Rechthoeken en breuken

L. Streefland
OW & OC, RU Utrecht

Summary

The concept of fraction and operations on fractions proved to be refractory in education.
That is why like in the previous contribution some proposals have been made for remedial work in secondary education on the equivalence of fractions and fractional multiplication. The activities as suggested are related to the area of rectangles.
The author's main point is to emphasize that remedial work should not mean stalling the long term learningprocess for a while. That is why the activities with fractions in the same time aim at the reinforcement of the pupils notions concerning 'future' mathematical concepts like irrational number, limit and infinity.

Is 'Wijzer met voedingswaarden' (1) het startpunt voor een nieuwe rubriek? Wellicht. In ieder geval bevat dit 'vervolg' opnieuw enkele ideetjes, die door N.L.O.-studenten in hun stage gebruikt zouden kunnen worden. Het gaat nogmaals over breuken in een toepassingssituatie. Wederom een bijdrage dus, die de stage-ideeën-bron kan helpen vullen.
Ook deze keer geen gebruiksgereed onderwijs, geen instantmix, die didaktisch-neutraal aangemengd, geserveerd kan worden. Rechtstreekse interactie met een klein groepje kinderen lijkt voorwaarde om enkele ideetjes tot direkt bruikbare onderwijssuggesties te ontwikkelen. En juist het voltrekken van zulk ontwikkelingswerk, in jezelf, in de kinderen en in het materiaal, is onontbeerlijk voor het verwerven van het begeerde vakmanschap.
Uit de suggesties zal overigens blijken, dat ze niet helemaal 'kindfremd' zijn. Dat betekent niet, dat het niet anders zou kunnen, of beter. Goed geobserveerde ervaringen met kinderen kunnen in dit verband veelzeggend zijn.

Instap

Ik val meteen maar met de deur in huis. 't Gaat over rechthoeken met een standvastige oppervlakte van 1 vierkante decimeter (1 dm^2). Met rechthoeken zijn kinderen vertrouwd. Rechthoekigheid beheerst immers grotendeels hun oppervlaktenotie?
'Oppervlakte is lengte keer breedte', of, heel gewichtig in een formule ondergebracht $O = 1 \times b$.(2). Bij het merendeel van de verwerkte sommen, komt het echter op rechtstreekse toepassing aan, dus $1 \times b = O$ zou passender zijn.
Spijkers zoeken op laag water? Wel, weinig onderwijzers zullen bevroeden, dat met 'Oppervlakte *is* lengte keer breedte' een wel heel beperkte kijk op oppervlakte gefixeerd wordt.
Maar dit terzijde.
We gaan nu echt uit van O (= .. × ..), nl. één vierkante decimeter. Hoe zit het dan met de lengte en de breedte van een rechthoek, die de gekozen omvang heeft? Zijn er meer mogelijkheden?
Er komt natuurlijk nog al wat bij kijken, zoals de rechthoeken en vierkanten, waarop allerlei omvormingen worden toegepast. Daarin ligt uiteindelijk een modelletje voor het zichtbaar maken van de breukvermenigvuldiging besloten. Ook de verhoudingstabel, kan als schema, als wiskundig werktuig, goede diensten bewijzen, bijvoorbeeld voor het vaststellen van breuken in (verhoudings)relaties.
Wat de breuken betreft gaat het om:
- inversen van natuurlijke getallen, inversen van breuken <1 en van breuken in gemengde getallen;
- het vermenigvuldigen van breuken.

De startvraag uitgewerkt

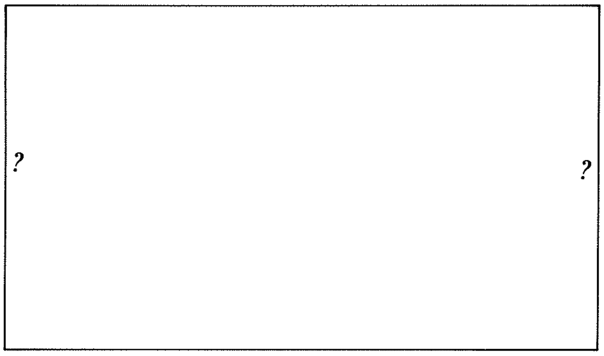
Het gaat dus om de vraag één of meer rechthoeken te vinden met een oppervlakte van 1 dm^2 en de afmetingen in breukentaal te beschrijven.
De meest voor de hand liggende categorie van rechthoeken is natuurlijk:

lengte in dm.	breedte in dm.	opp. in dm^2
1	1	1
2	½	1
3	⅓	1
4	¼	1
...	...	...
...	...	...

