zich nu zelf en maakt 365 ☒ 60 = 21900 op de machine.

De jongens lachen om het grote getal maar weten niet

of dit het gezochte aantal seconden is. Ze laten hun vorige berekening 365 × 24 = 8760 geheel los!
'Is dit het aantal seconden?', vraag ik en wijs 365 aan.
Paul: 'Nee. Het moet meer zijn: 400 of zo .... Want dit (24) is één dag. Maar we moeten naar seconden.'
Het is verrassend hoe weinig gevoel voor orde van grootte er bestaat bij het schattend vergelijken: 365 dagen en het aantal seconden moet meer zijn, dus: '400 seconden of zo'.

Hulp

Ik schrijf nu op een blaadje de relaties op:

1 dag = 24 uur
1 uur = 60 min
1 min = 60 sec

en ik zeg nog eens het probleem: 'Een kind van 1 jaar is 365 dagen. Maar hoeveel uren is hij dan?'
Paul voert het opnieuw op de rekenmachine uit: '365 keer 24 is'. Jeroen leest het antwoord (8760) voor: 'Acht duizend, zeven honderd, zestig'.
Ik beklemtoon: 'Zoveel *uur* is een kind van 1 jaar'.

Paul denkt peinzend na met zijn handen onder de kin gevouwen en zegt: 'Dan moet je zoveel keer 60 doen'.
Hij bedoelt 8760 × 60 en vindt als uitkomst: 525600 op de machine.
Jeroen: 'Hm. Dat kan ik niet lezen'.

Opmerking

365 × 24 × 60
8760 uur
525600 min.

Ik: 'Dat zijn zoveel minuten'.
Jeroen: 'Keer 60'.
Paul: 'Ja. Nu moeten we zoveel minuten keer 60 doen'.
En ze vinden 525600 × 60 = 31536000 seconden voor een kind van 1 jaar.

Paul en Jeroen zijn 8 jaar

Paul: 'Ja, maar nu moeten we van 8 jaar vinden'.
Hij keert naar het 2e probleem (hun eigen leeftijd in seconden) terug en zegt direct hoe dat zou moeten: 'Dan moeten we dàt acht keer doen'.
Jeroen herhaalt dat: 'Acht keer'. (8 × 31536000).
Maar Paul bedenkt zich opeens.

Paul: 'Nee, dan moeten we erbij, ...' en hij duwt peinzend de rekenmachine tegen zijn kin en denkt blijkbaar aan: 31536000 + 31536000 (Weer additief!) Maar Jeroen komt te hulp. 'Nee, dit (en hij wijst naar 31536000 in het venster van de machine) keer 8'.

En hij pakt zelfs Paul's hand en laat die de toetsen $\boxed{\times}$ $\boxed{8}$ $\boxed{=}$ indrukken. Op het venster verschijnt nu al knipperend het getal 2.5228800, terwijl 31536000 × 8 = 252288000 is. Paul heeft gelijk als hij zegt:

‘Het kan er niet op, denk ik?’ En Jeroen besluit: ‘Dan moeten we het zelf maar uitrekenen’.
De rekenmachine laat de jongens hier in de steek.

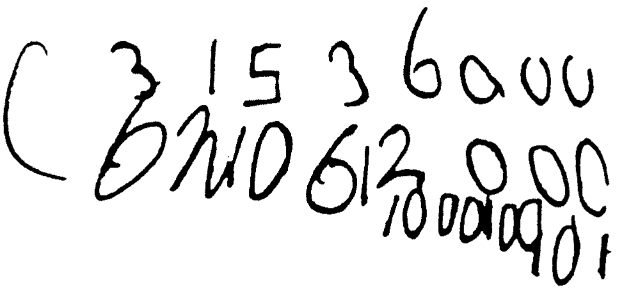
Zelf uitrekenen

Jeroen: ‘Opschrijven’.
En Paul noteert het getal 31536000 met daar pal onder het dubbele zonder positiestrepen:

