Eindeloos geduld, voor minder dan *f* 500,–

A.J. Goddijn
OW & OC, R.U. Utrecht

Summary

Infinite patience for less than 500 guilders.
A pocket computer is used for the game of "Guess-my-Rule". The numbers fed into the machine are manipulated according to a set rule. Then the computer gives a number to which the answer must be predicted. The rule is noted down. Students tend to use many words for this. An efficient means of notation for the rule is reached by the laying of cards. $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, ..., $\boxed{+}$, $\boxed{-}$, $\boxed{\times}$, $\boxed{/}$, $\boxed{\text{your number}}$.
Substitute N *for your number and the rule can be fed directly into the computer. This provides a natural introduction to algebra by which students are soon able to deal with simple reasoning with variables.*

Femmy, Elise, Judith en Henk zijn brugklassers van "Lunetten". Het hele jaar is met IOWO-pakketten gewerkt zodat ze de echte wiskunde, het letterrekenen, hebben ontlopen. We leggen ze een "rekenmachine" voor waar ook lettertoetsen op zitten. Wat je intoetst verschijnt op het schermpje, tot 24 symbolen naast elkaar. Op vrijwel ware grootte:

We geven ze twee exemplaren en vier werkbladen. Na introductie-opgaven ter verkenning wordt gevraagd $\boxed{\text{SHFT}}$ $\boxed{\text{A}}$ in te drukken. Dan wordt deze zakcomputer – want dat is dit natuurlijk – wat actiever. Uitlatingen van de z.c. schrijven we na een pijltje (→) met hoofdletters. Meer z.c.-regels na elkaar dus met meer pijltjes.
Henk drukt in $\boxed{\text{SHFT}}$ $\boxed{\text{A}}$.
→ HALLO ....
→ HOE HEET JE?

Een natuurlijke reactie volgt.
Henk: H E N K. 't Is even zoeken naar de toetsen, maar het lukt. In het scherm staat nu:
HOE HEET JE? HENK –
Bij de vooroefeningen is geleerd dat je de z.c. pas aan de slag krijgt met $\boxed{\text{ENTER}}$.
Die toets wordt dus ingedrukt. (In de verdere beschrijving laat ik dat vaak onvermeld).
→ DAG HENK!
→ DE KLEUR VAN JE OGEN IS –

Hilariteit. Na "BLAUW" klinken er vijf piepjes en er verschijnt:

→ BLAUW? DAT IS TE GEK!

Nog eens vijf keer piep en dan:

→ BLAUWOGIGE HENK,
→ WE DOEN HET
→ RAAD – MIJN – REGEL – SPEL

Na ENTER verschijnt:

→ DE EERSTE IS
→ BEREMAKKELIJK.

Wie nog nooit met zo'n pratend doosje heeft gewerkt, wordt nu overgemotiveerd en dat betekent dat ik Judith, die alleen het schermpje ziet moet helpen het toetsenbord althans gedeeltelijk te veroveren.

Judith: "Moet ik die doen?" (Wijst op ENTER)
Ik: "Ja, dan gaat 't verder."
J: ENTER

→ GEEF EEN GETAL –

Judith toetst 14 in.

→ DE BEER BROMT
→ 14 – – > > 21

Na ENTER komt er weer:

→ GEEF EEN GETAL –

En er gaat 16 in.

→ DE BEER BROMT
→ 16 – – > > 23

Er wordt vastgesteld: zeven erbij.

Na een derde getal en bere-antwoord verschijnt een vraag.

→ WEET JE DE REGEL? –

Judith zegt tegen mij "ja" en toetst dat (waar zit de J?) in.

Dan geeft de machine een getal en moet het antwoord van de beer voorspeld worden. In dit geval lukt dat tweemaal achter elkaar.

→ PRIMA
→ WEES NU ZO SLIM ALS DE SLANG.

Dezelfde procedure als zoeven volgt. Na een poosje is ontdekt wat de slang doet.

9 → 18, 8 → 16, 7 → 14. Dat kan op verschillende manieren worden beschreven: dubbel doen, een keer erbij, enz.

