Het is een valstrik

A.J. Goddijn
OW & OC, RU Utrecht

Summary

Problems of pure logic such as "in this sentence the digit 1 appears exactly.... times", and the liars-paradox are discussed with groups of thirteen-year-old students.
There reasoning level is noticeable higher than one would expect considering their normal mathematical activities.
Is there something wrong these students, or perhaps with the existing curriculum which doesn't make use of their best abilities?

Een verwijt

Af en toe vraag ik me wel eens af waar ons wiskunde-onderwijs goed voor is. Keer op keer blijkt dat de MAVO en LBO examenkandidaten massaal uitglijden over opgaven als:

4. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 + 3x + 2\frac{1}{4} = 0\}$ *bevat*

28 A geen elementen
12 B precies één element; dit element is positief
52 C precies één element; dit element is negatief
8 D precies twee elementen

Waarom de x voor een vergelijking met coëfficiënten uit $\mathbb{Q}$ zich tot $\mathbb{Z}$ moet beperken vermeldt het vraagstuk niet. Maar niet getreurd, x is heel; x^2 dus ook, $3x$ eveneens en met $2\frac{1}{4}$ erbij is het *niet* heel meer. Zeker geen nul!
Om kort te gaan: al weer een $\emptyset$. A is de juiste keuze. Dat was niet de bedoeling, dat blijkt ook wel uit het CITO-commentaar:

De voor de hand liggende oplossingsmethode bij dit vraagstuk bestaat daaruit dat eerst de oplossing(en) van $x^2 + 3x + 2\frac{1}{4} = 0$ *berekend wordt (worden), waarna gecontroleerd wordt of de gevonden oplossing(en) aan de voorwaarde* $x \in \mathbb{Z}$ *voldoet (voldoen).*

En natuurlijk uit het feit dat 52% één negatief element ontdekt. Vermoedelijk is dat element $-1\frac{1}{2}$.
Ik verwijt ons wiskunde-onderwijs dat we de meerderheid van de leerlingen zover hebben gebracht dat ze bij het eerste het beste kwadraat al in de oplossingshouding springen en naar de vermeende eindstreep "$x = ...$" hollen.
Maar in het algemeen wordt de leerlingen iets verweten:
Dit is te lastig voor ze. Ze vergeten die $x \in \mathbb{Z}$ *waarvan ze blijkbaar het belang niet inzien. Blijf concreet.*
M.a.w. als het geen disco, patat of Veronica is krijg je de grijze massa in hun bollen niet meer aan de slag. Omdat ik twijfel aan dat laatste en graag duidelijk wil maken dat er nog heel wat mogelijk is, heb ik kleine groepjes leerlingen uit een LBO-MAVO brugklas een paar klassieke logicaproblemen voorgelegd. Echte harde noten, niet zó simpel te kraken als $\{x \in \mathbb{Z} \mid$ enz.
Van de bandopnamen van deze gesprekken wil ik hier wat vertellen. Daar vandaan komt ook de kreet "het is een valstrik". Die heb ik dus niet vanwege bovengenoemd vraagstuk opgeschreven...

Invulsommen met een luchtje

Een eerste voorbeeld is dit werkblad. Som 1 tot en met 5 zien er onschuldig uit, al zit bij 3 een addertje onder het gras.
Leest u a.u.b. niet verder voor u de twee (!) oplossingen bij vraag 6 en de drie (!) bij vraag 8 hebt gevonden en ook weet wat er met nr. 7 aan de hand is. Per slot van rekening leest u de Nieuwe Wiskrant en niet de Nieuwe Revue en dus mag er best even tussendoor nagedacht worden.

Werkblad 1

INVUL SOMMEN ....

1. Ken je ze nog, die invul sommen? Hier is een heel erg makkelijke.

4 + ... = 7

2. Dat viel nogal mee. Bij deze moet je een woord invullen.

Bij mooi weer is de lucht .....

3. Nu een heel andere. Vul een cijfer in. (Bij alle volgende opgaven moet je alleen cijfers invullen).

In deze zin komt het cijfer 8 precies ... keer voor.