Een werkblad kan eventueel inleiden op het nadenken over nieuwe mogelijkheden. Men kan ook van mening zijn dat de gegeven voorbeeldrechthoeken op het werkblad te veel onthullen en te sterk verwijzen naar lengtemeting.

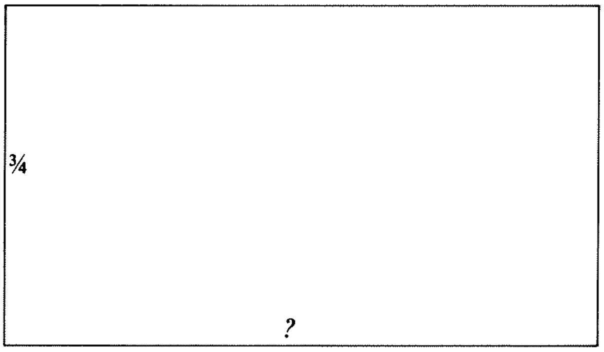
Rechthoeken

1. *1½ dm (⅔dm)*



Deze rechthoek heeft een oppervlakte van 1 vierkante decimeter. De lengte is 1½ dm. Wat is de breedte? ☐ *dm.*

2. Nog een rechthoek van één oppervlakte-decimeter:

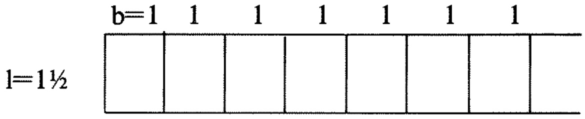


De breedte is ¾ dm. Wat is de lengte? ☐ *dm.*

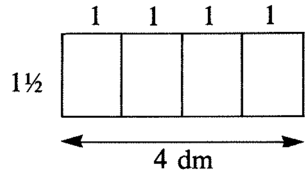
3. Vul de volgende tabel verder in.
't Gaat om rechthoeken.

lengte in dm	*breedte in dm*	*oppervlakte in vierkante dm*
2		*1*
	⅓	*1*
2½		*1*
	⅘	*1*
1⅓		*1*

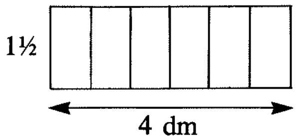
De vraag kan ook in een minder sturende vorm aan de kinderen worden voorgelegd. Dan zijn er allerlei mogelijkheden om het uit te zoeken.
Je zou bijvoorbeeld uit kunnen gaan van een rijtje rechthoeken van 1½ bij 1 (dm):



Als de oppervlakte van iedere rechthoek 1 dm^2 zou zijn, heb je na zes rechthoeken een oppervlakte van 6 dm^2. Die oppervlakte (6 dm^2) is bij rechthoeken van 1½ × 1 al na vier rechthoeken bereikt. De gezamenlijke breedte daarvan is 4 dm. Bij de juiste breedte zouden zes rechthoeken samen een lengte van 4 dm moeten hebben.



deze 4 rechthoeken hebben opp. 6 dm^2



deze 6 rechthoeken hebben opp. 6 dm^2; en hebben dus de juiste breedte

Of, in tabelvorm:

: 2

lengte (in dm) strook	4	2	⅔	...
aantal rechthoeken met opp. 1 dm^2	6	3	1	...

: 3

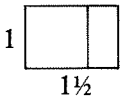
waarmee de gevraagde breedte van de rechthoek berekend is. Zo zouden 9 'nieuwe' rechthoeken maar 6 lang zijn, 12 rechthoeken 8 enz.
Een mooie gelegenheid voor een (her)bezinning op gelijkwaardigheid.
Komt er nu ook steeds ⅔ voor de breedte uit?
Opnieuw kunnen tabellen hier goede diensten bewijzen:

:2 :2

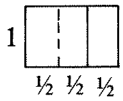
lengte (in dm)	8	4	2	⅔
aantal rechthoeken met een opp. van 1 dm^2	12	6	3	1

:3

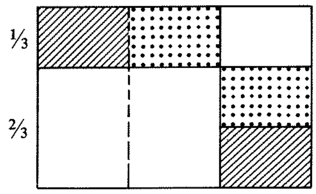
Een geheel andere benaderingswijze is om te starten met een vierkant van 1 bij 1. De oppervlakte is dus al in orde.



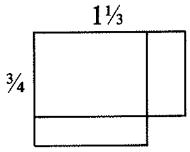
De lengte moet $1\frac{1}{2}$ worden. De voorgestelde uitbreiding geeft een oppervlakte-overschot van $\frac{1}{2}$. Door aanpassing van de breedte, moet het overschot weer te niet worden gedaan.



