# De huizermaat

## Een harmonieleer voor Wiskunde en Samenwerken

**A.J. Goddijn**
**G. Schoemaker**

OW & OC, R.U. Utrecht

*Summary*

*Visits to a comprehensive school in the making.*
*We describe the collaborative work of groups of students and talks with teachers.*
*We bring out two aspects of these observations:*
*Collaboration: Manifest itself by a tremendous number of details. Many students do not recognise these details as intrinsic to the process of collaboration. High demands are made upon the students when it comes to collaboration.*
*Doing maths: Mathematics education is frequently involved with details and parts of the whole. The teacher is able to draw a connection between these but the student is not.*
*The demands made upon students are mathematically speaking quite low. The student is rarely required to exchange his or her telephoto lens for a wide-angle on vice-versa.*

In één van de gangen van de middenschool in Huizen hangt dit affiche:


Voor de bevolking van het vissersdorp Huizen van 50 jaar geleden was de afsluitdijk een regelrechte verwurging.

De vissers van toen zitten in het bejaardentehuis 'voor anker'.

De gemeente Huizen bouwt op de Huizermeent nieuwe wijken op het oude gemeenschappelijke land, tegenover Almere aan de overkant van het Gooimeer waar steden verrijzen op nieuw land van de gemeenschap dat ontgonnen is in de periode 50 jaar afsluitdijk.
In het leerlingenmateriaal is hier en daar iets terug te vinden van het Huizen van toen.

In het boekje 'tellen' voor de brugklas staat de volgende opdracht:


Wiskundeleraar en maker van het boekje Harm Udding, vertelt erbij dat sommige leerlingen de namen herkennen als typisch Huizens.
De meeste leerlingen zien dat niet. Ze zijn bewoners van nieuwe wijken op de voormalige meent waar namen als Kos, Rebel, Schaap en Westland niet veelvuldiger voorkomen dan elders in Nederland.
De naam van het gebouw 'Drie in één' herinnert aan het vroegere gemeenschappelijke gebruik van deze gronden.
In het splinternieuwe gebouw zijn ondergebracht de scholengemeenschap voor Mavo/Havo/Atheneum Huizermaat en de gemeenschapsvoorzieningen openbare bibliotheek en theater.



Bij de bouw is uitgegaan van gemeenschappelijk gebruik van ruimten. Bij een van onze bezoeken is een theaterzaal in gebruik voor het schriftelijk eindexamen.

De naam van de scholengemeenschap verraadt geen voornemens om te komen tot een middenschool of plannen voor verlengd basisonderwijs.
In het cursusjaar 82-83 begint de HUIZERMAAT met het eerste jaar middenschool.

## Eerste indrukken

Een warme dag in mei.
De school begint om 8.15 u. We wachten in de hal op onze contactman Ruud Lucas.
Frisse kleuren op plafond en pilaren, veel blauwen. Leerlingen komen de school binnen. We merken geen piek rondom de bel, geen gehaast of gedrang.
Om 8.15 klinkt een zachte ding-dong-viertonig: de school is begonnen.
In de Gooi- en Eemlander van 11 maart 1982 stonden bijdragen van leerlingen van de Huizermaat. Over deze bel schreef een leerling:

**„Ding, dong, dang, ding..."**

Wij hebben een gezellige bel in de school. Zo'n zoemer is niet leuk, maar de bel die wij hebben klinkt als muziek in de oren. De bel hoeft niet alleen „les afgelopen" te betekenen. Het kan ook een mededeling zijn bijvoorbeeld telefoon, of dat iemand bij de rector moet komen.
Dit is de bel: Ding, dong, dang, ding.

We bemerken geen duidelijk startmoment, zo van: nú moet je binnen zitten met je boek voor je.
Er wordt begonnen rondom de ding-dong.
Met Ruud lopen we door de gangen.
Zo op het eerste gezicht zijn alle scholen eender: trappenhuizen, gangen met lokalen.
In dit gebouw zit hier en daar een uitstulping aan de gang, voorzien van schoolmeubelen; een overwinning van gang op lokalen of een doortrapte infiltratiepoging van de lokalen in het territorium van de gangen?

In de gangen ligt vaste vloerbedekking. Geluiden van leerlingen dragen niet ver, er is geen nagalm.
Ruud stelt ons voor aan Harm en Fokke, wiskundeleraren en voorbereiders van de middenschool. Zij werken samen aan de keuze van materialen voor het volgend cursusjaar. Veel van de geselecteerde materialen zijn nu al in gebruik.
Harm heeft een aantal leerlingenboekjes geschreven. Fokke maakt de bijbehorende aanwijzingen voor de leraar. Ze schrijven zelf de functielijn voor de eerste klas, daarnaast worden IOWO-pakketjes gebruikt voor de meetkundelijn en spullen verzameld en zelf gemaakt voor rekenvaardigheden.
Harm vindt het zelf schrijven leuk werk. Over de tijd die er allemaal in gaat zitten, hebben we het maar niet.
We treffen ze op hun gemeenschappelijke uur waarop ze uitgeroosterd zijn voor overleg over de voorbereiding middenschool. Ze zitten te werken in een kamer. Ergens in de hoek druppelt koffie in een glazen kan.
We nemen ze in beslag met onze vragen en verhandelingen en drinken mee van hun koffie.

We leggen nader uit wat we komen doen. We willen een paar artikelen schrijven over wiskundeonderwijs op middenscholen. Hoofdbestanddeel zal zijn observaties van leerlingen.
Met deze artikelen in de Nieuwe Wiskrant proberen we bekendheid te geven aan ontwikkelingen in de middenschool.
Aan het eind hopen we ook in staat te zijn behoeften aan onderzoek, leerplanontwikkeling en nascholing te formuleren op grond van onze observaties. We zijn van plan de voorlaatste versie van ons artikel over de Huizermaat met leraren van de school te bespreken.

## Een les in een brugklas

Harm neemt ons mee naar zijn brugklas.
De leerlingen nemen hun spullen voor zich. Ik vraag Mireille hoeveel leerlingen er in de klas zitten. 'Weet ik niet', ze telt. Ik zie acht groepen van 3 of 4 leerlingen.
Harm stelt ons voor: Aad met de gele bloes en George. Een leerling fluistert: Sjors en Sjimmie.
Harm schrijft het werk uit Moderne Wiskunde op het bord.
Opdrachten van 7.5 over het delen van positieve en negatieve getallen.

***7.5 Delen***

OPDRACHTEN

1 $3 \times -4 = -12$ daarom is $\frac{-12}{-4} = 3$ en $\frac{-12}{3} = -4$

Maak ook dergelijke beweringen bij de volgende vermenigvuldigingen, bij iedere vermenigvuldiging dus twee delingen.

| | | |
|---|---|---|
| a. $5 \times -3 =$ | e. $-7 \times 3 =$ | i. $-8 \times 4 =$ |
| b. $-4 \times -9 =$ | f. $-5 \times -20 =$ | j. $-7 \times -9 =$ |
| c. $3 \times -4 =$ | g. $4 \times -\frac{1}{2} =$ | k. $-\frac{3}{4} \times -8 =$ |
| d. $\frac{1}{4} \times 12 =$ | h. $-\frac{1}{2} \times -6 =$ | l. $0{,}01 \times -30 =$ |

2 Maak de volgende delingen:

| | | |
|---|---|---|
| a. $48 : -4 =$ | e. $-36 : -12 =$ | i. $25 : -5 =$ |
| b. $-36 : 9 =$ | f. $245 : 25 =$ | j. $-216 : -6 =$ |
| c. $24 : \frac{1}{2} =$ | g. $-36 : \frac{1}{4} =$ | k. $-17 : -\frac{1}{2} =$ |
| d. $-18 : 36 =$ | h. $-12 : -36 =$ | l. $17 : -51 =$ |

3 In de volgende tabel is aangegeven dat het quotiënt van een positief en een negatief getal negatief is. Vul de tabel verder in:

| : | pos | neg |
|---|---|---|
| pos | | neg |
| neg | | |

Moderne Wiskunde voor de Brugklas, deel 2. Blz. 114.