4. Soms heb je méér dan een mogelijkheid. Bijvoorbeeld:

3 is kleiner dan ....

5. Deze lijkt op opgave 3.

Binnen dit hokje kom je het cijfer 5 juist
...... keer tegen.

6. Pas nu goed op. Deze kan echt op verschillende manieren. Probeer maar welke cijfers goed gaan.

In deze zin komt het cijfer 2 precies ..... keer voor.

Wat zijn de goede antwoorden? .... en..... en....

7. Vul in en kontroleer je antwoord.

In deze zin komt het cijfer 1 precies .... keer voor.

Wat is daar mee aan de hand?

8. De laatste.

In deze zin komt het cijfer 0 juist ... keer voor,
het cijfer 1 juist ... keer
het cijfer 2 juist .... keer
en het cijfer 3 juist .... keer.

Opgave 1 is inleidende franje: Weet je nog? Invullen zodat het klopt. Bij 2 en 4 zijn verschillende antwoorden mogelijk. Omdat bij de latere opgaven zulks essentieel is staan deze erbij. Het blijkt – helaas – niet voor niets, luister maar naar het volgende gesprekje naar aanleiding van nr. 2.

Ik: "Wat heb jij bij die lucht?"
Ernestine: "Helder."
Ik: "En jij hebt blauw?"
Francis: "Ja."
Ik: "Jij hebt helder, da's natuurlijk niet goed hè. Ze hebben allemaal blauw."
Ernestine grijpt onmiddellijk haar gum.
Ik: "Nou moet je het niet meteen weghalen. Vind jij helder niet goed?"
Ernestine: "Ja..."
Ik: "Kan dat, zo'n vraag met verschillende antwoorden?"
Ellen: "Ja."
Ik: "Ja dat komt voor. Daar moet je mee oppassen."

Hoewel Ernestine genoeg gezond verstand heeft om vast te stellen dat de lucht helder èn blauw is, kiest ze toch voor haar gum. Immers op school is er altijd één antwoord en één weg daarheen.
Die weg leer je van de éne autoriteit. Als we Ernestine later de alom-bruikbaarheid van de a, b, c-formule gaan voortoveren, is er grote kans dat ze ook op afleider C in zal gaan bij $\{x \in \mathbb{Z} \mid$ enz. ...
Opgave 3 brengt iets nieuws.

Jacqueline: "Welke zin? Deze of die?"
Illona: "Deze."
Jacqueline: "Weet ik veel."
Linda: "Eén keer."
Ik: "Vond je dat moeilijk?"
Linda: "Nee ..."

Het probleem is "deze" in "In deze zin ... etc." Ilona heeft de zelfreferentie direct opgepakt. Dan hebben de anderen het ook door. Eigenlijk staat er geen pijltje o.i.d. Het blijft kiezen. Sommige leerlingen zeggen eerst: nul keer. Ze denken aan de vorige zin. Ze staan in hun recht: er is niet expliciet aangegeven waar "deze" op terugslaat. Bij de latere opgaven staat $\boxed{\text{in dit hokje}}$ en dat vermijdt verwarring. De zelfreferentie is een merkwaardige denksprong. Je bekijkt tegelijk de zin op twee niveaus: als betekenisdrager én als letter-en-cijferreeks.
Hoewel dat niet expliciet wordt geuit, schijnt dit niveauverschil toch hanteerbaar te zijn!
Door naar 6.

Jacqueline: "Hier staat: pas goed op. Kan op verschillende manieren."
Ik: "Wat heb jij daar bij 6 ingevuld?"
Jacqueline: "Een."
Linda: "Ik weet niet wat ik anders moet invullen."
Ik: "Weet je nog meer cijfers?"
Linda: "Die komen hier toch niet in voor."
Ik: "Dàt zeg ik ook niet. Wat heb jij ingevuld?" (tegen Ilona).
Ilona: "Weet ik nog niet."
Ik: "Zoek maar wat je op de stippels kunt invullen."
Ilona: "Nou, één."
Ik: "Dat heb jij en jij ook. Makkelijk hè. Maar je kunt nog andere getallen proberen. Honderd, zou dat goed zijn?"
Jacqueline: "Heè?"
Helma: (Leest). "Het cijfer 2 ..."
Ik: "Het cijfer 2 komt precies..."
Ilona: "100 keer voor."
Helma: "Nou, volgens mij niet ..."

