Hoe lang is de termijn?

W.M.G. Querelle
K.S.G. Lunetten, Utrecht.

Summary

Teaching students of the lower type of secondary education generalisations can be a hard thing. Trying it at any price can produce knowledge accepted from others and them memorised. This is not meaningful. Selfreliance is a more important thing to be taught than know-how.

In het aprilnummer van Euclides staat een artikel over Cito-toetsen bij lange-termijndoelen van H. Boertien. Hoewel ik vind dat de voorbeeldtoetsen gewoon kennistoetsen zijn en verder helemaal niets, wil ik het daar niet over hebben. Door dat artikel werd ik me bewust, dat de termijndoelen, die ik op het oog heb veel verder liggen dan die o.a. J. van Dormolen aangeeft in de voorbeelden in zijn boek 'Didaktiek van de wiskunde' zie tweede druk, blz. 35.

Voorbeelden van lange-termijndoelen.
Definities kennen.
Onderscheid kunnen maken tussen figuren.
Samenhang tussen begrippen kunnen noemen.
Een nieuwe toepassing van een begrip of een stelling kunnen vinden.
Een begrip of een eigenschap in een andere terminologie kunnen formuleren.

Wil ik deze doelen bereiken? Zo langzamerhand begin ik te denken, misschien niet. Ze zijn in de praktijk nogal eens strijdig met mijn langste termijndoel, de wiskundige weerbaarheid. Ook krijg ik het gevoel dat het voor een groot deel van mijn leerlingen onbereikbare doelen zijn.
Laat ik een paar voorbeelden geven.

In 3 Mavo is de opgave:
Teken de lijn m door de punten A(3,0) en B(3,4). Neem m als spiegelas.

$O(0,0) \rightarrow$	$R(7,9) \rightarrow$	$U(3,k) \rightarrow$
$P(0,2) \rightarrow$	$S(3,-6) \rightarrow$	$V(2,k) \rightarrow$
$Q(7,-5) \rightarrow$	$T(-1,1) \rightarrow$	$W(x,y) \rightarrow$

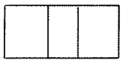
De hele opdracht is te maken op het punt W na.
De nabespreking gaat zo ongeveer als volgt:
"Vergelijk al die vragen eens met hun antwoorden."
(Ja, ik weet dat ik een verkeerde woordkeus heb, maar dit begrijpen ze tenminste meteen).
"De achterste blijft hetzelfde."
"Goed, en nu de voorste; is daar ook wat mee?"
Na enig zoeken komt er één op: "Samen zes."
"Ja."
Verbazing links en rechts en dan na controle, goh ja, wat een idee.
Na wat praten en dubbelvouwen verbeeld ik me dat er een paar zijn die iets begrijpen van het waarom.
"Hoe vind je de nieuwe x?". "Door te zorgen dat het samen 6 is." Vlot kunnen ze nu bij ieder getallenpaar het beeldpaar vinden, maar ze tellen door tot 6, dus $2+ \ldots = 6$; $87 - \ldots = 6$. Naar believen maken ze optel- en aftreksommen en de vraag "Wat doe je dus steeds?" levert alleen maar bovenstaand antwoord op en nooit $x_1 = 6 - x$. En dan vraag ik me af, waarom wil ik dat dan ook? De generalisatie $x_1 = 6 - x$ komt te vroeg. Ze kunnen constateren, dat het antwoordenboek 'ook' gelijk heeft, maar ze zien het niet als algemener dan hun antwoord. Wanneer ze over een poosje een dergelijke opgave tegenkomen, zullen ze weer door tekenen en zoeken aan het goede antwoord komen. En ik moet daarmee tevreden zijn, denk ik.

Voorbeeld II
Het verhaal van H. Boertien begint met:

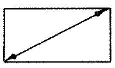
In een rechthoekige kamer van 3 meter bij 2 meter wil men een rechthoekige tafel plaatsen die 1 me-

ter breed is. De tafel moet in de kamer geheel rond gedraaid kunnen worden waarbij het tafelblad horizontaal blijft. Wat is de grootst mogelijke lengte van deze tafel?