■

Ik vraag aan een groepje van drie leerlingen of ik erbij mag zitten. Dat vinden ze best.
Mireille: 'Dat is toch onzin'.
Inge: 'Nou ja, ... 't kan wel'.
Mireille zucht: 'hardstikke makkelijk'.
Harm zijn stem klinkt even boven het werken in de groepjes uit: 'Als jullie zachtjes praten, kan de deur open. Als 't tocht hoor ik 't wel... volgende week'.
Ik zie een leerling die de humor door heeft, we wisselen een blik van verstandhouding.
Mireille zegt bij elk sommetje: ''t is toch hardstikke makkelijk'.
Harm staat bij een groepje te helpen. Een jongen hoor ik zeggen: 'Jij hebt een Sint Bernhardshond hè, ik zag je laatst met 'm, .... is tie lief?'
Mireille: 'Ik snap 't niet'. Inge: 'Hetzelfde als je altijd doet'. Ze schrijft even gauw op de bank. '$\frac{1}{4} \times 12$, daar moet je eenden van maken $\frac{1}{4} \times \frac{12}{1}$ en dan krijg je $\frac{12}{4} = 3$'. Daarna veegt ze de berekening met een natte vinger weer uit.
'Ben jij?' ... 'bij e', hoor ik, even later Inge en Mireille.
Inge noteert het huiswerk in haar agenda.
De derde van het groepje – Sandra – werkt rustig door.
Als Inge en Mireille overleggen kijkt ze even mee, dan gaat ze verder.
Mireille scheurt een blad uit haar ringband.
Inge: 'Moet je weten? ... Snap je deze niet?'
Mireille: 'Jawel'.
Inge: 'Van die vier maak je vier eenden $\frac{4}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$'.
Zo algoritselen ze verder.
Een moeilijke: $0{,}01 \times 30$.
Ze spreken uit nul komma nul een keer dertig.
Inge zet het vaardig onder elkaar

$$\begin{array}{r} 0{,}01 \\ \underline{30} \\ 00{,}30 \end{array} \times$$

Ze vertrouwt het niet en doet het nog eens.
'Vraag 't hem', stelt Mireille voor.
Ik vraag haar 0,01 uit te spreken. Dat gaat moeizaam.
Ze schrijft onder elkaar – op mijn verzoek

$$\begin{array}{l} -1 \\ \;\;0{,}1 \\ \;\;0{,}01 \\ \;\;0{,}001 \end{array}$$

Ze heeft er moeite mee de getallen goed onder elkaar te zetten. Terug naar de 0,30.
'Als er nu bij Albert Heyn een speciale aanbieding is en er staat: Prijs radijs $f$ 0,30?' Dat weten ze wel, ook dat $30 \times f\,0{,}01 = f\,0{,}30$.
Achteraf bekeken heb ik de gedachtensprong gemaakt.
Voor deze leerlingen bleef er geen echte A.H.-erlebnis over.
Ik heb de bekende context erin gebracht. In rekenboekjes voor de basisschool staat regelmatig de vraag: bedenk een verhaaltje bij het sommetje $30 \times 0{,}01$.
Je zou kinderen moeten leren contextjes te verzinnen bij reken-wiskunde opdrachten.
Bij de algebra loop je spaak. Ik heb de grootste moeite bij $(2a^3 + b^2)5a^2b$.
Inge pakt haar spullen in. De rest doet ze wel thuis, ze was net toe aan het huiswerk.
Ze vraagt nog even aan Mireille: 'Snap je 't?'
Mireille: 'Ik snap 't wel.... maar ik heb een hekel aan delen'.
Sandra vraagt – wijzend op een antwoord –: 'Is dat goed?' Het is één van de huiswerksommen. Inge: 'Daar is het antwoordenboek goed voor'. En ze bladert zich naar het antwoord toe.
Sandra gaat even iets uitrekenen. Ze doet het op de binnenzijde van de kaft van haar ringband – de bekleding is losgegaan – op het grijze karton van de kaft.

$$\begin{array}{r} 25 \\ \underline{9} \\ 225 \end{array} \times$$

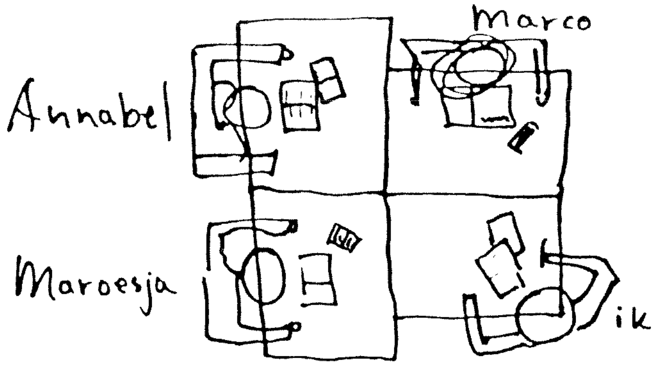
Kun je dat ook uit je hoofd? 'Oh ja .... maar ik ben veel te moe'. Ik kom nog even aanzetten met een context: 9 kwartjes.
De bel gaat. Inge: 'Verlossing van de bel'. ■

Onze observaties zitten vol kleine feitjes die naar grote lijnen verwijzen. Hier zijn vijf van die grote lijnen:
- het pedagogisch klimaat (bijvoorbeeld: de dingdong en het reageren op de bel. 'Je hebt een Sint Bernardshond, hè');
- overleg van de wiskundedocenten (Harm en Fokke die samen het brugjaar voorbereiden;
- het samenwerken van de leerlingen ('Ik snap 't niet'. 'Hetzelfde als je altijd doet');
- de wiskunde (van die vier maak je vier eenden);
- het gedrag van de leraar (als 't tocht, hoor ik 't wel... volgende week).

We hebben gekozen om nader in te gaan op het samenwerken en de wiskunde. Je kunt die twee niet los van elkaar zien.
Je zou een matrix kunnen verzinnen met aan de ene kant allerlei soorten wiskundeopdrachten en aan de andere kant allerlei vormen van samenwerken. Wij zijn van mening dat tal van matrixplaatsen leeg dienen te blijven. Ook menen we dat er bij nader inzien op ingevulde plaatsen eigenlijk nog niets staat.
Een opdracht laat slechts bepaalde soorten samenwerking toe. Ben je uit op een bepaalde samenwerkingsvorm, dan moeten je opdrachten daarvoor geschikt zijn.
Kinderen kiezen -als ze daartoe de ruimte krijgen- vaak heel verstandig, varend op het kompas van de firma Boereverstand. De manier waarom kinderen met elkaar en met de wiskunde bezig zijn binnen een bepaalde samenwerkingsvorm, daarover valt heel wat te leren. In het eerste deel gaan we hier verder op in.
Een wiskundeleraar weet meer van de roos en de rand. Hij of zij kan kiezen op grond van inzicht in wat wiskunde doen eigenlijk is.
Daarover schrijven we in het tweede deel: 'Wat is dat, wiskunde doen?'

## Samenwerken

Uit alles blijkt dat in de Huizermaat samenwerken wordt gestimuleerd. De leerlingen zetten zich direct in groepjes in de klas neer, er wordt een miniconferentie over sociaal leren gehouden, in de sectievergadering komt het onderwerp ter sprake en je krijgt er als leerling zelfs een cijfer voor. Het moet.
We zagen al hoe Mireille en Inge samenwerkten: Inge laat aan Mireille zien hoe je de sommen moet doen. Inge vraagt ook 'moet je deze weten?' Ze neemt dus als helpster ook zelf initiatief. Dat wijst op een goede sfeer. Maar erg bewust gaat het niet. Kijk maar naar de rol van Sandra: die werkt gewoon alleen en aan het eind heeft Inge weinig tijd voor haar.
In een ander groepje van diezelfde eerste klas loopt het iets anders. Het isolement van Marco, die hier het derde wiel aan de tandem Annabel-Maroesja is wordt expliciet besproken.
Dit is grofweg de situatie, schaal 1:30.
Ze vinden het best dat ik er bij zit.
Als ik zit, denk ik: zo zie ik niet goed wat ze doen;




maar ik wil natuurlijk niet storen en laat het zo.
Later blijkt dat Bob hier altijd zit. Die moet dan toch altijd dat euvel hebben! Om de redenen van symmetrie en asymmetrie gelden:
a. Marco & Bob kunnen slechter zien wat Annabel en Maroesja doen, dan andersom.
b. Annabel en Maroesja zien elkaars werk goed.
c. Bob en Marco zien elkaars werk op de kop.

Het gesprek gaat over dezelfde opgaven als zoëven.

■
Maroesja: 'Eerst 5 keer −3. Dat is −15.'
Annabel: 'Ja. Dan snap ik het.'
Na even zonder praten doorwerken:
Annabel: 'Hoeveel is 5 gedeeld door 15?'
Ze schrijft $\frac{15}{5}$ en Maroesja zegt: 'Drie'.
Annabel: 'O ja? klopt dat?' Stilte. 'Moet wel −3, hè?'
Dat was dus opgave a. Nu 1b.
Maroesja: 'Min en min is plus'.
Iets later zijn ze het ergens over oneens en kijken achterin bij de antwoorden. Ik vind dat ze dat vaak doen trouwens. Het geeft me een onbehaaglijk gevoel: Willen ze alleen de antwoorden en zijn dan tevreden? Afgezien van kleine meligheden (dat woord rolt uit Maroesja's mond) wordt er toch regelmatig doorgewerkt.
Ik merk dat Marco alleen werkt. Hij is al achter, streept nu wat door, begint opnieuw. Normaal zal hij misschien wat meer met Bob samenwerken, denk ik.
Annabel tegen Marco: 'Wat doe jij stil.' Het is Annabel dus ook opgevallen. Aardig!
Dan wijst ze iets aan in zijn schrift (dat kan zij dus inderdaad zien) en zegt: 'Je moet dit doen'.
Marco heeft nu $\frac{-15}{5} = 3$ opgeschreven waar Annabel en Maroesja al $-3$ hebben. Een kreetje van Annabel: 'Ik ben niet zo goed in breuken.'
Dus is ze dan al bij d. Want ik neem niet aan dat ze bij de eerste 3 opgaven ook maar aan breuken gedacht heeft. En zwijgend zwoegen ze verder. Annabel schrijft vast e, f, g, h, enz. onder elkaar vooruit en gaat dan werken aan som e.
Dan is er een blik op het werk van haar buurvrouw. En: 'Jij gaat zo ver'.
Maroesja: 'Ik werk liever op mijn gemakkie door.' En even later ook daar de kreet: 'Ik ben niet zo goed in de breuken.'