Andere groepjes lieten we ook lastiger regels ontdekken, daarover straks meer. Na de beer en de slang verschijnt:

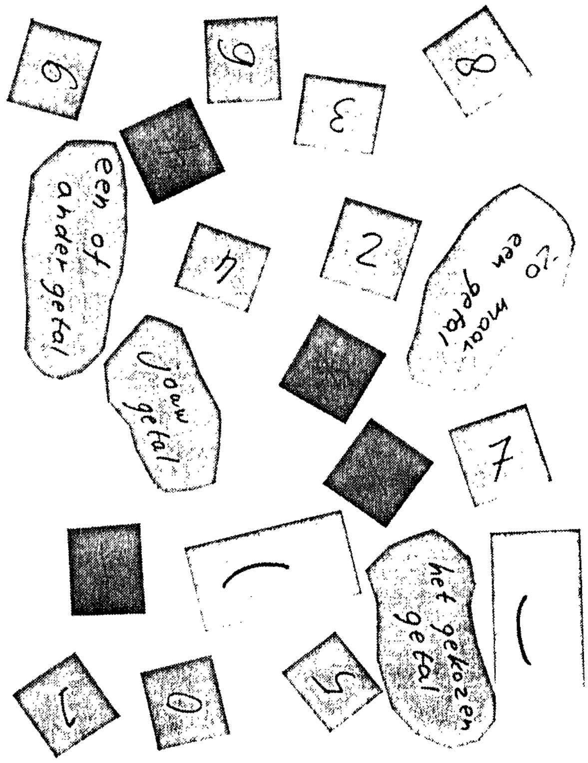
→ NU TERUG NAAR NR. 7.

Dat is weer op het werkblad. Zo is dat door Judith ingevuld:

> 7. Vul in: 14 >> 21   16 > 23   7 > 14   15 > 22   5 > 12   6 > 13
>
> De REGEL van de BEER was:
>
> dat er steeds 7 by kwam
>
> De REGEL van de SLANG was: 9 > 18   8 > 16   7 > 14
>
> hy gaat steeds 2keer

Even aansluiten bij het artikel in de vorige krant: het is duidelijk dat ze de structuur doorheeft. Maar de notatie van de regels is niet goed bruikbaar voor de traditionele algebra.

Als tussenstap voor een notatie die deze z.c. ook kan begrijpen moeten de regels met kaartjes uit een enveloppe gelegd worden.



Kortom: de cijfers, bewerkingstekens en enkele kaartjes met "jouw getal", "zomaar een getal", "het gekozen getal". o.i.d.

Opgave 8 van het werkblad, ingevuld door Henk:

> 8 Met de kaartjes uit de enveloppe kun je ook
> de regels leggen.
> Zo leg je de kaartjes voor de beer:
> Jouw getal +7.
>
> Zo voor de slang:
> Jouw getal *2
> Zomaar een getal + het gekozen getal.

De slangeregel was voor Henk niet "2 keer het getal" maar "dat er steeds hetzelfde getal bij komt". Hij legde ook eerst

14 + 7

voor de regel van de beer. Als ik vraag "maar als er nu 16 ingaat?" dan protesteert hij met: "ik deed 14!" Na even pakt hij dan het grillig gevormde (jouw getal) -kaartje.

In de volgende opgaven wordt een gegeven regel met kaartjes gelegd. Dan moet voor (jouw getal) 5 of 1021 worden genomen. Dat kun je ook intoetsen: ze doen dat onmiddellijk, maar wel met steeds kijken naar de gelegde kaartjes.

1021 ★ 3 – 7

Dat blijft zichtbaar in het schermpje. Na ENTER :

→ 3056

Zoals te zien is heeft Henk het toch maar even gecontroleerd, overigens 1023 als tien-drie-en-twintig uitsprekend.

```
9   De olifant heeft deze regel:
    Drie keer je getal en zeven eraf.   jouw getal x 3 - 7
    Leg dat met de kaartjes.....
    De olifant toetert7    5     ——>> 8...
    De olifant toetert4  1021    ——>> 3056
                         3063
10  Dat laatste kun je weer met de rekenmachine doen.
    Toets de regel van de olifant in. Met 1021 in
    plaats van 'jouw getal
11  Je mag ook afkorten: G voor 'jouw getal'.
    De regel van de olifant is dan:
    G x 3 - 7
    Wat komt eruit als G nu 4 is?   4x3-7 .
```

(Let trouwens even op de subtiele volgordeverandering van "Drie keer jouw getal" naar (jouw getal) × 3).

Natuurlijk zou dit alles erg nutteloos en flauw zijn als we nu niet de G-toets van de z.c. gaan gebruiken. Daarbij zal de kracht van deze rekenmachine blijken. Als de z.c. weet wat jij met G bedoelt, geeft hij goed antwoord als je naar G ★ 3 + 7 vraagt.