Zo gaat dat nog even door. 10 en 0 worden ook geprobeerd. Totdat ....

Ilona: "Kan het ook in letters staan?"
Ik: "Nee, niet in letters. Ja, hij staat er nou niet in, veeg eens uit wat je hebt en kijk of je toch iets anders kunt invullen."
Jacqueline: "Als je nu twee invult ...."
Ik: "Wat dan?"
Jacqueline en Linda: "Dan staat het er twee keer in!"
Ik: "Klopt dat?"
Ilona: "Ja, ja ...."
Jacqueline: "Zie je, dan staat het er twee keer in."
Linda: "Als je nu 22 invult, staat ie er 3 keer in."
Ik: "Dan klopt het niet hè."
Linda: "Tweeduizend, tweehonderdtweeentwintig!"
Ik: "Is 2 goed?"
Helma: "Weet ik veel..."
Ik: "Vul voor de grap eens 2 in. Ga kijken of het goed is."
Helma: "Hoe kun je dan kijken of het goed is?"

Linda: "Ik weet het: een keer twee is twee!"
Ik: "Lees maar voor!"
Helma: "Komt het cijfer 2 precies 2 keer voor. Het staat hier twee keer."

Uiteindelijk ziet Helma het ook! Toch stelt zij – de traagste – een wezenlijke vraag: Hoe kun je dat controleren? Dat is lastig: er is geen context, iets echts buiten vraag c) om.
De nieuwe oplossing is heel verrassend. Ook als je het allemaal ziet en niet zelf ontdekt is het als een vonk die overspringt: de tweede twee die jij invult doet ook mee. Bij alle leerlingen kon je die vonk zien en horen overspringen: de spreeksterkte vertoont een plotselinge stijging en er is druk "hè?" en "ja!" geroep.

Maar laten we kijken wat het effect is van de in opgave 7 geplaatste explosieven!

In deze zin komt het cijfer 1 precies .... keer voor.

De eerste reactie van het hele groepje is "1" invullen. Ik vraag het resultaat voor te lezen. Francis lijkt dat te gaan doen, maar dan zegt ze:

Francis: "Als je het cijfer 2 invult, dan staat het er niet twee keer, maar nu staat het er wel twee keer."
Ik: "Ja, nu staat er wel twee keer een 1."
Ellen: "Ja, als je een twee invult staat het niet meer twee keer."
Ik: "Moet je de 2 invullen?"
Ellen: "Nee, ... één."
Ik: "Is het goed met één?"
Ilona: "Volgens mij ook niet."
Francis: "Want nu staat het er weer twee keer."
Ik: "Ja."
Ilona: "Als je nu 2 invult staat het er één keer."

Zo gaat dat nog even verder. Op een bepaald moment is ieder het eens over:
"Als je 1 invult is het twee keer en als je 2 invult is het één keer."
Uitstekend zo'n heldere formulering. Het wordt opgeschreven:

7. Vul in en kontroleer je antwoord.

In deze zin komt het cijfer 1 precies .... keer voor.

Wat is daar mee aan de hand? Als je 1 invult dan is het twee
Als je twee invult dan is het 1 geen van beide is goed

8. De laatste.

In deze zin komt het cijfer 0 juist 1.. keer voor,
het cijfer 1 juist ... keer
het cijfer 2 juist .... keer
en het cijfer 3 juist .... keer.

En ik – stomvervelend – doe of ik het niet snap ...

Ik: "Nou wil ik toch weten of het één of twee is."
Ellen: "De één."
Ernestine: "De twee."
Ilona: "Weet niet."