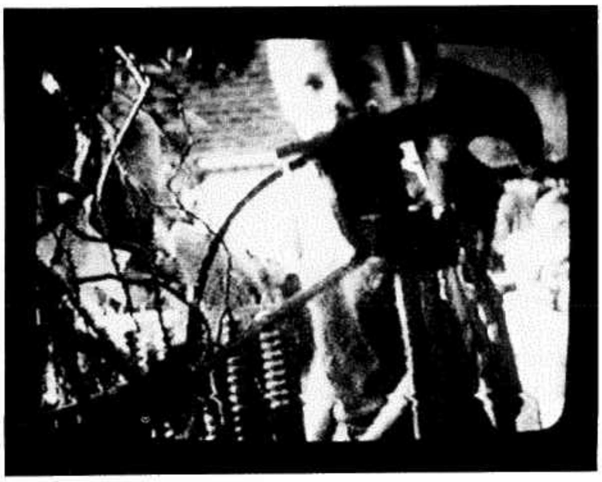
3	1	5	3	6	0	0	0
6	2	10	6	12	0	0	0

Paul: ‘En dan moet het (getal 31536000) weer een keer erbij en dat acht keer’.
Paul hanteert een soort mixture van additief en multiplicatief taalgebruik (resp. ‘erbij’ en ‘keer’).
Maar in de uitvoering doet hij het weer anders: hij verdubbelt de getallen:

3	1	5	3	6	0	0	0
6	2	10	6	12	0	0	0
					0	0	0

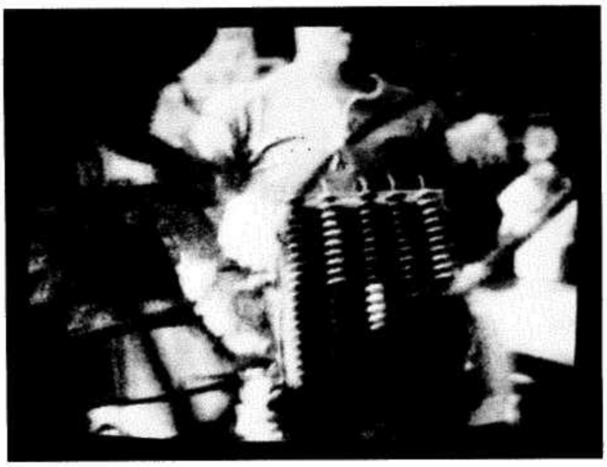


Paul: ‘12 erbij 12. Dat moet ik even met de abacus uitrekenen’ en hij haalt een lus-abacus uit de kast.



Op de abacus zijn 5 staven met elk 20 kralen.
Paul: ‘Deze (abacus) gaat tot de duizend. Kijk maar: éëntal, tiental,....’
Hij wijst naar de 5 staven.

Jeroen verbetert: ‘Tot de tienduizend, hoor. Dan moeten we er een tweede abacus bij halen’.



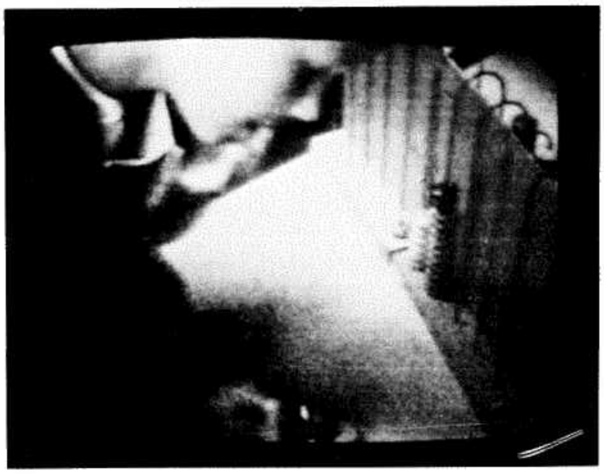
Jeroen haalt een tweede abacus.

En als hij dat gedaan heeft wijst hij op de eerste staaf van de tweede abacus en zegt: ‘Dit is twintig duizend (omdat de eerste abacus met de tienduizend-staaf eindigt) en dat (hij wijst op de tweede staaf van de tweede abacus) is de 39’.