Als voorbeeld twee opgaven:

```
12  Zo zeg je tegen de rekemachine dat je
    met G het getal 25 bedoelt:

    [G][=][2][5]  [ENTER]

    Toets dat in.
    En nu: 3 * G - 7    ENTER  68
    Klopt het?
13  Toets in:

    A = 142857    ENTER

        En. nu:
          2 x A   285714
          3 x A   428571
          4 x A   571428
          5 x A   714285
          6 x A   857142
          7 x A   999999
```

Halverwege vraag ik of 4 × 142857 ook mag. Jawel, dat mag. Maar dat duurt veel langer want "dan moet je zes letters inslaan".

Laat ik het nu onderhand maar toegeven: ik probeer hier letterrekenen te onderwijzen.

Het is maar een experiment, geen leerprogramma, al leren deze leerlingen gaandeweg heel wat met plezier. Een bredere uitwerking moet ontwikkeld worden om effecten op langere termijn te zien, maar toch wil ik proberen of deze letter als naam voor een getal dat je zomaar mag nemen ook in kleine redeneringen kan worden gebruikt.

Let op de laatste vraag van opgave 14!

```
14  Toets in:  H = 11    ENTER 11
               K = 19    ENTER 19
    En dan: (steeds met ENTER):
    a) H + K  E  30
    b) K - H  E  8
    c) 2 * K - H  E  27
    d) K/H  E  1,727272727 .
    e) K * H  E  209
    f) 2 * H - K  E  3
    g) H + K - H  E  19.
```

Er is een lichte verbazing als er 19 uitkomt.

We doen het ook na H = 12345678; weet je dat zonder rekenmachine? Dat is lastig. Het wordt toch maar ingetoetst. Verdraaid, weer 19.

Dan lijkt er een vonkje over te springen: "Die gaat er ook weer af".

Ik vraag naar 3 ★ H – 2 ★ H en krijg zonder toetsen of rekenen een juist antwoord!

De laatste opgave spreekt voor zich.

```
15  Hier staan gewone sommen. ~~Maar~~ gebruik
    letters om ze uit te rekenen.
    Begin met A = 789.                  A 789
      789 * 263 A*R 207507              R 263
      789 / 263 A/R 3                   H 1015
      263 + 1015
      1015 - 789
      (1015 * 789) - (263 * 1015)
      263 + 789
      ----------
      1015 + 263
      (263 + (789 * 1015))

    A x R  207507
    A/R  3
    A+H  1278
    H-A  226
    (H*A)-(R*H)= 533890.
    R+A=
    H+R=      /. 8,231611894E-01
    R+AxH = 801098.
```

Even een terugblik op het gebeurde.
Er is een kennismakingsfase: op deze machine kun je rekenen én typen.
Je moest regels raden. Eerst antwoorden voorspellen, daarna de regel opschrijven. Met behulp van de kaartjes worden de regels wat preciezer en compacter geformuleerd.
Door voor het kaartje (zo maar een getal) weer een getal te schrijven, kun je de regel intoetsen.
Als je i.p.v. dat kaartje "G" intoetst, kan dat ook, maar dan moet je b.v. G = 25 $\boxed{\text{ENTER}}$ intoetsen als je bedoelt dat je getal 25 is. Andere letters mag je ook gebruiken.