Op zo'n moment dat je denkt dat enig gesprek mogelijk is en licht op het geheel kan werpen, kaart ik zelf de samenwerking aan.
'Jullie doen wèl samen.'
Annabel: 'Marco doet meestal met Bob.'
En dat was 't. Want Maroesja zit nu met $0{,}01 \times -30$ te worstelen.
Ze kijkt achterin. 'Want als je 't antwoord weet, begrijp je 't vaak beter.' Ik ben even stil en berouw wat ik eerder gedacht heb over die antwoordenlijst....
Bij som f komt Harm voorzichtig kijken.
Annabel en Maroesja zijn met 245:25 bezig.
Maroesja: '9 keer. 225.'
Ze staart-deelt als volgt:

25/245\908
225
200
200
0

'0 aanhalen'. Die schrijft ze ook achter 9.
'Gaat 8 keer.' '908. Dat kan nooit'.
Harm wijst naar de fout als ze nog eens vertelt wat ze deed. Dan komt er 9,8. Maar achterin staat $9\frac{4}{5}$!
Harm laat aan Annabel en Maroesja zien dat het ook anders kan.
'Zo: $\frac{245}{25} = 9$ en dan nog $\frac{20}{25}$. Die is $\frac{4}{5}$.
Dus $9\frac{4}{5}$.'

Ik vraag me af of ze daar ook $9{,}8 = 9\frac{4}{5}$ uit concluderen....
Tegen Marco: 'Gaat het?'
Marco: 'Ja....'
Harm gaat naar een andere groep.
Toen ik dat zag, dacht ik: Marco krijgt zo minder aandacht. Jammer.
Maar nu denk ik: er was geen (openlijke) aanleiding voor gesprek met Marco. Toch legt Harm even contact. Prima dus!
Marco is nu bij opgave 2. 'Lekker delingen.'
Dat is andere taal dan de fractiofobe kreten van Annabel en Maroesja.
Een 10 minuten langdurend gevecht van Annabel, Maroesja en mij, over $-36:\frac{1}{4}$ sla ik hier over. Er kwamen 36 pannekoeken –opgediend door Maroesja– op tafel, nadat ik vergeefs inzichten uit de vorige opgaven te wapen had geroepen.
In deze hindernisbaan vol breuken, minnen en delingen is 216: −6 het volgende obstakel.
Marco spuit: '36'. Annabel en Maroesja: 'Hè??'
'Je neemt eerst 180:6. En dan nog 36 : 6 = 6.'
Hoe Marco bij die 180 komt wordt hem niet gevraagd.
Maroesja: 'Twintig.' Ik vraag '180 : 6?' 'Ja, 20.'
Na even: 'Nee, dertig.' Goed. Dus 36.
Nee. mìn 36....
Even teruglezend analyseren we:

1. Marco is bij opgave 2a en zegt: 'Lekker delingen'.
2. Dan komen Annabel en Maroesja bij 2g; $-36 : \frac{1}{4}$, waarbij ik meedoe en niet zie wat Marco doet.
3. Bij 2j vragen Annabel en Maroesja naar 216: −6. Marco is daar al geweest want hij weet de manier.

Conclusie: Marco heeft veel sneller dan Annabel en Maroesja aan 2a t/m 2j gewerkt. Dat klopt met zijn 'lekker delingen.' Maar ook: tijdens het gesprek over $-36:\frac{1}{4}$ moet Marco die som gemaakt hebben en heeft hij zijn mond niet opengedaan. Verder teruglezen: heeft ie ooit zèlf, uit eigen initiatief iets gezegd?
Ik kan dat in mijn aantekeningen niet vinden! ■

Voor er weer leerlingen aan het woord komen een paar opmerkingen.
Het woord algoritselen is gevallen. Via uitlegjes die weinig met wiskunde en begrijpen te maken hebben rommelen de groepjes naar het ene ware antwoord toe. Geschillen zijn er niet. Je hoeft elkaar ook niet met argumenten te overtuigen. Blijkbaar geldt: je kunt het, of je kunt het niet. Zo leidt deze stof tot een voordoen-nadoen samenwerking. Binnen een prettige werksfeer, dat is zeker.
Voor bewuster samenwerken is méér nodig. Een middel kan zijn: napraten over hoe je 't gedaan hebt, d.w.z. over hoe je hebt samengewerkt. Op het werkblad dat we in klas 2b zien gebruiken staat dat als opdracht aangegeven.
Behalve dat we in het volgende verhaal een uitlegger in actie kunnen zien die wéét wat de bedoeling is, kunnen we ook zien wat het effect van de samenwerkingsplicht is.

■
Het groepje van Marcel, Mark en Petra gaat snel aan de slag. Ieder maakt de sommen eerst zelf. Bij 500 x = 0 zie ik dat Marcel opschrijft x = 0,000000000.

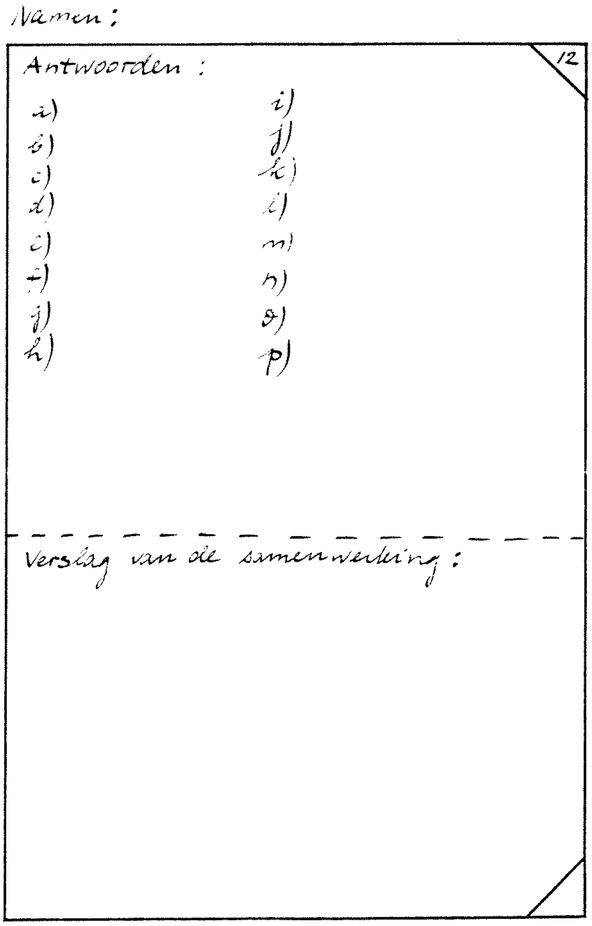
Vergelijkingen.

11

Dit is een groepsopdracht.
Je moet met je groep deze 16 vergelijkingen oplossen.
Je mag de sommen verdelen.
Vul de antwoorden in op het formulier
Eén antwoordenblad inleveren
Vertel ook hoe je hebt samengewerkt.
Je krijgt 20 minuten de tijd.

Hier volgen de opdrachten:
Los de volgende vergelijkingen op:

| | |
|---|---|
| a) $500x = 0$ | i) $-(2x-3) = 7$ |
| b) $-5x+7 = -8$ | j) $4x - 4 = 0$ |
| c) $-2(-2x+4) = 6$ | k) $x + 5 = -6$ |
| d) $-3x = 6$ | l) $-x - 4 = -5$ |
| e) $-100x = 10$ | m) $\frac{1}{2}x = -8$ |
| f) $-2x - 6 = 1$ | n) $3(x+2) = 21$ |
| g) $3x - 2 = 10$ | o) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 3\frac{2}{3}$ |
| h) $8x - 7 = -7$ | p) $-4x + 2 = -6$ |


Namen :

Antwoorden :