En de discussie begint weer van voren af aan!
Even later geef ik óók toe dat het niet kan. Maar alleen mijn vraag "één of twee?" brengt deze leerlingen van hun resultaat af. Blijkbaar moet je toch één of twee neer zetten, denken ze.
Hopelijk komen ze zover dat ze ooit zeggen:
"Hou nou eens op. Het kàn niet."
Een ander groepje had dat wèl vastgesteld:

7. Vul in en kontroleer je antwoord.

In deze zin komt het cijfer 1 precies .... keer voor.

Wat is daar mee aan de hand? Deze som is niet goed.

Na de laatste opgave babbelen we nog even na over twee zaken.
Ten eerste: er is iets vreemds aan de hand. Wat? Ilona (verwijst naar opgave 8): "Nou, als je hier één invult komt er toch hier vier."
Ik begreep toen niet direct dat ze vlak tegen een oplossing aanzat (vul in: 1, 4, 1, 1!) maar dacht dat ze bedoelde: dan gaat het fout.

Ik: "Ja. Eerst denk je dat het goed is en ..."
Ilona: "Dan is het tòch fout."
Ik: "Hoe komt dat nou, dat het fout wordt als je goed telt?"
Ilona: "Omdat er staat 'hoeveel keer staat dat cijfer in de zin?' Als je één invult, hoeveel staat één erin, dan is het toch twee keer."

Het enige nieuwe in Ilona's laatste opmerking is "als je invult." Blijkbaar heeft ze door dat je het verschijnsel beïnvloedt door het te beschrijven!

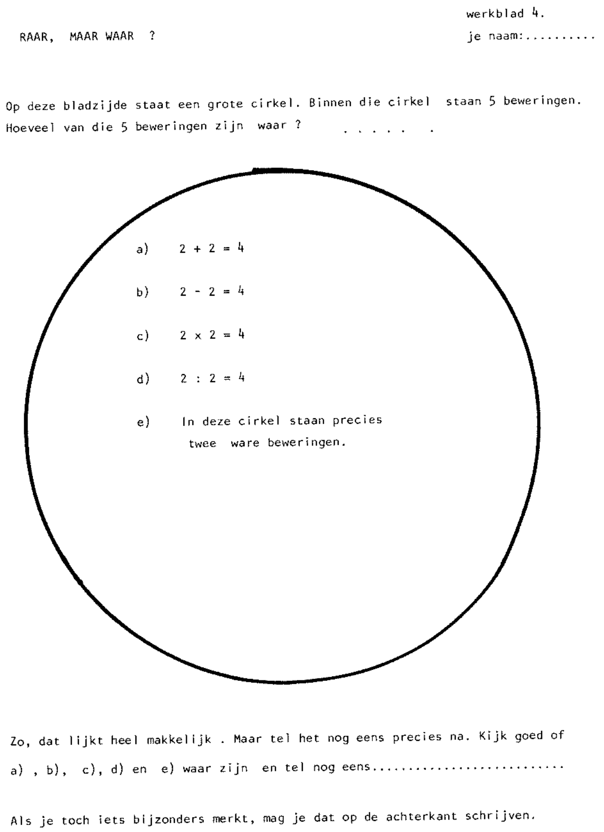
Het tweede punt is subtieler. Bij deze vragen worden cijfers en getallen wat ruw door elkaar heen gebruikt. De getypte cijfers functioneren niet in hun wiskundige betekenis, de ingevulde wel. Toch worden ze bij het tellen van het aantal cijfers op één hoop gegooid. Fraai, wiskundig gezien, is dat niet, maar van de andere kant maakt het juist deze puzzels mogelijk. Kunnen deze leerlingen deze verschillen tussen gebruiken en noemen van de cijfers zien? Of moeten we ze dit juist niet voorschotelen om problemen te voorkomen?
Ik geef ze een voorbeeld:
"Op dit blaadje staat jouw naam Helma. Doet het zeer nu ik het dubbelvouw?"
Ik oogst voldoende hilariteit om door te gaan:
"Je hebt twee Helma's: de echte en de opgeschreven Helma.
Nu die twee tweeën. Welke is nu een echte en welke lijkt meer op de opgeschreven Helma?"
Linda: "Nou, die opgeschreven."
Ik: "Ze zijn allebei opgeschreven. Maar één van de tweeën is een echte."
Helma: "Deze is echt. Die er al staat."
Ilona: "En die wij hebben opgeschreven is de onechte."

