Differentialen (2)

Ja of neen en zo ja, hoe?

H. Freudenthal

OW & OC, R.U. Utrecht

Differentials – yes or no, and if so, how?
Against exorcisers of differentials and their quotients the author stresses their didactical value. The least and most fundamental thing students have to learn in a calculus high school course is differentials and their quotients. Elaborating on "Mathematics as an Educational Task" the author claims in differential equations – an exam subject at ours – forming rather than solving them is the didactically crucial point where differentials enter. Two variables is another topic where differentials play a didactical part.

In de laatste Nieuwe Wiskrant stond het eerste gedeelte van dit artikel waarin een pleidooi wordt gehouden voor differentialen op het v.w.o. Dit naar aanleiding van een discussie over dit onderwerp in Euclides. Het slot van dit artikel volgt hierbij.

Twee variabelen

Het vorige artikel was een lange inleiding van sfeer scheppen, want waar ik naar toe wilde, dat zijn de differentiaaluitdrukkingen:

$f(x,y)dx+g(x,y)dy$

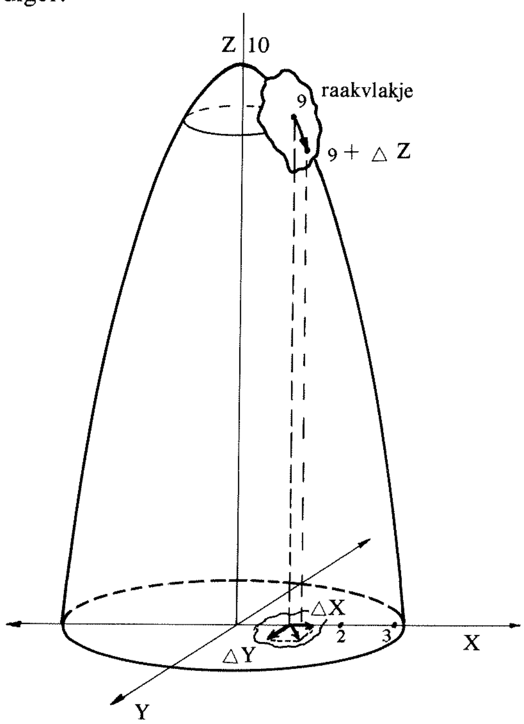
die op de eindexamens aan de orde worden gesteld. Laat ik ze in een bredere context plaatsen. Op het gevaar af, dat ik J. de Lange het sappigste HEWET gras voor de voeten wegmaai.
Trouwens, ik herhaal alleen – maar dan breedvoeriger – uiteenzettingen uit mijn eerder geciteerde boek.(1) Wie "Functies van 2 Variabelen"(2) kent (of liefst zelf gebruikt) weet hoe rijk geschakeerd dit onderwerp is en gepresenteerd kan worden – een hoorn des overvloeds.

Trouwens, de variabelen in dit boekje zijn precies waarvoor ik pleit dat ze horen te zijn:
niet letters waar je iets voor mag substitueren, maar echte variabelen, coördinaten van punten die in het (x,y)-vlak of in de (x,y,z)-ruimte bewegen.
Laten we met zoiets als

$z=10-(x^2+y^2)$

beginnen en z zien als lengte (eventueel negatief) van een loodlijn opgericht in het punt (x,y).

Als (x,y) het vlak doorloopt, beweegt (x,y,z) op een oppervlak, dat ik expres zo heb gekozen dat het boven het (x,y)-vlak op een berg lijkt. Dalen mogen er ook wezen, maar om te beginnen, vind ik een berg aardiger.