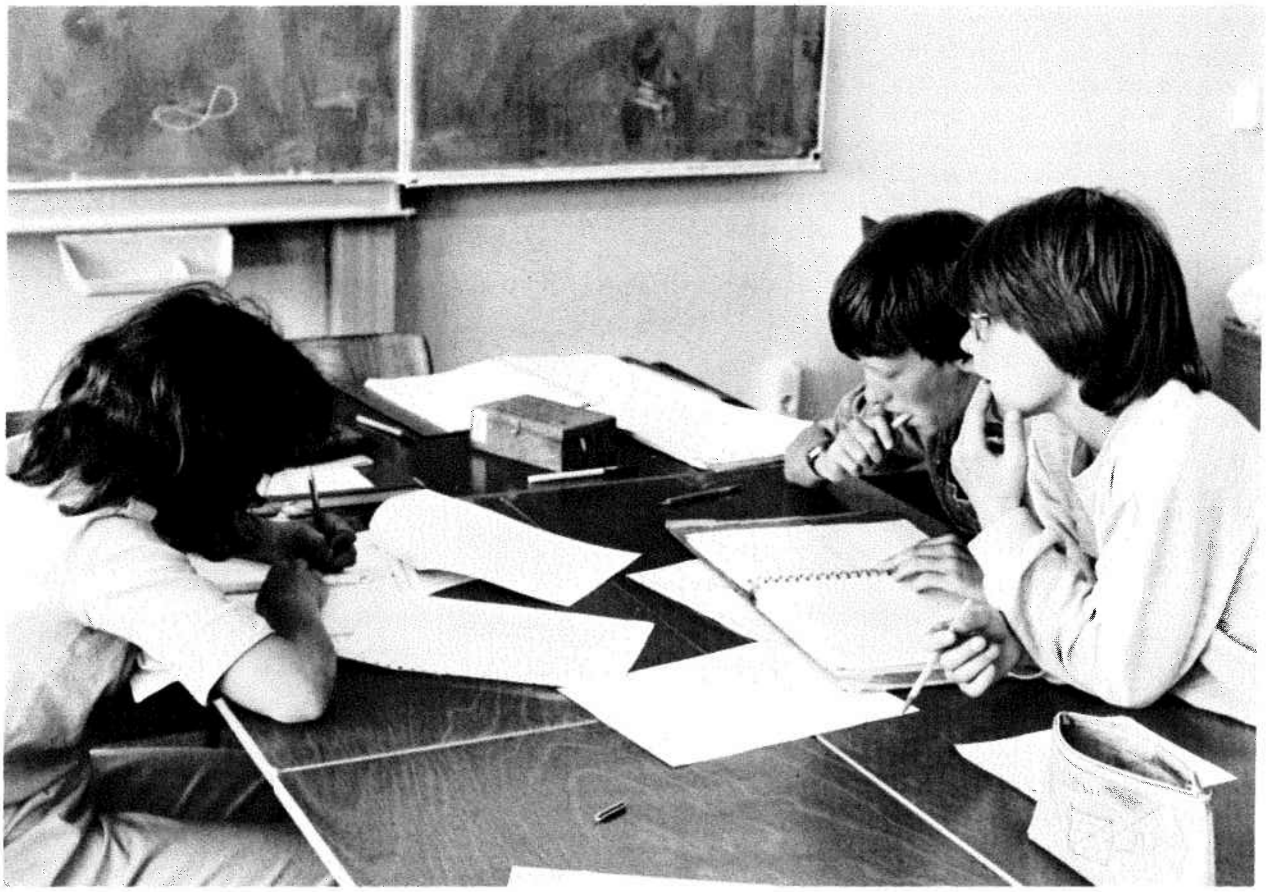
12

a) i)
b) j)
c) k)
d) l)
e) m)
f) n)
g) o)
h) p)

Verslag van de samenwerking :

Petra kijkt bij Mark. 'Ben jij?' 'Bij c'. 'En jij?'. 'h'.
Marcel vouwt het blad waarop hij werkt om en rekent op de achterkant. Zodra hij een antwoord heeft, noteert hij het op de juiste plaats aan de voorkant. Tussen het heen en weer vouwen wijst hij zwijgend een fout aan bij Mark.
Petra rekent uit met potlood op het opgavenblad.
Ze schrijft in de ruimten tussen de opgaven. Als ze klaar is, gumt ze alles uit.
Mark doet het meeste uit z'n hoofd. Af en toe noteert hij een tussenstand op een blad van zijn ringband. Hij schrijft tussen de gaatjes van de perforatie.
Nu begint het overleg.
Petra, over $3(x + 2) = 21$,: 'Dit kan toch nooit vijf zijn?'
Marcel: 'Geef je antwoord eens?' Hij vergelijkt zwijgend met het zijne, zegt: 'Oei', kijkt nog eens en geeft Petra haar blaadje terug. Er is geen twijfel mogelijk dat hij van mening is dat Petra het fout heeft.
Ik kan geen systematiek ontdekken in de bespreking van de opgaven. Er is verschil van mening over $-x -4 = -5$.
Marcel gaat argumenteren (= uitleggen in dit geval). 'Je wil eerst die hebben, de min iks, dan wil je daar (wijst op $-4$) nul hebben. Tel je vier op om nul te krijgen.
Tel je hier ook vier bij op (wijst op $-5$).
Krijg je min iks is min één.
Wil je die min weg hebben (wijst op $-$ van de x) Maak je iks is één.'
Petra is inmiddels omgelopen, ze staat naast hem.
Marcel tegen Mark: 'Snap jij dat nou?' Mark aarzelt. Marcel begint opnieuw. Hij heeft er zichtbaar lol in. Even later vertelt hij dat hij 't bij het maken van deze sommen ineens door heeft gekregen.
Er is onzekerheid in de groep over de behandeling van $\frac{1}{2}x = -8$.
Marcel heeft de leiding genomen. 'Door twee delen... eh... nee... aha vermenigvuldigen met twee.'
Toch twijfelt hij of 't wel juist is wat ie doet. Hij vraagt me of 't goed is.
Ik geef geen uitsluitsel: 'Wil je het me nog eens uitleggen?' Ik geef geen knikjes van goedkeuring.
Als hij klaar is, vraag ik: 'Is 't goed of fout?'
Marcel: ''t Is goed... nu weet ik 't zeker.'
Ik zeg dat 't helemaal goed is. 'Ik ga proberen of ik je van de wijs kan brengen.
$\frac{1}{2}x = -8$
Ik wil die iks hebben, dus trek ik er een half van af, dat doe ik ook van die min acht.'
Mark: 'Dan staat er nul iks.'
Na een tijdje komt Marcel met $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 'en daar heb je niks aan.'
Met Marcel als centrum van de discussie worden alle sommen besproken. Petra staat naast Marcel, ze zegt: 'Ik weet niet hoe ik 't uit moet leggen.'
Marcel zet na de bespreking van ieder sommetje een schoolmeesterskrul.
Marcel vraag ik naar de 0,0000 bij $500x = 0$.
Hij zegt: 'Dat is gewoon nul.' Even later vraagt Mark aan Marcel: 'Waar laat je die acht?' Hij wijst op $8x = 0$. 'Deze door nul, die door nul?'
Marcel: 'Allebei gedeeld door acht, nul gedeeld door acht is nul.'
Tegen het eind van de les – Petra zit weer – schrijven ze elk een zinnetje op over de samenwerking.
Dan gaan ze inleveren. Als ik ernaar vraag, hebben ze allemaal zoiets opgeschreven als: Eerst zelf gewerkt daarna vergeleken.
Ik vraag ze waarom ze hierover nu niet overleggen.
'We hebben eerst zelf gewerkt en toen samen doorgenomen.'
Maar wat is dat dan 'samen doorgenomen', leer je er iets van?
Ze kunnen niet veel met deze vraag. De bel gaat.
■

Harm vertelt me naar aanleiding van dit voorval dat kinderen gewend zijn een cijfer te krijgen voor samenwerken. Ze kunnen het begrip niet nader omschrijven. Hetzelfde als bij $30 \times 0{,}01$ en $9 \times 25$. Ze zijn niet in staat de stap te maken naar 30 keer één cent of negen kwartjes.
In het geval van samenwerken liggen de concrete ervaringen op tafel. Marcel die uitlegt, hij leert zelf duidelijk van zijn uitleg. Het groepje dat deze opgaven niet verdeelt. Ieder heeft behoefte aan de eigen oefening.
Petra die haar blaadje naast dat van Marcel legt en vergelijkt.
Mark die de gedachtengang van Marcel volgt $8x - 7 = -7 \Leftrightarrow 8x = 0$ en dan vraagt 'Waar laat je die acht.'
Marcel die uitlegt dat ie door acht deelt en niet door nul zoals Mark eerst denkt.
De uitleg van Marcel is niet maar van 'dat doe je zo en



doe maar na.' Hij motiveert zijn stappen.
Petra wordt zich bewust dat ze nog niet in staat is de motivering te geven.
De uitleg van Inge in het vorige groepje noemde ik algoritselen.
Je kunt het samenwerken alleen maar leren als je dit soort gebeurtenissen leert herkennen als voorbeeldjes van samenwerken.
Je zou kunnen zeggen: de leerlingen werken samen, maar kunnen nauwelijks zeggen hoe. Ze kunnen daar geen details van weergeven, terwijl alles zich net heeft afgespeeld. Ze herkennen hun spontane activiteiten niet eens als samenwerkings-componenten.
Is het zo dat ze voelen: we doen eerst wiskunde en nu komt er nog iets anders bij: samenwerken. O jé, dat hebben we nog niet gedaan!
Op deze scheiding komen we later nog even terug om te laten zien dat hij niet door de leerlingen, maar door anderen is bedacht.
Eerst weer een stukje werkelijkheid. Het gaat om dezelfde vergelijkingen. Vóór-uitlegger is Theo.
Theo heeft ook een idee over de reële samenwerkingsmogelijkheden bij deze leerstof.

■

Theo: '$6x - 9 = 7$. Dan is $6x = 16$. Je moet die 9 doortellen. En dus is $x = 2{,}66666$.
Snap ie? Dat moet je hier ook doen'.
$6x - 9 = 7$ gebruikt hij als voorbeeld. Met $3(2x - 3)$ denkt Theo het haakjesverdrijven beter te kunnen demonstreren dan met $-(2x - 3) = 7$ van het werkblad. De breuken die zo binnenkomen heeft hij waarschijnlijk niet voorzien.
Ankie: 'Delen snap ik niet. Moet je die door $-2x$ delen?' En Theo vertelt het nog eens aan haar.
José: 'Wachten jullie nou? Ga maar verder....'
Ik: 'Doe even hardop, José, dan kunnen we helpen.'
José: 'Is j één?' (D.w.z. komt uit som j één?).
Hier wordt dus elke som door ieder gemaakt en wachten ze op elkaar. Vandaar de traagheid!
José: 'Hoe kun je nu samenwerken als ik 't niet snap. Ga maar door jullie.'
Het is duidelijk dat José voor een of andere DBK-vorm kiest. Ze voelt zich zó allerminst op haar gemak.
Ik realiseerde me dat nog niet toen ik vroeg: 'Doe eens hardop.'
José: 'Waarom moet die weg?' (Ze wijst op de $+5$ in $x + 5 = -6$).
Ankie: 'Om x uit te rekenen.'
Veel hulp geeft dat natuurlijk niet.
Weer zegt José: 'Gaan jullie maar verder'.
Theo wil toch uitleggen. Maar Ankie zegt: 'Je zegt niet waarom je dat moet doen'. Blijkbaar legt Theo teveel uit in de doe-zus-doe-dat-en-dan-dat-stijl.
Harm komt erbij en vraagt: 'Hoe komt dat nou dat José wel bezig is en jij niet?'
Theo: 'Ik wacht tot we het allemaal hebben.'
Harm: 'José vindt het moeilijk'. Nu kijken we met zijn zessen (kijkt naar mij) naar haar. Ze wordt zenuwachtig daardoor.