Als ik doorvraag blijkt de eigenlijke reden: omdat die laatste best fout kan zijn. Kortom: het onderscheid "echt of onecht" is voor deze leerlingen toch "gedrukt of ingevuld".

Ik probeer het anders. Cijfers, waarvoor dienen die eigenlijk? Ze zeggen: voor rekenen. Als ik voordoe hoe je telt, mag tellen ook.
Ik: "Nou, welke van de twee tweeën heeft iets met tellen te maken?"
Helma en Ilona: "Die wij hebben opgeschreven."

Kortom: het onderscheid dat ik bedoelde, wordt in principe wèl gemaakt! Nog één oplossing van Monique voor opgave 7 tot slot, mocht u die nog steeds niet gevonden hebben: "Als je dat nou eens in gewone letters schrijft, dan komt het precies echt één keer uit."

Daar klopt geen donder dan!


werkblad 4.

RAAR, MAAR WAAR ?

je naam:..........

Op deze bladzijde staat een grote cirkel. Binnen die cirkel staan 5 beweringen. Hoeveel van die 5 beweringen zijn waar ? . . . . . .

a) $2 + 2 = 4$

b) $2 - 2 = 4$

c) $2 \times 2 = 4$

d) $2 : 2 = 4$

e) In deze cirkel staan precies twee ware beweringen.

Zo, dat lijkt heel makkelijk . Maar tel het nog eens precies na. Kijk goed of a) , b), c), d) en e) waar zijn en tel nog eens..........................

Als je toch iets bijzonders merkt, mag je dat op de achterkant schrijven.

Als u er absoluut zeker van bent dat u tot drie kunt tellen, moet u maar even onderstrepen wie van a), b), c), d), e) waar zijn. Nog eens tellen en dan .... Tja, daar loopt toch iets mis!
Voor we uitzoeken wat er precies mis is gegaan, laat ik Edwin, Leon en Harold aan het woord. Dit is het begin van hun discussie, die meer dan een half uur zal duren, zonder dat ik ze opzettelijk aan de praat houd. Het probleem liet ze gewoon niet los!

Edwin: "Hier is de vraag en daar staat het antwoord."
(Hij wijst bij 'daar' op e. Heel slim, al laat hij zich niet uit over de juistheid van het antwoord!)
Leon: "Drie."
Ik: "Hij zegt drie. En jij?"
Harold: "Welke goed is?"
Ik: "Nee, hoeveel er goed zijn."

Even later ($2 \times 2 = 4$, 2:2 is lastig... nee, niet 4) vindt Harold er twee goed.

Harold: "En twee fout."
Ik: "Dat zijn er samen ..."
Edwin: "Vier. Er zijn er vijf."
Leon leest e) voor. Zijn commentaar: "Ja, dat is goed. Drie."
Edwin: "Nou begin ik toch een beetje te twijfelen."
Leon: "Drie goede. Dat denk ik hoor. Ik weet het niet zeker, maar ik denk het wel."

De twijfel slaat toe, de argeloosheid is verdwenen. Ze beginnen opnieuw te tellen. En dan is Harold er toch ineens van overtuigd dat het er twee zijn: a) en c). De discussie gaat nu – uiteraard – rond e).

Leon: "Volgens mij wel. Want a) en c) zijn waar en dat is twee."
Edwin: "Als e) waar is, zijn het er drie."
Harold: "Dan heb je toch 3."
Leon: "Het zijn er twee ... Nee!"
Harold (verbaasd): "Ja; hoe kan dat dan?"
Edwin: "Ik vind het moeilijk uit te leggen."
Leon: "Dat is in ieder geval waar."
Edwin: "In deze cirkel staan twee ware beweringen. Maar als er twee ware beweringen zijn, is deze ook goed. Dan zijn er drie."