Een grote rol speelt in 't vervolg de projectie van het kromme oppervlak op het (x,y)-vlak, die we, als

afbeelding beschouwd, π zullen noemen, en de inverse π^{-1} van π, die het (x,y)-vlak als het ware oplicht. Het is nuttig, π en π^{-1} niet alleen in afzonderlijke punten te beschouwen, maar ook na te gaan – ook algebraïsch – hoe hele krommen in het (x,y)-vlak en op 't oppervlak op elkaar betrokken zijn, in 't bijzonder dat aan rechten in het (x,y)-vlak parabolen op 't oppervlak beantwoorden.
Ook hoe aan raakvectoren van zulke krommen weer raakvectoren beantwoorden, dient aanschouwelijk te worden ingezien alvorens het straks door middel van differentialen algebraïsch wordt uitgedrukt.
Als je bijvoorbeeld in het punt (1,0,9) op 't oppervlak staat, kun je nog heel wat kanten uit; in de π-projectie (1,0) kun je overeenkomstig alle kanten uit.
Of omgekeerd: Ik ga in het (x,y)-vlak van (1,0) naar $(1+\triangle x,\triangle y)$.
Wat gebeurt dan met z?
Hij gaat van:

9 naar $9+\triangle z$.

Dus z verandert met

$$\triangle z=-2x\triangle x-(\triangle x)^2-(\triangle y)^2,$$

Oftewel

$$\triangle z=-2x\triangle x+\ldots$$

waar de stippeltjes weer iets "van kleinere orde" aangeven. Of met differentialen geformuleerd: aan de oneindig kleine wegvector

(dx,dy)

beantwoordt bij z een

$$dz = -2xdx$$

en:

(dx,dy,dz)

is nu een oneindig kleine raakvector aan het oppervlak in het punt (1,0,9). Al deze raakvectoren samen maken het raakvlak in dit punt op.
Laten we een ander punt (x,y) in het vlak kiezen, waaraan door π^{-1} een punt (x,y,z) op 't oppervlak beantwoordt. Ik ga in het (x,y)-vlak

van (x,y) naar $(x+\triangle x,y+\triangle y)$.

Wat gebeurt er met z? Het gaat

van z naar $z+\triangle z$.

Dus z verandert met:

$$\triangle z=-(2x\triangle x+2y\triangle y+(\triangle x)^2+(\triangle y)^2)$$

Oftewel:

$$\triangle z=-(2x\triangle x+2y\triangle y)+\ldots$$

met de gebruikelijke betekenis van de stippeltjes.
Of met differentialen geformuleerd: aan de oneindig kleine wegvector:

(dx,dy)

beantwoordt bij de z een:

$$dz = -2xdx - 2ydy,$$

die we natuurlijk ook rechtstreeks hadden kunnen verkrijgen,

$$dz=d(10-x^2-y^2)=-d(x^2+y^2)=-2xdx-2ydy.$$

Weer is

(dx,dy,dz)

een oneindig kleine raakvector aan het oppervlak in het punt (x,y,z) en deze raakvectoren samen maken het raakvlak in (x,y,z) aan het oppervlak op. Preciezer: op het raakvlak in (x,y,z) ga ik

van (x,y,z) naar $(x+\overline{\triangle x}, y+\overline{\triangle y}, z+\overline{\triangle z})$

waarbij volgens

$$dz=-(2xdx+2ydy)$$

nu geldt:

$$\overline{\triangle z}=-(2x\overline{\triangle x}+2y\overline{\triangle y}).$$

Op het oppervlak was het

$$\triangle z=-(2x\triangle x+2y\triangle y)+\ldots$$

Dus de z van raakvlak en oppervlak verschillen in de buurt van (x,y,z) onderling maar in iets van kleinere orde van grootte.
Men kan hier nog een aantal vragen aan vastknopen. Bijvoorbeeld: onder welke omstandigheden is dz=0? Antwoord: als

$$dx:dy=y:x.$$

dz=0 betekent dat z constant is, dus dat de vector (dx,dy) aan een isohypse in het (x,y)-vlak raakt. Inderdaad wordt dit in bovenstaande evenredigheid uitgedrukt.
Algemener: je kunt

$$dz=-2xdx-2ydy$$

opvatten als inproduct van de vectoren

$(-2x,-2y)$ en (dx,dy).

dz=0 betekent dat dit inprodukt 0 is, dus dat die vectoren op elkaar loodrecht zijn.