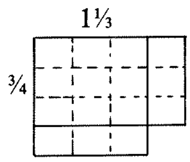
De figuur delen we nu in drie delen, ieder met een oppervlakte van een half ($\frac{1}{2}$ dm^2). Na deze aanwijzing zal het vermoeden rijzen dat de breedte met $\frac{1}{3}$ moet worden ingekort:



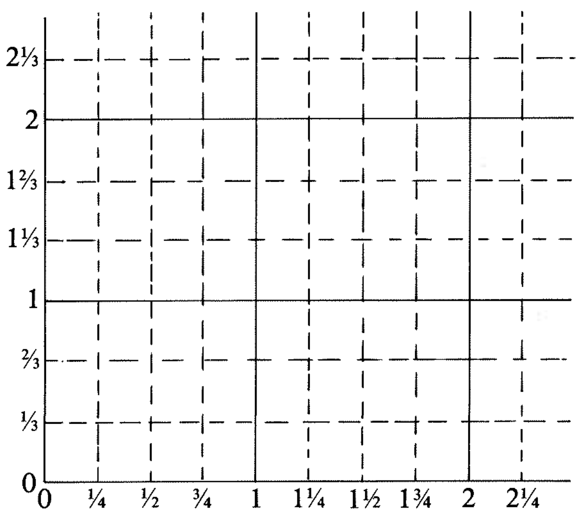
Controle achteraf kan de zekerheid nog vergroten en verworven inzichten bevestigen en versterken. Heeft bijvoorbeeld een rechthoek van $1\frac{1}{3}$ bij $\frac{3}{4}$ nu echt een oppervlakte van 1?



Als rechthoek en vierkant op elkaar worden gelegd zie je al dat het klopt. Wat van het vierkant buiten de rechthoek steekt zal wel overeenkomen met wat van de rechthoek buiten het vierkant steekt. Het voltrekken van de verdeling die zich opdringt laat het nóg overtuigender zien.

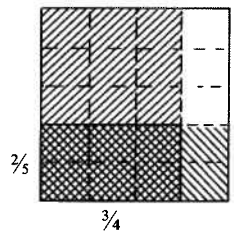


Als eenmaal toch de weg van rechthoeken, vierkanten en verdelen is ingeslagen kunnen met behulp van roosters in één klap hele reeksen van verwante gevallen op de korrel genomen worden:



$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} =$
$\frac{1}{3} \times \frac{2}{4} =$
$\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} =$
$\frac{1}{3} \times 1 =$ etc. en in het rooster worden gearceerd.

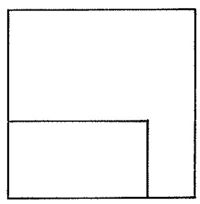
De geschetste gang van zaken kan model staan voor het produkt van breuken, ook wanneer de uitkomst niet geheel is.
bv. $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \ldots$ De uitkomst wordt vertegenwoordigd door het dubbelgearceerde gedeelte, in de figuur.



Om dit te begrijpen kunnen de kinderen zich beroepen op hun opvattingen over oppervlakte. Wat er immers gebeurde was het afzonderen van een rechthoek van $\frac{2}{5}$ bij $\frac{3}{4}$ en de oppervlakte daarvan krijgt nu eenmaal zijn beslag in $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$ (of is het $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$?).
Dat de gevolgde handelwijze – geïnspireerd op de ervaringen met verwante produkten in het rooster – meteen een handzame eenhedenverdeling oplevert, is mooi meegenomen. $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$ Wat? $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$ is in eerste instantie toch gelijk aan $\frac{6}{20}$. Inderdaad, maar niemand kan er toch bezwaar tegen maken de betrokken rechthoek met een eenheid van 2 hokjes te meten?

Gelijkwaardigheid

Dat is dan meteen een aardige gelegenheid om te ervaren, dat het algoritmisch afdoen van de gelijkwaardigheid van breuken zo zijn voorstadia kan hebben. Voorstadia, die aan de vereenvoudigingsregels de nodige betekenis kunnen verlenen. In ons voorbeeldje beslist de eenheidskeuze over de uitkomst en niet het feit, dat teller en noemer door 2 deelbaar zijn. De mogelijkheid tot en de wijze van vereenvoudigen berust dan niet meer op het toevallig zien van de gelukkige greep, maar op een in een eerder stadium ingenomen standpunt bij het meten.