Dat laatste wordt dan door Harold en zelfs door Leon toch niet geaccepteerd. Niet duidelijk wordt uitgesproken dat "Dan zijn er drie" strijdig is met e). Men kiest toch voor "twee". En ik vraag het voor de zekerheid nog even na te tellen.
Dan komt het argument "Als er drie zijn is e) fout, dus zijn er twee" óók explicieter op tafel:

Harold (over e): "Want als deze goed is zijn het er drie. En ..."
Ik: "Ja ..."
Harold: "Maar hij is niet goed omdat er drie in staan."

Iedereen lacht: blijkbaar zien ze nu hoe rond een vicieuze cirkel kan zijn.

Edwin: "Het is zo moeilijk uit te leggen ..."
Edwin vindt blijkbaar dat je iets niet goed begrijpt als je het niet kunt uitleggen! Hij probeert het nog eens:
Edwin: "In deze cirkel staan precies twee ware beweringen. Nou, als er precies twee in staan doet die ook mee. En zijn er drie. Ja. Dus daar klopt geen donder van."
Harold: "Deze (e) is niet of wel waar. In ieder geval."
Ik: "Een van de twee, dat ben ik met je eens."

Er volgt gelach. Hier ga ik zelf de mist in. Straks, als we deze paradox analyseren zullen we zien dat precies daar de fout begint!

Geval één wordt nagegaan: er zijn er drie waar. Ze stellen voor in e) "twee" door "drie" te vervangen. Heel creatief, maar ik liet het niet toe ....

Harold: "Ja maar die twee is eigenlijk toch de oorzaak."
Edwin: "We komen er nooit uit. Kunnen we wel een week voor vrij nemen."

Dat deden we niet!
In het groepje van Jeanette, Sabiet, Monique en Astrid wordt de eindeloosheid op voor deze leerlingen typerende wijze uitgedrukt: met behulp van het gum. De discussie gaat bij hun langs soortgelijke wegen en obstakels. Tot:

Jeanette: "Met deze erbij is het toch drie."
Ik: "Is die laatste dan waar?"
Jeanette: "Nee, eigenlijk niet."
Ik: "Hoeveel dan?"
Jeanette: "Twee. Mag ik je gum even?"
Sabiet: "'t Klopt niet ..."
Ik: "Vul je nu twee in?"
Monique: "Ja, maar als je nu leest, twee ware ..."
Ik: "Tel nog eens..."
Monique: "Kijk, want, ... Dit is een valstrik! Want nu staan er wel twee ware beweringen, dan klopt deze ook. Als je 't dan gaat nalezen klopt 't weer niet! Dus kun je gewoon jaren door blijven gaan. Dus je blijft maar gummen. Het is een valstrik!"

Iets later formuleert ze dat nog scherper. In haar enthousiasme vervangt ze "ware beweringen" door een nieuw woord:

> "In deze staan precies twee waringen. En dat klopt, dan zet je het eronder en als je daarna leest klopt het weer niet. Weer wel en dan weer niet. Daarna weer wel en daarna weer niet."

Anders gezegd, als je er over blijft denken springt het van waar naar onwaar en steeds heen en weer. Is er geen waarheid, los van ons denken erover?? Op zeker moment komt Sabiet met een ingenieus voorstel: e) niet meetellen:

> "Kijk, als je dit ook mee gaat tellen, zijn het er weer drie. Maar dit moet je niet meetellen, want dit is niet precies als 2+2; het is een zin of zo."

Haar onderscheid is: je hebt beweringen in cijfers en in woorden. Die mag je niet door elkaar gooien. Het is natuurlijk een vrij willekeurige spelregel en door 2+2=4 enz., door andere evident ware en onware zinnen te vervangen blijft het probleem bestaan. Toch moeten we constateren dat Sabiet de spelregels van de logica zodanig probeert te preciseren, dat de paradox er niet meer is. Ook al loopt haar methode spaak, het blijft een opmerking van hoog niveau: van boven af als het ware kijken wat er fout gaat en daar maatregelen tegen nemen. Tot besluit van de serie gespreksfragmenten nog één redenering "vanuit het ongerijmde".

Edwin: "Nou kijk.. Twee plus twee is vier. Is waar. c) is dan ook waar. En stel je nou voor dat deze (e) ook waar is, maar dan moet hier: 'in deze cirkel staan precies 3 ware beweringen'. D'r staat twee, dus is e) niet waar."