Open plaatsen

In de geschetste aanpak staat in

G ★ 3 − 7

de letter G voor een getal. Voor dat getal kun je van alles nemen. Bijv. 8. Of 1021. Dan komt er uit G★3 − 7 ook iets anders.
De G is als het ware een gat in de formule waarin een getal moet. Het is een open plaats.
In dit geval moet je vóóraf zeggen wat G is, en dan pas G ★ 3 − 7 vragen. In de opgave met A = 142857 en 2 ★ A, 3★ A enz., is dat ook zo. Het lijkt wel of de letter een vaste waarde heeft, terwijl de formule varieert. Steeds wordt in het "gat", de A, het getal geschoven.
Bij H + K − H was gauw duidelijk dat er "voor alle H" iets bijzonders was. Dus functioneert de andere kant van de medaille (de formule H + K − H houden we vast, H is steeds iets anders) óók.
De binding van H aan de waarde 8 of 11 of 12345678 had een tijdelijk karakter. Het gevaar dat H een naam voor een vast getal zou worden, blijkt niet aanwezig!
In de binding van H, tijdelijk aan steeds één getal ligt nog een klein didaktisch voordeel ook. Let eens op de reacties op 3 ★ H − 2 ★ H.
Daar werd (na H = 11 of 12345678) onmiddellijk zonder rekenen "11" of "12345678" voorspeld. En niet "H". Dat mag nadelig lijken, maar er is in ieder geval niet geredeneerd als met chocoladeletters: drie H's min twee H's is één H; alsof de letter een object op zich is. H staat hier voor een aanwezig getal, dat natuurlijk van alles mag zijn.
Als we willen voorkomen dat algebra verwordt tot het volgens bepaalde regels manipuleren van lettergetal-combinaties, dan is dit in zo'n introductie een belangrijk voordeel.
Toch is de open-plaats-benadering van de variabelen een beperkte toegang tot de algebra.
Voor ik dat toelicht moet ik eerst nader ingaan op de strategieën die kinderen gebruiken om de te raden regels te vinden.

Regels vinden 1: optellen voorop

In het verslag kwamen twee functies (de regels van de beer en de slang) voor: $x \to x + 7$ en $x \to 2x$.
Bij $x \to x + 7$ schrijven alle leerlingen iets als "er komt 7 bij".
Bij $x \to 2x$ zijn er twee verschillende beschrijvingen.
Optellend:

dat er steeds het zelfde getal bij komt.

en (alleen Judith) vermenigvuldigend:

hij gaat steeds 2keer.

Een ander groepje zocht naar het geheim achter de regel van de tor:

16 → 33
8 → 17
10 → 21

Op een bepaald moment stond er op Nico's blaadje:

$25 \xrightarrow{26} 51$
$13 \xrightarrow{14} 27$
$26 \xrightarrow{27} 53$
$50 \xrightarrow{51} 101$
Hij doet 1 meer dan ~~dat~~ het 1e getal dat je indrukt b.v. 26 wordt 27. enz..

Hans en Etienne ontdekten dat de krab nogal vreemd deed:

25 → 75 (50 erbij)
13 → 87 (74 erbij)
22 → 78 (56 erbij)

Van meet af aan werd naar optellen gezocht. Ze gingen zelfs zo ver dat ze de 74 door aftrekken van 87 vonden. Dat het hele patroon op de aftrekking 100 − jouw getal berustte werd niet gezien, maar uiteindelijk werd geformuleerd:

"hij doet alles tot 100".

Bij "23" wordt gezegd: hij doet er 77 bij. De formulering is niet juist, want de krab geeft niet 100 als antwoord. Toch lossen Hans en Etienne de testvragen − Wat doet hij met 34? − goed op!
Kijken wat er bijgeteld is, dat is de eerste strategie − en eigenlijk de enige − die hier gebruikt is.

Regels vinden 2: vertikaal of horizontaal

Een bijzondere vorm van de bijtelstrategie ontstaat als je de regel
$1 \rightarrow 3$
in zijn geheel met
$2 \rightarrow 5$
vergelijkt.
Als na zoeken en tamelijk willekeurig proberen ook nog verband met
$3 \rightarrow 7$
wordt gelegd, komt het tot de uitspraak:
"steeds 2 meer"
Dat wordt getest met
$15 \rightarrow 31$
en
$16 \rightarrow 33$
Ja hoor, twee meer!
Deze leerlingen zochten niet direct naar de horizontale pijl, maar naar de vertikale pijlen:

15 31
↓ ..... ↓
16 33

Ik vraag dan: hoe gaat dat nou met hele grote getallen? Dan duurt het wel lang voor het klaar is.
"Wel nee, zo'n ding kan alles."
Als we even snel de uitkomst te zien krijgen bij een getal van tien cijfers, wordt er wèl gezegd: hij heeft vast een trucje. En dat was het moment waarop van vertikaal naar horizontaal zoeken werd overgestapt.
Maar wel met: "wij hadden het toch ook goed hè?"
Het hier beschreven vertikale zoekgedrag sla ik nu hoger aan dan ik bij het observeren deed.
Wat deze leerlingen doen is eigenlijk:

kijken wat er met y gebeurt als je x variëert.

Dat is een totaal andere opvatting van "variabele" dan de open-plaats-interpretatie. Eigenlijk is het een heel natuurlijke opvatting. Variabelen dienen te variëren. Je kijkt hoe de functiewaarde verandert als je x verandert.
Wat gebeurt er als je de prijzen verlaagt?
Wat gebeurt er als het warmer wordt?
Wat gebeurt er met het rendement als je harder rijdt?
Enzovoort, enzovoort. In elk van die vragen zit de dynamische variabele verborgen.