Rechthoek	6	9					1
Eenheid	20		40				

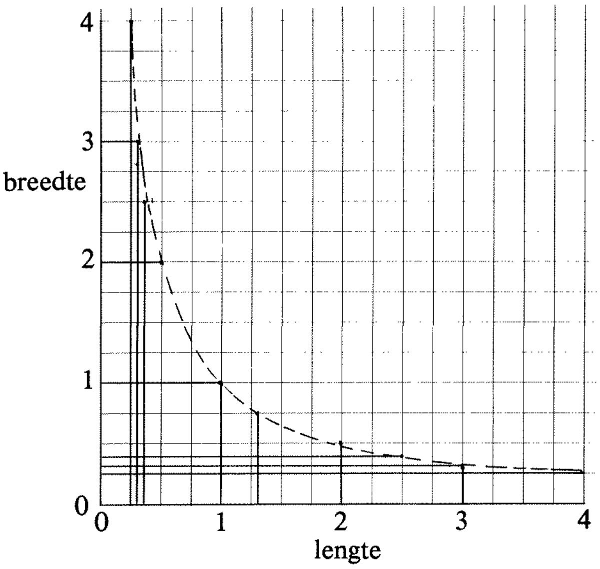
Achter het vereenvoudigen zit dan een heel verhaal, bijvoorbeeld:
Als het vierkant in 20 eenheden verdeeld is, bevat de rechthoek 6 van zulke stukjes.
Als er nu eens 40 eenheden in het vierkant waren, hoeveel bevatte de rechthoek er dan?
Bij een gegeven verdeling omsluit de rechthoek 9 hokjes, hoeveel hokjes zullen dan in het vierkant opgaan? Stel de rechthoek zelf is de eenheid, hoeveel eenheden meet het vierkant dan?

Vermenigvuldigen

De weg tot de uitkomst is wel heel erg lang op deze manier. Na al die franje zijn we nog steeds niet aan het echte vermenigvuldigen van breuken toe.
Moet al die rompslomp nu? De regel is zo simpel: $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{5 \times 4} = \frac{6}{20}$, produkt nemen van de tellers en net zo van de noemers en klaar is, Kees, Marie, Ineke, Gert, ... Stellig, maar .... hebben de kinderen dan het produkt van de *breuken* $\frac{2}{5}$ en $\frac{3}{4}$ bepaald of zijn ze met de toegepaste symbolen zó vertrouwd, dat zij in de natuurlijke getallen zijn blijven steken? Zien zij dus in $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$ resp. '2×3' en '5×4' en zetten tussen de uitkomsten 6 en 20 gewoon nog een streepje: $\frac{6}{20}$, omdat in de som ook zulke streepjes staan?
Tja... dat kun je toch niet weten en moet dat dan zo nodig? Wel, als we de leerlingen $\frac{2}{5} + \frac{3}{4}$ voorleggen en ze gaan, aangemoedigd door het succesvol 'vermenigvuldigen' van breuken op de ingeslagen weg voort, dus $\frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{2+3}{5+4} = \frac{5}{9}$, dan wordt dit afgewezen en de kinderen verzuchten: 'Nu snap ik er helemaal niets meer van!' en gelijk hebben ze.
Van een breuk als één object, één rationaal getal, hebben ze nog geen flauwe notie. Het begrip 'breuk' is niet operationeel, want bij het opereren valt het door de mand.
Hoe moet het dan wèl? Voor het vermenigvuldigen van breuken hebben we er iets van laten zien. De regels daarvoor (en ook voor het omzetten van breuken in daarmee gelijkwaardige) zouden het door de leerlingen zelf vastgestelde sluitstuk moeten vormen, ontspruitend aan ervaringen met voorbeelden als geschetst. De algoritmische regels dienen als het ware om de intuïtieve noties, die al werkend bij de kinderen inductief postvatten en rijpen, te verifiëren en te bevestigen. Zo iets vraagt om een leerproces van enige omvang en planning over langere termijn.

Grafiek

Leerprocessen over langere termijn overzien vraagt om kijk op samenhang in een programma, om niet blijven steken in de inhoud van het moment, in dit geval de breuken, om voorschotjes nemen op wat nog komen moet.
Het laatste doen we hier ook.