Het lange termijndoel dat men hiermee beoogt te toetsen is, kunnen leerlingen zelf ontdekken dat de diagonaal van de rechthoek twee moet zijn en dat je Pythagoras nodig hebt om de lengte van de tafel te berekenen. Accoord. Maar, dat doen de mijnen niet! Dat bedacht ik al lezend en omdat je als leraar graag weet dat je gelijk hebt, geef ik de opdracht aan het begin van een les.
Welke oplossingen komen er dan?
Iedere groep tekent uiteraard de rechthoek van 3 bij 2. Dan komt:

a. een losse reep van 1 breed en 2 lang en net zo lang stukjes eraf knippen tot 'het gaat.' 
b. een te kleine tafel knippen en iedere keer een nieuwe knippen tot het past, komt ook voor.
c.  en hierin een rechthoek van 1 breed tekenen
d. op een overtrekblaadje een tafel tekenen, draaien, gommen enz. tot het lukt.
e. "Juf, waarom neemt u niet twee losse tafels, dan kunt u veel langer."
f. "Aan een ronde tafel kunnen veel meer mensen."

"Ja? Bekijk dat eens." En de groep houdt daarbij wel degelijk rekening met een halve meter uit de muur blijven, anders kun je niet zitten.

 Dat de tafel 'overzo' 2 meter moet zijn, wordt door ongeveer de helft van de leerlingen onder woorden gebracht, maar woorden rechthoek en diagonaal hoor ik niet.
Eerlijkheidshalve dient gezegd; er waren twee van de twaalf groepen, die bedachten dat je het met Pythagoras kunt uitrekenen. En natuurlijk ben je aangenaam verrast, als je dat ziet gebeuren. De overige volstaan met tekenen en meten. Ben ik daar rouwig om? Nee, ik ben geneigd te zeggen integendeel. De leerlingen hebben het gevoel dat wat ze doen, te maken heeft met de werkelijkheid. En als ik zie dat iedereen na mijn verhaal over de tafel iets begint en ook nog tot een aanvaardbare oplossing komt, ben ik dik tevreden. De houding: "Dat zal ik eens even uitzoeken", en niet: "Nou, hoor, 'k wee nie", maakt het werken met ze feestelijk. Ik zou denk ik gefrustreerd raken, als ik ze wel allemaal de wiskundige oplossing zag zoeken maar niet vinden. 'Het herkennen van de mogelijkheid om Pythagoras te gebruiken,' wordt muggenzifterij als je verder denkt dan het schoolleven van deze leerlingen. De termijn die ik in het oog moet houden is veel langer. Daarom heb ik het gevoel dat ik die aangegeven lange termijndoelen vaak moet vergeten om tenminste iets van mijn langste termijndoel te bereiken. Het eerste blijkt in de praktijk nogal eens strijdig met het tweede.
25% van alle mavo-leerlingen en nog geen 13% van de lbo-ers is in staat een voldoende voor wiskunde te halen op het examen. Is het eigenlijk niet schandalig? En dat is al jaren zo. Komt dat niet mede doordat ze vooral getoetst worden op dat korte baanwerk? Kennis, bruikbaar of niet.
En dan vooral muggenziften (zie commentaar uit de verslagen lbo/mavo examens):

$\{ x \in \mathbb{N} \mid 3x + 3 = -3x - 3 \} =$

$\underline{22}$ *A* ϕ
27 *B* $\{0\}$
10 *C* $\{1\}$
41 *D* $\{-1\}$

Bij dit item wordt door ruim 40% (bij het LMO zelfs ruim 50%) de $\mathbb{N}$ *in de stam waarschijnlijk wel gelezen, maar er worden geen consequenties aan verbonden. Kennelijk zijn deze kandidaten alleen maar gespitst op een stukje oplossingstechniek.*

$U = \{(x,y) \mid 3x > 12\}.$
(1) $\{5, 6, 7\} \subset U.$
(2) $\{(5, 1), (6, 2), (7, 3)\} \subset U.$

31	A	*(1) en (2) zijn beide waar*
48	B	*(1) is waar en (2) is niet waar*
$\underline{11}$*	C	*(1) is niet waar en (2) is waar*
10	D	*(1) en (2) zijn beide niet waar*