Op de abacus

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

De kinderen proberen nu het getal 31536000 op de abacussen te zetten, maar raken voortdurend bevangen door de naamgeving van de staven.
Paul: ‘Dit is de 10-duizend (staaf 5) en dat is de miljoen (staaf 4)’.
Alleen de naamgeving leeft bij hen zonder orde van grootte. Voorts wil Jeroen vanaf links beginnen en Paul vanaf rechts en wil de laatste weer direct het dubbele van 31536000 op zetten.



Ook worden de kralen niet precies afgeteld. Maar eindelijk staat er op de abacus:

⌊. . 3 1 4⌋ ⌊3 6 . . .⌋ voor 31536000

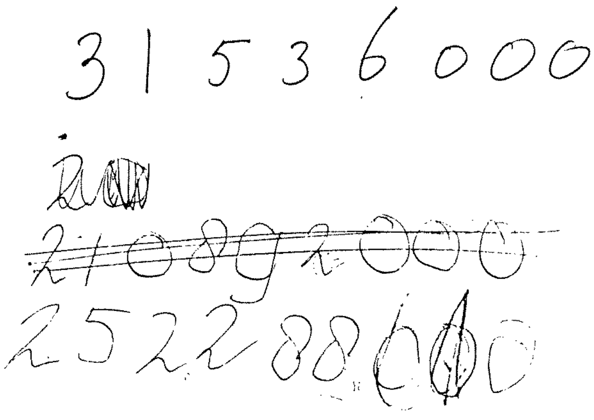
En na 4 keer 31536000 te hebben bijgevoegd, staat er

⌊. 1 1 6 2⌋ ⌊8 4 . . .⌋ Maar
$4 \times 31536000 = 126144000$

Ze gaan *niet* over op het verdubbelen, maar doen er steeds 31536000 in kralen bij. Na 8 keer hebben ze dan

⌊. 2 1 0 8⌋ ⌊9 2 . . .⌋ voor 252288000
$(= 8 \times 31536000)$

En dat schrijven we op het blad



31536000 210892000

Rekenmachine en abacus

'Nou kan je met de zakrekenmachine proberen of die getallen goed zijn', spoor ik aan.
Paul pakt de rekenmachine en neemt het getal 31536000 over van het papier, vermenigvuldigt dat met 8 en vindt knipperend: 2.5228800.
'Kijk, jullie hebben: twee, één (210892000). Dus je hebt hier ergens een fout gemaakt'.
Jeroen: 'Ja, we hebben het 7 keer gedaan.
$(7 \times 31536000 = 220752000)$ We moeten het nog één keer doen'.
Jeroen begint rechts van ⌊. 2108⌋ ⌊92...⌋ het getal 31536000 aan te vullen en Paul begint links de cijfers ($\neq 0$) met het getal op de rekenmachine te vergelijken.

Tenslotte staat er op de abacus 252288000
en op de rekenmachine 2.5228800
Paul: 'Hé, dat is fout'. Hij wijst op de nullen.
Jeroen: 'Nee, het is goed'.
Paul: 'Nee, fout, fout. Hier staan twee nullen (hij wijst op de rekenmachine en dan naar de 3e staaf van de abacus en zegt:) Dit moet ook 8 zijn'. En hij wil het getal gaan veranderen.
Jeroen zoekt de fout in de rekenmachine. 'D'r moet daar nog één nul bij'.
Ik: 'Hier kon het getal niet op. Daarom staat hij te knipperen. Dus aan de abacus kan je zien hoeveel het ongevéér is en aan de rekenmachine, kun je zien hoe goed je cijfertjes zijn.'
En Paul zegt lachend: 'Nou, heb ik voor mijn moeder een leuk sommetje: ga maar eens uitrekenen hoeveel seconden ik ben. Dat kan een tijdje duren'.

(1) Nieuwe Wiskrant: jrg. 2 nr. 1, blz. 49.