Ik dacht dat je ook de sommen kon verdelen. Of jij rekent en José schrijft op.'
Theo: 'Maar zoals wij doen, ben je zeker dat ieder alles goed heeft. En José leert zo toch niets.'
Harm: 'Ja maar dat is 't. Jullie vertrouwen elkaar niet, je durft geen risico te nemen. Je kunt wel eens vragen hebben waar je 't niet zeker weet.'
Ze moeten nog opschrijven hoe ze samenwerkten.
Ook dat doet Theo: 'Als iemand het niet snapt, hebben we het hem uitgelegd.'
Ik zeg: 'Vindt iedereen dat goed?' Theo leest voor. Het is tijd, er wordt al opgeruimd.
Ik: 'Of háár'. Slaat op Theo's zin.
José geeft een minuscuul klein lachje af. ■

We zeiden het al: het soort samenwerking hangt af van de soort opgaven.
Zo stelt Theo vast: deze wiskunde gaat om zekerheid. Als $2x - 3 = 7$, dan is x gelijk aan 5. En je komt niet verder met $x - 3 = 7 - x$. Aan José moet duidelijk gezegd worden hoe ze het stap voor stap moet doen. Hij heeft gelijk wat de eenduidigheid van de antwoorden betreft. Die bepaalt in feite dat gesprek eenzijdige hulp zal zijn. En de samenwerking door werkverdeling, is die zo to the point? Werkverdeling is leuk als je duizend enveloppen moet dichtdoen, maar om zoiets gaat het hier niet. Het gaat om iets leren en moet je dan samenwerken om de arbeid te beperken?
De harde kennisverschillen bij deze sommen roepen ook nog emotionele spanningen op. Let maar op José: die wil niemand een blok aan het been zijn en kan helemaal niet tegen 6 paar afwachtende ogen op háár werk.

Op een school waar samenwerken tot de leerlingplichten behoort komt zulks uiteraard in de sectievergadering wiskunde ter sprake.
Op deze vergadering was de hele wiskundesectie aanwezig: Ruud, Theo, Rob, Harm, Fokke, Leo. Tevens zijn Cor en Jan van D'Witte Leli er; en wij, George en Aad.

We mochten aanwezig zijn bij de bespreking van het eerder genoemde pakket 'Regelmaat.'
Van het nulde-versie pakket 'Regelmaat' wordt in deze sectievergadering van elke regel de maat genomen. De opzet van de vergadering is eerst op details het pakket te doorvorsen en dan pas op de grote lijnen, achtergronden enz. ingaan. Constructieve kritiek wordt verwacht, maar Harm – de auteur – vangt ook andere kritiek goed op. Hij verdedigt zich niet maar licht toe, probeert verbeteringen te bedenken.
In opgave 7 gaat het zeer expliciet om samenwerken. Er staan al 3 poppetjes boven. Drie kleine....

REGELMAAT

3

Opdracht 7

Deze opdracht moet je maken met je groepje.
Verzin drie opdrachten, zoals je bent tegengekomen in opdracht 4 en 6. Elk groepslid doet dit.
Daarna laat je de andere groepsleden de oplossing zoeken. Rouleer net zo lang totdat iedereen elke som heeft gemaakt.
Als je daarmee klaar bent ga je met je groepje bespreken hoe je zulke opdrachten het beste kunt aanpakken. Schrijf een verslagje van dat gesprek in je schrift.

Opdracht 8

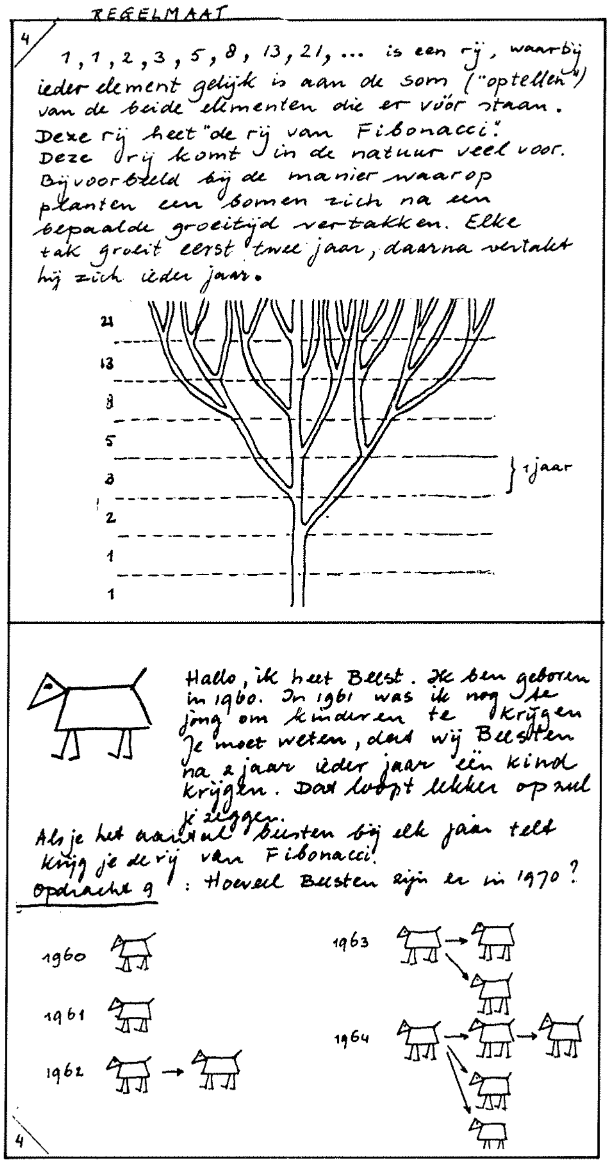
In iedere rij ontbreken twee elementen.
Zoek de regelmaat en spoor de beide ontbrekende elementen op.

a) 1, 3, ..., 7, 9, ..., 13, 15.
b) 1, 11, 21, ..., 41, ..., 61, 71.
c) ..., ..., 9, 12, 15, 18, 21.
d) 64, 32, ..., ..., 4, 2, 1.

■

Rob: 'Wat is de bedoeling van en ?'
Harm: 'Samen doen. Of alleen doen. Eén poppetje laat ik verderop weg.'
Cor vindt de tekst wat dwingend. Je moet, doe, laat etc.
Theo komt hem tegemoet met het voorstel:
'Zou je misschien kans zien voor volgende week vrijdag....'
En Harm: ''t Telefoonnummer van je mentor is....
Tja, ik vind dat moeilijk. Maar ik wil dat zo wel.'
Dan gaat het weer serieus, nu echt over het effect van de opgaven waarin je over je samenwerking moet schrijven.
Theo: 'Jij hebt er ervaring mee. Wat komt eruit?'
Harm: 'Meestal niet veel meer dan: we hebben het samengedaan. Dan zeg ik: zo bedoel ik het niet. Je moet schrijven hoe. Er komen zeer gebrekkige verhalen uit.'
Theo: 'Is er soms ook verwarring over wat ze moeten opschrijven: wiskunde of over groepswerk?'
Harm: 'Ja, vaak schrijven ze de wiskunde op en hoe ze die deden.'
Cor gaat terug op zijn vergaderstrategie; de criteria duidelijkheid, consistentie en meersporigheid moeten detail voor detail worden bekeken. De achtergronden komen later. Dus:
Cor: 'Het is niet zo duidelijk geformuleerd. Moet ieder er 3 maken of drie met je groepje?'
Harm: 'Ik bedoel daar ieder drie, maar dat....'
Cor: (zachtjes) 'O ja, dat staat er...'
Harm: '... is dus niet zo duidelijk opgeschreven.'
Jan: 'Je schrijft in de bijna laatste regel 'het beste'. Bedoel je dat daar over gediscussieerd kan worden?'
Rob: 'Laat dat weg. Dat rouleren is ook niet zo duidelijk.'
Leo: 'Laat dat erin! Komt terug over twee jaar: sociaal rouleren!'

Jan: 'Ik las: Zoek 3 antwoorden en daarvan de beste.'
Harm zal de tekst duidelijker maken.
Dan komt opdracht 9. Dat gaat over een boom die Fibonnacci-gewijs vertakt en de voortplanting van 'Beest.'
Er is een tekening van de boom en de voortplanting der beesten bij:




Eerst komen kleine details (duidelijkheid!) aan de orde.
De boom voor 1970 moet blijkbaar getekend worden.
Theo: 'Wat is het voordeel van het tekenen?'
Leo: 'Ik ben ook benieuwd of het verschil maakt: beest of boom. 't Beest vond ik makkelijker.'
Ruud: 'Waarom nog de plaatjes als je de getallen al geeft?'
Harm: 'Ik ben toch benieuwd of ze die verbinding leggen.'
Theo: 'Stel je voor een hele les tekenen!'
Harm: 'Bij 'Regelmatige figuren' (1) heb je dat ook. Onhandigen doen uren over die bouwplaatjes.'
Leo: 'Maar als iemand zo lang tekent is er altijd wel commentaar.'
Harm: 'Ach, één tekent, één kijkt en twee doen niks.'
Cor: 'Hoe heterogeen!'
Even later in het gesprek gaat het weer over dit soort samenwerking.
Harm: 'Vaak zegt een leerling die het snapt, het antwoord (veel eerder dan ik) gewoon voor.'
Theo: 'Wat heb je daar aan?'
Op dit aspect wordt nu verder niet ingegaan.

