Even krijten

G. Schoemaker

OW & OC, R.U. Utrecht

Summary

The process of solving two lineair equations can be illustrated on the grid. This can mean more than an illustration only. It is a way to control the strategy of solving the problem.

Onder deze titel wil ik stukjes schrijven over vakdidaktiek: Voorbeelden die veel mensen allang kennen. Ik wil eraan meewerken dat ervaringen die door veel leraressen en leraren zijn opgedaan bekendheid krijgen in een bredere groep van onderwijzenden. De titel verwijst naar de biljarter die even stilstaat voor de volgende stoot.

Los op: $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ x-\ y=1 \end{cases}$

We zijn dik tevreden als leerlingen dat als volgt doen:

$$\begin{cases} 2x+3y=7 \\ x-\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 2x-2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 5y=5 \\ 2x-2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=1 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow S=\{(2,1)\}$$

We vinden het prima als ze (2,1) substitueren in de oorspronkelijke vergelijkingen en in staat zijn te zeggen dat (2,1) het snijpunt is van de lijnen $2x+3y=7$ en $x-y=1$.
De handelwijze op weg naar het eindresultaat is moeilijk te verantwoorden. Waarom maak je van $x-y=1$ nu $2x-2y=2$?
Dit verklaren we vanuit het voornemen door aftrekking de x te elimineren.

Waarom geldt: $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 2x-2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 5y=5 \\ 2x-2y=2 \end{cases} \quad ?$$

"Die stelsels zijn gelijkwaardig. Je vervangt het eerste stelsel door een stelsel van het verschil van de twee vergelijkingen en de tweede vergelijking".

Op beide vragen volgt geen verklaring maar een verwoording van de toegepaste algoritme. Leerlingen zijn zo niet in staat hun handelwijze stap voor stap op inzichtelijke wijze te verifiëren.
Je zou willen dat een leerling kritisch doorvroeg, zo op de manier van:
"als je kijkt naar

$$\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 2x-2y=2 \end{cases} \text{ en } \begin{cases} 5y=5 \\ 2x-2y=2 \end{cases}$$

dan staan er steeds twee verschillende vergelijkingen die door accolades bij elkaar worden gehouden.
Je zet er een $\Leftrightarrow$teken tussen. Maar wat betekent dat eigenlijk? In ieder geval niet dat er dezelfde vergelijkingen staan, want ik zie zo dat de bovenste vergelijking een heel andere is.
Als de accolade er niet stond was het gebruik van het $\Leftrightarrow$teken misplaatst. Maar wat betekent de accolade precies?
Bij verzamelingen kom je ze ook tegen, maar daar staan er altijd twee, zó { }. Daar heeft deze accolade niets mee te maken. Het betekent hier zoiets als "zowel het een als het ander". De accolade betekent eigenlijk "$\wedge$".

Een dergelijke gedachtengang vraagt van een leerling heel wat vasthoudendheid, abstractievermogen enz. Van de meeste leerlingen mag je dat nog niet verwachten.
Wat je wel mag verwachten is dat de leerling in staat is te overzien wat hij doet bij de algoritme van het oplossen van deze twee vergelijkingen. De leerling moet z'n handelwijze kunnen verifiëren.
Ik probeer de taal van de meetkunde te gebruiken om de algoritme te verifiëren.

$$\begin{cases} 2x+3y=7 \\ x-\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 2x-2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 5y=5 \\ 2x-2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=1 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases}$$

Als je kijkt naar het stelsel $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ x-\ y=1 \end{cases}$

dan betekent dat: Er zijn twee vergelijkingen. Welke waarde(n) van x en y voldoen in beide vergelijkingen? De accolade geeft aan dat we een getallenpaar (x,y) moeten zoeken dat aan alle twee de vergelijkingen voldoet.
We kunnen dat ook in meetkundetaal zeggen:
Er staan twee rechte lijnen. De accolade geeft aan dat het te doen is om een punt dat op beide lijnen ligt: het snijpunt.
Als je zo maar twee rechte lijnen tekent is het snijpunt wel bepaald, maar moeilijk af te lezen uit de vergelijkingen.
Als de lijnen zo staan + kun je het snijpunt meteen aflezen uit de bijbehorende vergelijkingen.
We gaan nu × stap voor stap vervangen totdat we bij + uitkomen. Kennelijk gaan de lijnen $2x+3y=7$ en $2x-2y=2$ en het lijnenpaar $5y=5$ en $2x-2y=2$ door hetzelfde punt. Dat kun je nagaan door het uiteindelijk gevonden punt in te vullen.
Samengevat: 'In meetkundetaal kun je de strategie bij het oplossen verklaren. We zijn erop uit zo'n tweetal × te vervangen door zo'n tweetal + lijnen. Je werkt met andere lijnen, maar het snijpunt blijft gelijk.

Opmerking 1
Echt *stap voor stap* uit de meetkundige situatie de volgende stap verklaren dat gebeurt niet. Daarvoor heb je het begrip lijnenbundel nodig.
De meeste leerlingen zijn daar ten tijde van dit soort sommetjes nog niet aan toe. De meetkundetaal verheldert de oplossingsstrategie in grote lijnen.

Bij $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ (x-1)^2+(y-2)^2=16 \end{cases}$

kan de meetkundetaal leiden tot interessante inzichten. Hierbij is enig besef van het begrip cirkelbundel gewenst.

Opmerking 2
In de wiskunde twee komen stelsels van drie lineaire vergelijkingen met drie onbekenden op de proppen. Hier is de meetkundetaal spectaculair. We gaan van drie vlakken naar vlakken evenwijdig aan de assen en dan naar vlakken evenwijdig aan de coördinaatvlakken.