Het is verdrietig te moeten constateren dat een dergelijk item zo slecht wordt gemaakt. De meest voorkomende fout is waarschijnlijk dat men vindt dat de soort oplossingsverzameling van een ongelijkheid bepaald wordt door het aantal (zichtbare) variabelen in die ongelijkheid. De leerlingen vinden de notatievorm $\{(x,y) \mid \ldots\}$ *waarschijnlijk een onnodige verfraaiing van datgene wat op de open plaats ingevuld kan worden.*

Bij dit soort opgaven denk ik aan de reclamespot: Alles wat je bewaart is de verpakking!
Dergelijke subtiliteiten zullen ze nooit beheersen. En ik kan me er echt niet druk over maken. Dit is prutsen en ik wil ze echt laten denken.
Het eerste jaar gaat dat dankzij de IOWO-materialen zonder problemen. Omdat ze in het begin in een wiskundig niemandsland ronddartelen, valt er van alles te bedenken zonder wiskundige voorkennis.
De rapportcijfers berusten voor 80% op houding, inzet, inventiviteit en dat soort dingen en zijn dan ook praktisch altijd voldoende. Ook het tweede jaar wordt voor een groot deel met dit soort werk gevuld. En met al die gekheid doen ze in die tijd 'en passant' aardig wat bruikbare wiskunde op. In de derde kan en mag iedereen wiskunde kiezen. In dat jaar begin ik de 'korte lange termijndoelen' wat meer in de gaten te houden. Dan wordt er nogal eens kennis bijgebracht, die voor hen als overbodige ballast werkt. Die ballast aanleren gaat dan vaak wel op een relativerende toon, moet ik schuldbewust toegeven, maar dat schept ook een zekere welwillende sfeer, waarin ze bereid zijn zich mee te wringen door de bochten, die ze niet als relevant kunnen zien.

Een voorbeeld hiervan uit 3-mavo:

10a. Is in figuur 10.4a $\triangle EDC$ gelijkvormig met de grote driehoek?
Verklaar je antwoord.
b. In die figuur is $AB = 5$, $AC = 12$ en $CD = 8$. Bereken CE.

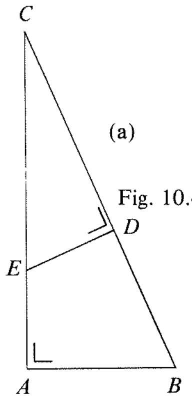


Fig. 10.4a

Meerdere leerlingen lossen probleem b op met behulp van tan γ. Opgave a en b worden los van elkaar gezien.

Yvonne: "CE $\approx$ 8,6. Ik heb op schaal getekend en gemeten.
Ik: "Maar er staat *bereken*." Zij: "Nou ik heb gerekend, want ik heb alles door twee gedeeld."
Ik zeg dan dat ze gelijk heeft, dat het handig gevonden is, maar .... en welwillend hoort ze toe als ik haar duidelijk maak wat de eigenlijke bedoeling was van de opgavenmaker. Sommige Yvonnes zien in, dat tekenen en meten geen echt juiste oplossing is, maar er blijven er ook altijd een paar, die zeggen: "Nou, ik had toch ook 8,6!" Kent u die ook?
Dan slinger ik heen en weer tussen mijn lange- en langste-termijndoel. En ik denk dat een oplossing willen zoeken misschien toch wel het voornaamste doel van het wiskunde-onderwijs in mavo/lbo is.
Een kennisje vraagt tijdens een bezoek ineens: "Zeg, hoe reken je de omtrek van een cirkel uit?" Ik geef het antwoord, maar wil natuurlijk weten waar ze dat in vredesnaam voor nodig heeft. "Oh, op de batikcursus zouden we vorige week een rond doosje beplakken met zelf gefabriceerde batikstof. Nou, daar zaten er een paar zo moeilijk te doen en te rekenen met de omtrek van een cirkel. Ik wist niet hoe dat moest, ik heb gewoon de centimeter erom gelegd."

*) Als u iets wilt lezen over de wiskundige houding zie het artikel van Nol van 't Riet en Bert Zwaneveld. Euclides nr. 9 '81/'82.