■

De door ons nu vrij expliciet uitgesproken samenhang tussen soort wiskunde en soort samenwerking komt óók in de sectie aan de orde. De conclusie dat M.W.-achtige wiskunde voor de Huizermaatse samenwerking ongeschikt is, wordt in dit kader niet uitgesproken. De consequenties van zo'n standpunt zijn niet gering en binnen de nu bestaande situatie ook niet aanvaardbaar.
Het woord heterogeniteit valt ook in serieuzere samenhang. Vlak na het begin van de vergadering al. In opgave 2 kwam de term 'element van een rij voor'. Daar wordt bij aangeknoopt.

■

Jan: 'Wil je 'element' er echt zo in hebben?'
Harm: 'Nou ja, er is een woord nodig.'
Theo: 'Als je op de heterogeniteit let die binnenkomt, is dat te abstract.'
Rob: 'Ik mis een vraag: Wat staat op de 10de paal?'
Harm: 'Ik heb liever de bedoeling in het begin heel duidelijk.'
Leo: 'Waarom juist naar dat minimumniveau? Moet je in de heterogene groep niet juist discussie uitlokken?'
Theo vindt dat ook. Als Cor terugstuurt naar 'duidelijkheid' zegt Leo: 'Maar de problemen zitten aan elkaar. Wil je duidelijkheid juist met het oog op de heterogeniteit?'
Uiteindelijk wordt tot duidelijkheid besloten. De minimumlijn wordt dus gekozen. Leo legt zich daar ook bij neer.
Er is ook een voorstel nòg andere vragen op te nemen, zoals:
Cor: 'Waarom die paaltjes? Daarover kun je ook in heterogene groepen praten'.
Ruud: 'Hoe groot moeten de cijfers zijn als je ze nog met 100 km/uur moet kunnen lezen?'
Theo stelt voor, dat leerlingen dat maar eens uit moeten proberen. We vermoeden dat het niet in de uiteindelijke versie terechtkomt.

■

Een ondertoon in dit fragment is: de stof wordt in zekere mate bepaald door de heterogeniteit van de leerlingengroep. Merkwaardig genoeg zijn er vóór de sectievergadering klanken te horen die daar pittig mee dissoneren.
Er speelde zich een kort gesprek af over de op handen zijnde miniconferentie over sociaal leren. Dat is een interne conferentie. In groepjes (loodrecht op de vaksecties) moeten opdrachten voor sociaal leren bij een onderwerp gemaakt worden. Fokke bedenkt de

stof voor het wiskunde groepje. 'Iets uit de bovenbouw', grapt men. Het wordt 'uit de brugklas'. Loes, die 't blijkbaar organiseert heeft gezegd: "t maakt niet uit wat je inbrengt.' Daar zit het hem nu precies: het maakt juist alles uit.
In deze sectievergadering gaat het slechts weinig daarom. De stof van Harm's pakket staat vast. Alleen qua vorm mag er nog wat heterogeniteitsinvloed doorsijpelen, maar aan het voer zelf wordt niet gesleuteld... Dat doet er toch niet toe!
Het bedenksel: 'Opdrachten-voor-sociaal-leren-maken-bij-...' verraadt heel wat. Sociale wetenschappers denken dat onderwijs een veldje blokken is, een matrix, waarin je blok voor blok kunt bijstellen zonder de rest te beroeren. Een gezond mens weet dat het 'mikado' is. Als je één stokje pakt, rollen er 10 weg en is je beurt voorbij.
Of denk aan een bord spaghetti: aan één draadje plakt alles vast. Je kunt niet zomaar de stof onaangetast laten en samenwerking zinvol maken.
Naar de opdrachten voor 'sociaal-leren' ben ik toch wel benieuwd. Daar zou toch iets uit moeten komen waardoor de leerlingen iets meer details leren zien in hun eigen samenwerken en komen ze wat verder dan: we hebben het samengedaan.
Uit onze stellingname volgt: je moet niet alleen weten wat je sociaal wilt, maar ook wiskundig inhoudelijk.
Als overgang naar het volgende laten we voor de pauze nog even Annabel en Maroesja optreden met hun act: 'Wat is Wiskunde?'
Nog steeds ligt blz. 114 voor ons. Het gaat om opgave 3.

3 In de volgende tabel is aangegeven dat het quotiënt van een positief en een negatief getal negatief is. Vul de tabel verder in:

| : | pos | neg |
|---|---|---|
| pos | | neg |
| neg | | |

■

Annabel weet eerst niet wat de bedoeling is. Dan vult ze in:

pos (neg)
neg pos

Ze kijkt achterin: 'Ja, zo maar goed!'
Ik: 'Nou, dat is toevallig!'
Annabel: 'Nee, ik had het eerst opgeschreven.' (en dus toen pas gekeken).
Ik leg uit dat ik bedoel: je hebt het zèlf gedaan, maar als je 't zomaar doet is het toeval als het goed is.
Dat vindt ze ook, mompelt iets vaags over ik dacht zo –, dat is neg, dan daar maar pos.' Ze begrijpt duidelijk de bedoeling van deze opgave niet.
Even stilte. Dan: 'Zo zie je: ieder denkt iets anders bij wiskunde als daar iets, hetzelfde staat. Ik gokte, maar het boek gokt niet.'
Dat is dan toch de meest diepzinnige opmerking van de dag, denk ik. Ze gaat verder: 'Dat is net als met dat raadsel.'
En begint iets op te zoeken in d'r agenda.
Marco vraagt intussen of je 4 t/m 10 moet leren of maken. Hij krijgt geen antwoord en gaat naar een ander groepje.
Annabel leest: 'Een arts in Den Haag heeft een broer in Groningen, die is banketbakker. Maar die heeft geen broer in Den Haag die arts is. Hoe is de familierelatie?'
Maroesja: 'Hè?'
Annabel: 'Dat is net als wiskunde.'
Bij het tas inpakken (de ding-dong-dong is gegaan) zegt ze: 'het is zijn vader.'
Zo zit dat dus met die verwachtingen. Al is je zus arts, artsen hebben een vaderrol.

■

Annabel bedoelt denk ik: wiskunde, dat heeft met zekerheid te maken. En met redeneren.
De 'mop' illustreert dat: een redeneerprobleem. Je denkt dat 't niet kan. Maar toch kan 't. Waarom?
Je zou haar arts-in-Den-Haag kunnen zien als:
het is niet alleen het resultaat (in het antwoordenboek) maar ook hoe je er komt. Als die weg niet vastligt, dan kun je daar samen naar zoeken.

## Wat is dat eigenlijk, wiskunde doen

In het verhaal over Marcel, Mark en Petra blijkt iets van het willen weten, het zeker willen weten. Marcel heeft het bij het maken van deze opgaven ineens doorgekregen.
Hoe gaat zoiets eigenlijk in zijn werk? Ik zat er met mijn neus bovenop. Ik heb slechts kunnen constateren dat hij ijverig aan het werk was en pas later – bij de bespreking met Mark en Petra – blijk gaf deze sommetjes te beheersen.
Dat is een kern van wiskundig bezig zijn:
activiteiten die ertoe leiden dat je ineens begrijpt. Dat begrijpen geldt slechts voor een klein gebiedje. Het vorige begrijpen is een springplank voor het volgende.
Marcel wil blijkbaar graag excerceren met zijn begrijpen. Mark en Petra krijgen van hem uitleg zoveel ze maar willen hebben.
Het verwoorden speelt voor hem een belangrijke rol.
Als hij voor de tweede keer zijn gedachten uitgesproken heeft over $\frac{1}{2}x = -8$, weet hij ineens zeker. Daar zit een belangrijk verschil in werkwijze tussen mensen.
Je hebt mensen die dat enige malen verwoorden niet of nauwelijks nodig hebben om te begrijpen.
Bij anderen is het verwoorden een deel van het proces van het begrijpen. De zinnen zijn een terugkoppeling naar het begrip. Het begrip neemt duidelijke vormen aan.
Waardoor het verwoorden meer scherpte krijgt, waardoor het begrip enz.....
Verwoorden kan ook schriftelijk plaatshebben.
Hoe schrijf je een artikel, een nota, een bericht?
Vanuit een idee uiteraard.
Sommige mensen schrijven een tekst zonder doorha-