Nog eens: open plaats of dynamiek

De in het begin van dit artikel beschreven opzet bouwt het open-plaats-begrip op. Het is een nogal gestuurde opbouw, mede veroorzaakt door de z.c.
De open-plaats-interpretatie laat uitspraken toe van een globaal karakter:
Wat je ook voor H neemt, uit H + K − H komt steeds 19. (Aangenomen dat "K = 19, ENTER" is ingetoetst.)
De dynamische interpretatie is veel geschikter voor beschrijven van veranderingen:
"Als H stijgt, stijgt 2 ★ H + 1 harder".
Variabelen hebben altijd die Januskop. We moeten de leerling beide gezichten laten zien.
De beschreven opzet kan uitgebreid worden met bijvoorbeeld grafieken maken van de bere-regel, de slange-regel. Dan treedt het variëer-aspect meer in het oog. Dan is er ook verband tussen de twee zienswijzen.
Kijk je naar de grafiek als puntenverzameling dan zie je: bij dèze x die y.
Kijk je naar de helling van de lijn, dan zie je: als x oploopt, loopt y ook op, maar bijv. twee keer zo snel.
Vat deze subtiele verschillen in blikrichting niet te licht op. Ze komen op veel plaatsen in de wiskunde voor. Een voorbeeld.
Voor elk natuurlijk getal n geldt:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Met volledige inductie zult u dat wel kunnen bewijzen. Dat is een stap-voor-stap methode. Vertikaal als het ware, in de boven beschreven zin. Lokaal, stuk voor stuk.
Een direct bewijs, dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ tegelijk werkt, een globale methode, is heel wat lastiger te vinden!
Of neem de rij 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Elk getal is de som van zijn twee voorgangers. Weer een "plaatselijke definitie". Weet u een formule te vinden voor het n^{de} getal? Het kan, maar het valt niet mee!
En hoe reken je 2^n uit? Je komt tegen: 1, 2, 4, 8, ... enz. Tot 2^{n-1}, en dan 2^n. Steeds uit de vorige één verder gaan. Is er geen directe manier? Nee, hier liggen de zienswijzen tegen elkaar aan!
Genoeg afleiding. Terug naar de zakcomputer, nu niet vanwege de variabelen, maar vanwege het apparaat zelf en de reacties van de leerlingen.

Eindeloos geduld voor minder dan *f* 500,–

De gebruikte machine is 175 × 70 × 15 mm groot. Met het stevige plastic doosje valt hij in de boekentas nauwelijks op.
De grootte van het programmageheugen is natuurlijk klein vergeleken met dat van een microcomputer.
Maar nu stuiten we op een belangrijk punt: het programma dat we gebruiken is erg klein, simpel en vraagt praktisch geen programmeer-kennis. Toch is er voor leerlingen heel wat activiteit mee mogelijk!
Ik leg hier even de nadruk op omdat er in het algemeen bij computer-gestuurd onderwijs nogal omvangrijke apparatuur en machines nodig is.
In dit geval is de z.c. slechts een hulpmiddel naast het werkblad. De z.c. neemt niet de docentenrol over.
Het raad-mijn-regel-spel is in principe ook door een tweetal leerlingen te spelen, waarbij de een de regel kent en de ander zoekt.
Een belangrijk verschil ligt in het geduld, dat bij de z.c. in het algemeen groter is dan dat van de gemiddelde medeleerling. Dat geeft een eindeloze tijd voor zelfstandig zoeken en proberen.
Een ander voordeel van de z.c. is: hier is eindelijk iets dat wèl 2 ★ x − 3 begrijpt en juist niet: doe-twee-keer-en-dan-drie-eraf. De notatie is onmiddellijk functioneel, terwijl in de traditionele benadering het voor de leerling altijd maar de vraag blijft of x en y ooit ècht gebruikt worden.
De motivatie die in het begin (zie het verhaal) van het doosje uitstraalt, zal wel een voorbijgaande zaak zijn. In het jaar 2000 is het nieuwe er waarschijnlijk voor iedereen af, maar vóór die tijd hebben we nog enthousiaste brugklassers om mee te zoeken naar een betere algebra-opzet. Want daar draaide het toch eigenlijk om!