Het overzien in onderlinge samenhang van wat tot nu toe gevonden is, daar gaat het om.
In het rooster bekijken we de rechthoeken, die netjes liggen met één hoekpunt in nul. Een dikke stip in elk hoekpunt buiten de assen doet vermoeden, dat ...
Als voor nog veel meer rechthoeken van 1 een stip was getekend, dan.......
Zou je een rechthoek met een lengte van 1000 dm kunnen krijgen? (Hoe zit 't dan met de breedte?)
En wat te denken van 10.000? Of ... 100.000?
Welke breedtes horen hierbij?
Kun je een rechthoek krijgen die nog langer is?
Die net zo lang is als je maar wilt?
Wat gebeurt er met een rechthoek, als je de breedte bijna gelijk aan 0 dm kiest?
Wat betekent dit voor de grafiek?
Kun je een breedte voor een rechthoek vinden, waarbij de lengte toch groter wordt, dan een heel groot getal, dat je van te voren kiest? En als we nu eens 1 miljard kiezen?

Context

Het gevaar is niet denkbeeldig, dat door de gekozen instap, die al betrekkelijk formeel is, rechtstreeks op het breukrekenen wordt afgestevend onder verwaarlozing van de meetkundige context. Om dat gevaar te bezweren zou men althans de aanloop van de suggesties kunnen doen voortkomen uit een realistischer probleem. Bijvoorbeeld:
K. Tegel, een tegelfabrikant met hart voor zijn bedrijf, ziet zijn omzet teruglopen.
Hij zit echter niet bij de onverkochte pakken tegels neer, maar bezint zich integendeel op nieuwe afzetmogelijkheden. Zo laat hij bijvoorbeeld nagaan met welke wensen doe-het-zelvers bij bouwmarkten komen. Dan blijkt, dat er wel degelijk mogelijkheden zijn voor standaard siertegelpakketten van 1 vierkante meter. Het ingestelde onderzoek wees ook uit, dat behalve vierkante tegeltjes van 1 dm^2 veel zelfzetters ook vragen naar rechthoekige tegeltjes van verschillende afmetingen. Tegel denkt aan standaardpakketten tegeltjes per soort, vierkanten en rechthoeken, allemaal ter grootte van 1 dm^2 en gemengde pakketten voor eenvoudige mozaïken.
De ontwerper van Tegel krijgt opdracht eens wat mogelijkheden te onderzoeken en......
Ziedaar een mogelijke context, waarin althans het eerste deel van de gedane suggesties betekenis zou kunnen krijgen. Het voordeel is in ieder geval, dat vormen en oppervlakte meer accent krijgen in een dergelijke benadering, hetgeen aan een betere fundering van breukbegrip in bewerkingen tegemoetkomt.
Bij de inventarisatie van mogelijke rechthoeken (de grafiek) wordt buiten de grenzen van de context getreden. Er vindt dan een wiskundige verdieping en verbreding plaats. Dit kan voor de leerlingen een belangrijk bewustmakingsmoment zijn.

Bezinning

We zouden de leerlingen ook nog eens een onderzoek kunnen laten instellen naar rechthoeken met een oppervlakte van twee. (dm^2).
Met de grafiek waarin zulke rechthoeken zijn samen-

gebracht kan het vierkant met oppervlakte 2 worden aangewezen. Hoe lang is de zijde ervan? Aflezen in de grafiek geeft slechts een eerste benadering van $\sqrt{2}$. Geeft de gevolgde methode aanleiding tot preciezer berekening van $\sqrt{2}$?
De klassieke methode van benadering met de 'rechthoekenmethode' blijkt al aanzienlijk te zijn voorbereid. Zo blijken de voorgestelde activiteiten behalve voor breuken een bron te kunnen zijn voor een eerste verkenning van de irrationele getallen met een hoofdrol voor de toepassing van het kommabreukrekenen. Verder noem ik nog variabele, functie en limiet, die een belangrijke rol speelden.

Het remediëren i.v.m. een gebrekkig breukbegrip en het uitvoeren van bewerkingen met breuken, behoeft dus geenszins te betekenen dat in de wiskundige ontwikkeling van de kinderen pas op de plaats wordt gemaakt.

(1) Nieuwe Wiskrant: jrg. 2 nr. 1, sept., 1982.
(2) In de modernere reken-wiskunde methoden voor het basisonderwijs wordt aan oppervlakte meer recht gedaan. Ook kromlijnige vlakdelen komen aan bod.

Onderstaande puzzel van Rafael Robinson heeft meer dan één oplossing!

Vul de passende getallen (aangeduid met cijfers) in:

In dit kader komt het cijfer 0
... keer voor,
het cijfer 1
... keer voor,
het cijfer 2
... keer voor,
het cijfer 3
... keer voor,
het cijfer 4
... keer voor,
het cijfer 5
... keer voor,
het cijfer 6
... keer voor,
het cijfer 7
... keer voor,
het cijfer 8
... keer voor,
het cijfer 9
... keer voor,