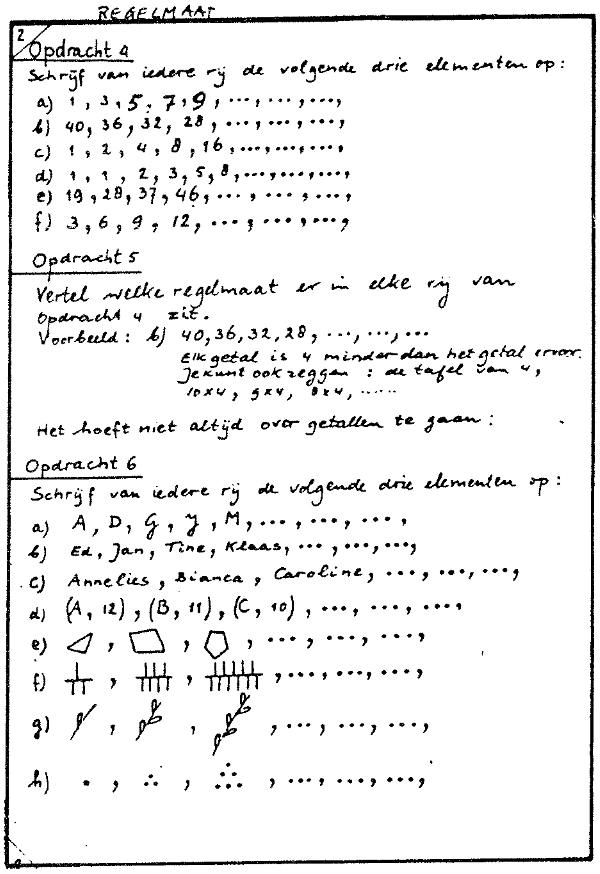
lingen. Anderen hebben het schrijven nodig als terugkoppeling naar hun idee. Het schrijven is deel van de vorming van de gedachtengang.
Ze hebben de geschreven zin nodig om te weten wat ze al of niet bedoelen.
Bij het gesproken woord zijn doorhalingen niet mogelijk.
Van veel uitgesproken gedachten zit de beste formulering in de laatste zinnen. Alle vorige zinnen hadden tot doel te komen tot deze betere formulering. Sommige sprekers hebben veel tijd nodig.
In groepswerk kan de gedachte, het inzicht, vorm krijgen door het gemeenschappelijk herformuleren van uitgesproken gedachten.
In de wiskunde is het gebruikelijk een nieuwe theorie te presenteren vanuit definitie, stelling, stelling, definitie, enz. In de presentatie zijn alle zijsporen, hulpformuleringen uitgewist.
Voor een wiskundige is het boeiend het spoor terug te volgen naar de gedachtengang, de worsteling en deze worsteling zelf te maken en zo te komen tot de eindformulering van de stelling met minimale gegevens.
Is dit vormkenmerk van wiskunde essentieel bij het wiskunde leren of alleen de moeite voor die paar leerlingen die aan de universiteit wiskunde gaan studeren? Dat is een vraag. Voor mij is een overtuiging, dat je er pas aan toe bent als je weet hebt gekregen van formuleren en herformuleren, als je wiskunde doen hebt ervaren als stellen en bijstellen, als definiëren en herdefiniëren, als veronderstellen en verwerpen.
Bij deze drie leerlingen is iets te zien van wiskunde doen.
Het eerste deel – ieder maakt voor zich de opgaven – is daar niets over te zeggen. Achteraf blijkt dat toen bij Marcel plotseling een inzicht doorbrak.
Marcel leert en oefent verder door te verwoorden. De anderen leren van hem dat er achter het links en rechts optellen en vermenigvuldigen een begrijpen mogelijk is.

Petra realiseert zich dat ze de sommen wel kan maken maar nog niet toe is aan dat niveau van begrijpen. 'Ik weet niet hoe ik 't uit moet leggen.' Ik interpreteer dat ze vindt dat zoiets er ook bij hoort, anders is het geen wiskunde.
Naar mijn mening is dat een heel belangrijk inzicht in wat wiskunde doen is.

In het eerste verslag van een groepje leerlingen van een brugklas is sprake van het tegendeel.
Leerlingen zijn niet in staat zich iets voor te stellen bij $0{,}01 \times 30$. Ze hebben geen zekerheid over de juistheid van het toepassen van de algoritme. Het sommetje $4 \times \frac{1}{2}$, 'dat doe je zo'.
'Van die vier maak je vier eenden'.
Het zinnetje 'van die vier maak je vier eenden', kun je honderdmaal herhalen, het helpt geen zier voor het begrijpen. De taaluiting 'je maakt er vier eenden van', komt niet voort uit een begrijpen. Marcel begrijpt iets bij $\frac{1}{2}x = -8$ en vindt daar taal bij, zijn eigen taal. Bij de tweede formulering is hij er al achter.
'Je maakt er eenden van', is een geleende zin zonder onderliggend begrip. De bezigheden bij $0{,}01 \times 30$ en $4 \times \frac{1}{2}$ zijn een samenstel van 'dat doe je zo 's'. De kunst is bij elk sommetje de juiste 'dat doe je zo' te weten. Of je weet het, òf je vraagt het òf 'daar is het antwoordenboek goed voor'.
Wij zijn geneigd dit wiskunde te noemen omdat 't volgens ons gaat over delen in $\mathbb{Q}$.
Opgave 3 was:
3 In de volgende tabel is aangegeven dat het quotiënt van een positief en een negatief getal negatief is. Vul de tabel verder in:

| : | pos | neg |
|---|---|---|
| pos | | neg |
| neg | | |

en dat ziet er wiskundig uit.
Maar in het beschreven fragmentje speelt de – bij $4 \times -\frac{1}{2}$ geen enkele rol.
De leerlingen worstelen met $4 \times \frac{1}{2}$, via de vier eenden komt daar 2 uit en daar moet nog een min voor.
Aan het algoritselen met breuken is al weer een nieuwe algoritsel toegevoegd over rekenen met negatieve getallen. Zoiets als 'min en min is plus'.
Voor de wiskunde-leraar hebben al die sommetjes hun plaats in een systematische opbouw: de verkenning van het rekenen in $\mathbb{Q}$. Daarop berust de legaliteit van deze besloten samenkomst.
Voor leerlingen ontbreekt alle overzicht.
Er komt steeds een nieuw sommetje op het schermpje.
De samenhang met het voorgaande en het volgende is 0,0000 (om met Marcel te spreken) wiskunde leren door de details te oefenen.
Deze leerlingen lopen niet echt tegen problemen op. Er zijn geen grote problemen, steeds kleine stukjes. Er is geen overzicht over wat we aan 't doen zijn. Bomen, zonder bos.
Dat is in strijd met het wezen van wiskunde doen.
Bij wiskunde doen hoort nu net keuzen maken zoals: Nu ga ik van het geheel even naar dat deeltje daar moet ik wat op vinden want als dat lukt dan kan ik in het grote geheel....
De leraren van deze school hebben gekozen voor wiskunde-onderwijs dat beter past in de middenschool.
Voor volgend jaar zijn andere materialen gemaakt of aangeschaft.
Bij de bespreking tussen de leraren over een ontwerp leerlingen-tekst van Harm speelt dezelfde vraag 'Wat is dat wiskunde doen' op de achtergrond. Blz. 2 is in bespreking.



REGELMAAT

2 Opdracht 4

Schrijf van iedere rij de volgende drie elementen op:

a) 1, 3, 5, 7, 9, ..., ..., ...,
b) 40, 36, 32, 28, ..., ..., ...,
c) 1, 2, 4, 8, 16, ..., ..., ...,
d) 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., ..., ...,
e) 19, 28, 37, 46, ..., ..., ...,
f) 3, 6, 9, 12, ..., ..., ...,

Opdracht 5

Vertel welke regelmaat er in elke rij van opdracht 4 zit.

Voorbeeld: b) 40, 36, 32, 28, ..., ..., ...
Elk getal is 4 minder dan het getal ervoor. Je kunt ook zeggen: de tafel van 4, 10×4, 9×4, 8×4, ......

Het hoeft niet altijd over getallen te gaan:

Opdracht 6

Schrijf van iedere rij de volgende drie elementen op:

a) A, D, G, J, M, ..., ..., ...,
b) Ed, Jan, Tine, Klaas, ..., ..., ...,
c) Annelies, Bianca, Caroline, ..., ..., ...,
d) (A, 12), (B, 11), (C, 10), ..., ..., ...,
e) ..., ..., ...,
f) ..., ..., ...,
g) ..., ..., ...,
h) ..., ..., ...,

■

Ruud: 'Hoe moeten de leerlingen hiermee werken. Je ziet het of je ziet het niet.'
Harm: 'Toch moet je iets anders doen dan voorzeggen. Da's wel moeilijk.'
Leo: (ironisch) 'Kijk eens goed.'
Harm: 'Ze moeten ook leren dat als de eerste truc niet werkt, dat je dan niet op moet houden. Maar dat gaat tegen hun opvoeding in. Ze zijn gewend aan sommen met één uitkomst, die volgens de regels is te vinden.'
Ruud: 'Maar wat voor wiskundige activiteit verwacht je nu bij 1, 2, 4, 8, ... Je ziet 'verdubbelen' of je komt er nooit achter.'
Harm: 'Ken je die getallen? Kijk nog eens, misschien zie je iets. Blijf proberen.'
Cor: 'Harm bedoelt: hoe breng je ze tot activiteit. Misschien niet meteen wiskundige activiteit.
De wiskundige benadering die ze vaak hebben kan ook blokkeren. Die is niet flexibel.'
Ruud: 'Maar toch vind ik de wiskundige activiteit heel kaal.'
Cor: 'Waarom niet opgave 4 en 6 mengen? Het lijkt of het alleen over getallen gaat, maar dat wil je van het begin af niet.'
Theo: 'Vraag ook naar de 13e van rij 4b.'
Ruud: 'Of de 50ste. [Waarschijnlijk bij rij a?] En ik val over 'tafel' in opgave 4.'
Harm: 'Ze vergelijken steeds met het getal ervoor. Steeds die verschillen. Een formule of iets dergelijks is wel heel ver. Achterin het pakket komt dat wel.'
Theo: 'Toch blijft het moeilijk om kritisch over de oplossing te denken. Hoe stuur je en wat accepteer je.