Edwin's bewijs loopt als volgt.

> Te bewijzen: e) is niet waar.
> Bewijs: Stel je voor van wel. Daaruit volgt iets onaannemelijks. Dus is je aanname fout.

Prima! Alleen zaten er nog twee leerlingen bij, die Edwin op de consequenties van "e) is niet waar" drukten .....

Redeneren

In het voorafgaande wordt nogal wat geredeneerd. En waarover eigenlijk? Dat is moeilijk te zeggen: er is niets buiten de zinnen op papier. Er is geen context, het is slechts een heel ijl spel van gesponnen gedachten. Nuttige wiskunde is het zeker niet: er wordt niet eens iets uitgerekend of opgelost.
De problemen blijven. Toch kwamen er spontaan hele ketens op in de bekende stijl: Als dit, ... dan dat, ... maar dit, ... dus toch ... Enz.
Het is verbazingwekkend hoever deze MAVO/LBO-leerlingen het weten te schoppen! Op een paar details van de gebruikte redeneervormen wil ik nog even wijzen. Daar is eerst Edwin met zijn "Stel je voor ..." Hij komt geheel zelfstandig tot die formulering, want ik neem niet aan dat hij het "Dagboek van twee loerders" blz. 106 e.v. (Wiskrant) of Euclides jrg. 57 blz. 333 heeft gelezen, waar uiteen wordt gezet hoe essentieel "Stel je voor ..." voor wiskunde bedrijven is. Moet ik nog uitleggen dat, zo gauw je je losmaakt van het tastbare voorbeeld, je gaat generaliseren, gaat gedachte-spinnen, kortom wiskunde gaat doen, er steeds een "Stel je voor ..." is geweest?
Een samenhangend aspect is "als ..., dan ..." Dat komt ook herhaaldelijk in de gesprekken voor. Het is eigenlijk: leef je in de wereld van "als ..." in. Dat is je nieuwe werkelijkheid. Vertel wat je ziet. Dan ... enz.

Redeneren kan heel star zijn. Steeds maar doordeducerend kom je bij het raar-maar-waar-probleem op ketens als e) is waar, dus is e) niet waar, dus is e) waar, dus is e) niet waar ...
Er ontstaat in de redeneerketen een patroon. Het aardige van ons redeneren is dat we het al redenerende ook van buiten kunnen zien: ook de leerlingen merkten het patroon van de vicieuze cirkel. "Je kunt wel blijven gummen ..." Ook de spelregel van Sabiet is zo'n moment van uit het systeem springen.

Bij de gegeven voorbeelden komen de gedachtenspinnerijen heel goed tot stand. Ik denk dat dat o.a. komt doordat er geen grijpbare context voorhanden is. Bij een vraag als "Hoe meet je de diagonaal van een rechthoekig zwembad?" kun je als verstandig mens altijd nog een touwtje schuin over spannen voor je de wiskundig rijke omweg via Pythagoras en de zijden van het zwembad kiest. Bij de invulsommen en de ware-beweringen-paradox is er zo'n concrete korte weg niet.
We zijn geneigd van onze leerlingen, zeker van deze 13-jarigen, te zeggen dat ze alleen op concreet niveau kunnen redeneren. Het lijkt mee te vallen.
Ik pleit hier niet voor logica-opgaven met p en q, pijltjes en andere esoterische notaties: daarmee zal

het heus wel weer niet lukken. Wel pleit ik voor een paar problemen die abstract en lastig zijn, maar waarbij geen enkele notatiebarrière voorhande is.