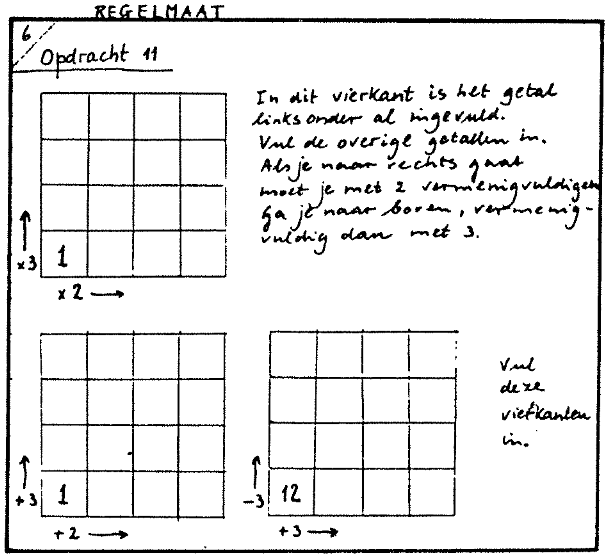
'Tafel van vier' is niet volledig, maar als een leerling daarmee komt moet je toch zeggen: Oké. Hoe ver ga je?'
Harm: 'In de groepjes wordt uitgewisseld en vergeleken. Dan is er ook vaker herkennen.'
Ruud: 'Maar de leraar moet er iets aan doen.'
Cor: 'Maak een waarschuwing in de docentenhandleiding.' ■

De vraag "Wat is wiskunde" laat nogal wat verschillende antwoorden toe. Voor Annabel had het met redeneren te maken. Redeneren om een vaststaand, zeker resultaat te krijgen. Leerlingen hebben vaak de indruk dat er maar één weg naar het éne resultaat is. Hoe komen ze er bij!
Wij stellen: het zoeken van je eigen weg, het vechten voor overzicht, het in- en uitzoomen, daar zit de wiskunde. In de sectievergadering spelen verwante, maar toch in verschillende visies op wiskunde hun rollen.
Kijk je naar het antwoord "16" op de vraag "wat komt na 1, 2, 4, 8 ...?", dan is dat kaal. Je ziet het verdubbelen of je ziet het niet. Harm kijkt anders: hij heeft het gezien in de brugklas en denkt daarvandaan. "Ze vergelijken met het vorige getal en kijken naar de verschillen." Omdat er nog meer voorbeelden zijn levert de benadering toch wel wat meer wiskunde op dan je verwacht. Zo wordt de rij van Fibonnacci "de vorige komt erbij" en bij 1, 2, 4, 8 ... "hijzelf erbij". Een stap verder is het overzicht-over-het-geheel. Vragen naar de 50ste kan dat stimuleren.
De opmerking over de tafel van vier is een stap in de richting van overzicht krijgen. Het is ook echte leerlingentaal, al staat het in het boekje.
Toch weet je: als een leerling het evident goede antwoord heeft gevonden, dan is er voor de rest van zijn/haar groepje niets meer te doen. Er is kortgesloten. Er ontbreekt toch nog iets.
In het laatste deel van de bespreking gaat het over regelmaat die minder evident is. Men vindt het pakket te veel voorgestructureerd. M.a.w.: er is te weinig kans om zelf overzicht te bevechten.
Andere mogelijkheden komen op tafel.

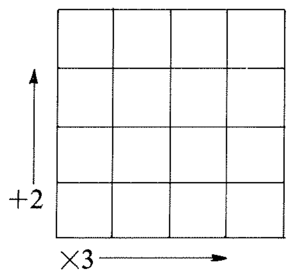
■

Cor: 'Misschien kun je werken met de groei van de Nederlandse bevolking. Dan kunnen ze ook zelf informatie verzamelen. Daar hebben we ooit eens over gepraat.'
Harm: 'Zoiets heb ik in het biologieboek gezocht. Je kunt vragen: klopt dat nou wel?'
Leo: 'Leuk dat voorspellen bij die getalrijen hoor. Maar hier moet je juist zien dat 't niet kan.'
Harm: 'Je moet voor- en tegenvoorbeelden geven.'
Rob: 'En ook eens een rij die zo ∿∿ doet.'
Dit alles is naar aanleiding van de rijen van Fibonnacci naar boven gekomen. Iets later:
Ruud: 'Het gaat om: kun je met behulp van regelmaat de toekomst voorspellen?'
Theo: 'Laat ze maar eens zelf zoiets uitzoeken. Atlas erbij. 't Lijkt ook beter groepswerk.'
Rob.: 'Misschien doen ze zoiets al bij aardrijkskunde..'
Theo: 'En heeft het documentatiecentrum weer eens nut.'

Cor stuurt terug in de richting van de te bespreken tekst. Er zijn voorstellen om de opgenomen opteltabel en vermenigvuldigtabel




te vervangen door spoortreintabel en BTW-tabel. Die zijn ook optel- en vermenigvuldigtabel, maar niet zo regelmatig. Harm wil echter juist regelmaat.
Natuurlijk komt de volgende tabel ook ter sprake:




Dat conflict komt er niet in! (Tenzij die BTW-tabel wordt opgenomen want die is helemaal geen vermenigvuldigtabel maar juist van dit verboden type!)
Ruud: 'Je kunt niet altijd regelmaat voortzetten. Dat idee mag je niet bevestigen.

$$2 : 2 = 1$$
$$1 : 1 = 1$$
$$0 : 0 = ?$$

Theo: 'Misschien is een mooie vraag: Wat komt na 1, 2 ...? Daar is discussie over mogelijk. Het is open. Kansen voor creativiteit te over!'
Cor sluit nu de discussie af met "Alles is regelmatig." Toch worden er nog afspraken gemaakt over verdere besprekingen. ■

.........................................

De vraag "Wat komt na 1, 2, ...?" lijkt komisch, maar geeft goed aan wat er loos is. Bij 1, 2, 4, 8, ... lijkt er maar één antwoord mogelijk. Als je dat detail te pakken hebt, stap je naar het volgende detail.
Na 1, 2, ... kun je niet alleen "4" antwoorden. Je bent nu uitgedaagd te denken over wat regelmaat eigenlijk is. Je bent op glad ijs. De richting staat niet zonder meer vast. Het overstijgt de details van 1, 2, 3, 4, ...? en 1, 2, 4, 8, ...? Ineens wordt het wiskunde...

## Terugblik

Een serie bezoeken aan een middenschool in wording.
Wij hebben veel opgeschreven: groepsgesprekken, klassegesprekken, babbeltjes in de wandelgangen, sectieoverleg, zelfs ook een aantal suggesties over min of meer wiskundige activiteiten in de omgeving van de school. Veel meer dan uiteindelijk in dit artikel staat.
Wij hebben uit al deze indrukken twee aspecten naar voren gehaald.
Het samenwerken:
Er zijn ontzaglijk veel details waarin het zich manifesteert. Veel kinderen herkennen de details niet als behorend bij het geheel samenwerken. We stellen hele hoge eisen aan leerlingen.
Wiskunde doen:
In ons wiskunde-onderwijs zijn we veelvuldig bezig met de details en de onderdelen. Voor de leraar is er wel een samenhang. Voor de leerling is die er niet.
We stellen – wiskundig gesproken – lage eisen aan de leerling. De leerling hoeft maar zelden zelf objectieven te wisselen van tele naar groothoek en andersom.
We leggen deze ruwe tekst voor aan de voltallige wiskundesectie. De bespreking heeft plaats begin juli, de zomervakantie is nog niet aangebroken, de lessen zijn beëindigd, rondom het rooster heerst verhoogde paraatheid, het vergader- en overlegwezen bloeit in de school.

We zijn onzeker hoe de sectie onze tekst zal opnemen. Uiteindelijk zijn wij passanten die een paar keer komen praten, lessen volgen en daarover onze zienswijze openbaar maken. Al schrijvend komen we aan de persoon van de leraar en de leerling.
We stellen dit aan de orde.
Een agogische truc om stoom af te laten blazen of gedrag behorend bij een onderzoekshouding? Wij willen het graag op het tweede houden. We onderzoeke en beschrijven; daarbij horen vragen als:
Hoe ervaar je de onderzoeksprocedure?
Herken je wat we opschrijven?

Een rijk gesprek volgt waarin wij impulsen krijgen voor de opzet van het vervolg van dit werk, ons bewust worden van grote lijnen in ons onderzoek.
Voor de sectie is onze tekst o.a. aanleiding zich bewust te maken van de fase waarin het werk verkeert.
Samen stuiten we op problemen als: hoe leer je de algebra zonder de grote lijn uit het oog te verliezen.
De wiskundesectie geeft ook een duidelijk signaal aan ons: Denk erom, we willen het hier niet bij laten.
We worden het hierover eens, we maken nieuwe afspraken, een accoord dat geen slotaccoord is.

(1) Kindt, M. *Regelmatige Figuren* I.V.I.O. Lelystad, 1975.