Plezier

Gezien het kennelijke plezier dat deze leerlingen hebben met dit soort denkwerk zou je moeten zeggen: ze hebben recht op dit plezierig gebruik van hun hersens. Dit plezier is meer dan plezier alleen: het is het bijna voelbaar functioneren van je brein dat in deze opgaven zo stimulerend werkt. Het gevoel van ongrijpbaarheid, speelse irritatie dat de paradoxen uitstralen: precies dat laat je niet met rust.
Al in de opgave waar 1 en 2 ingevuld kon worden, zien we duidelijk wat er gebeurt. Door het invullen blijk je niet alleen een antwoord te geven, maar blijk je ook het object dat je beschrijft (deze zin bevat één 2) te beïnvloeden. Het verspringen van betekenis naar objectniveau geeft een bijna hoorbaar vonkje in de schedel.
Ook bij de vijf-beweringen-som verspringt de vonk van de betekenis van e) naar e) als te tellen object. Maar deze vonk blijft doorknetteren!

Een uitweg uit de paradox

Je kunt het probleem van "raar-maar-waar?" samenvatten in: als e) waar is, is e) niet waar.
Of heel kort:

Deze bewering is niet waar.

Met behulp van de door onze brugklassers aangedragen ideeën kunnen we er wel achter komen wat het eigenlijke mankement in dit stukje taal is.
Daar is eerst Helma: "Hoe kun je dan kijken of het goed is?" Laten we afspreken: door eerst te kijken wat de zin in het kader betekent.
Het gaat hier over een bewering die over "deze bewering" gaat. Laten we daarmee eerst wat oefenen. Hier is een andere bewering, noem hem C, waarvan u weet of ie waar is en ik nog niet, om het sportief te houden.

C: Lubbers is minister-president.

Nu kunt u ook nagaan of B waar is:

B: Bewering C is niet waar.

En zelfs over A kunt u iets zeggen:

A: Bewering B is niet waar.

Door de toevoegingen "Bewering ... is niet waar" klapt de waarheidswaarde als het ware om.
We kunnen A ook volledig uitschrijven:

A: BEWERING B, NAMELIJK
  B: "bewering C, namelijk
    C: 'Lubbers is minister-president'
  is niet waar,"
IS NIET WAAR.

Omgekeerd gezien: Je kunt pas over A iets zeggen als je het citaat waar A naar verwijst (dat is dus B) invoegt.
En dan: over B pas, als je het citaat waar B naar verwijst, (dat is dus C) opzoekt. Bij C ben je klaar, u tenminste, want u weet dat Lubbers het geworden is. Van C terug naar B en dan naar A geeft dus: A is ....
Nu hebben we voldoende ervaring met de procedure "Voledig Citeren!"
Nu roepen we Jacqueline te hulp voor de doorgronding van de bewering in het hokje. "Deze of die." Deze, het geval in het hokje zelf: Deze bewering gaat over deze bewering. We passen de eerste trap van onze procedure "Volledig Citeren!" toe.

A: DEZE BEWERING, NAMELIJK
  B: "Deze bewering is niet waar."
IS NIET WAAR

We moeten éérst nagaan of B waar is, weer door "Volledig Citeren!" toe te passen. Er ontstaat – u ziet natuurlijk de lawine al komen –:

A_1: DEZE BEWERING, NAMELIJK
  A_2: Deze bewering, namelijk
    A_3: Deze bewering, namelijk
      A_4: Deze bewering, namelijk
        A_5: Deze bewering, namelijk
          A_6: Deze bewering, namelijk
            ....
            ....
            ....
          is niet waar
        is niet waar
      is niet waar
    is niet waar
  is niet waar
IS NIET WAAR

En onder in die bodemloze put zou waarheid of onwaarheid moeten liggen. Maar de bodem van deze put is er niet: er is geen waar of onwaar. De bewering is niet toetsbaar gebleken.
Er komt nog bij dat we steeds A_1 met A_2 identificeren: ze zijn toch hetzelfde! Men (o.a. Russell) heeft in het begin van deze eeuw geprobeerd dergelijke zaken als deze paradox te voorkomen, door als spelregel op te nemen dat beweringen niet over zichzelf mogen gaan. Dat is een maatregel à la Sabiet. Het helpt, maar het sluit ook zinnen uit als: "Deze zin bestaat uit vijf woorden." Daarbij is geen vuiltje aan de lucht. Het is met gewoon tellen na te gaan: niet waar. Het is net zo correct als: "Dit is de laatste zin van dit artikel."