Je kunt je verder afvragen voor welke wegvectoren (dx,dy) van vaste (oneindige kleine) lengte dz extreem (minimaal of maximaal) wordt. Wel, dit is het geval als (dx,dy) evenredig met (x,y) is. Dat zijn dan de richtingen waar het oppervlak het sterkste helt.
Ik laat het bij dit ene voorbeeld dat in de onderwijspraktijk echter niet het enige zou moeten blijven, alvorens grotere algemeenheid wordt betracht. Hoe dit kan zal ik nu laten zien.
Er is nu sprake van een door

$$z=\phi(x,y)$$

gegeven oppervlak. Rond het punt

(x_o, y_o, z_o)

wordt dit in eerste benadering vervangen door zijn raakvlak.

$$z=z_o+a(x-x_o)+b(y-y_o),$$

dus:

$$\phi(x,y)=\phi(x_o,y_o)+a(x-x_o)+b(y-y_o)+\ldots$$

waarbij de stippeltjes iets van kleinere orde van grootte aanduiden. Laten we dit preciseren: iets dat klein is vergeleken bij de afstand tussen (x,y) en (x_o,y_o), dus dat door $\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}$ gedeeld nog naar 0 gaat, als (x,y) naar (x_o,y_o) gaat.
De coëfficiënten a,b hangen uiteraard nog van het raakpunt (x_o,y_o,z_o), dus van (x_o,y_o), af. Hoe bereken je ze? Door ϕ respectievelijk naar x en y te differentieren en achteraf (x,y) aan (x_o,y_o) gelijk te stellen.
Dus:

$$\phi(x,y)=\phi(x_o,y_o)+\phi_x(x_o,y_o)(x-x_o)+\phi_y(x_o,y_o)(y-y_o)+\ldots$$

In plaats van ϕ_x en ϕ_y schrijf je ook respectievelijk

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} \text{ en } \frac{\partial\phi}{\partial y}$$

Een andere schrijfwijze van het voorafgaande is

$$\phi(x+\triangle x,y+\triangle y)-\phi(x,y)=\phi_x(x,y)\triangle x+\phi_y(x,y)\triangle y+\ldots$$

of in differentiaalschrijfwijze per definitie:

$$dz = \phi_x dx + \phi_y dy$$

of

$$dz = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy$$

Het doet aan de differentiaaluitdrukkingen uit de VWO examens denken, met het verschil dat wat ik eerder noemde

$f(x,y)dx+g(x,y)dy$

niet gelijk aan 0 gesteld is, maar dat dz afkomstig is van een

$z=\phi(x,y)$

Weer kunnen we ons afvragen wat hier dz=0 betekent. We krijgen dan z=constant, dus een isohypse in het (x,y)-vlak van het oppervlak.

De oplossingskrommen van

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}\,dy = 0$$

zijn de isohypsen in het (x,y)-vlak van het oppervlak dat door

$z=\phi(x,y)$

gegeven is.

Je kunt je nu omgekeerd vragen of bij een willekeurig gegeven differentiaalvergelijking

$f(x,y)dx+g(x,y)dy=0$

een oppervlak met als isohypsen net de oplossingskrommen van de gegeven differentiaalvergelijking. In 't algemeen is dit zo. Immers stel dat je de oplossingen in de vorm

$\phi(x,y)=\text{constant}$

kunt schrijven, dan hoef je alleen het oppervlak

$z=\phi(x,y)$

te nemen.

Dit betekent echter niet dat nu ook meteen

$$f(x,y)=\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y),g(x,y)=\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y)$$

is. Immers hieruit zou volgen door differentiatie van de eerste vergelijking naar y en de tweede naar x

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial x}$$

hetgeen a priori niet vervuld hoeft te zijn. Wel lukt het met een zogenaamde integrerende factor ρ, de gegeven differentiaalvergelijking door een equivalente

$\rho(x,y)f(x,y)dx+\rho(x,y)g(x,y)\,dy$

te vervangen, zodat nu inderdaad

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\rho f,\ \frac{\partial\phi}{\partial y}=\rho g$$

is, maar laten we daar niet dieper op ingaan.

Het is toch al een te lang verhaal geworden, dat me echter nuttig leek – althans voor een onderwijsgevende, die de traditionele examenopgave ook in een bredere context geplaatst mag zien.

(1) Freudenthal, H. *Mathematics as an Educational Task* 1973. Of: *Mathematik als pädagogische Aufgabe* 1973, 2. Aufl. 1977. Hoofdstuk XVII.

(2) Lange, J. de: *Funkties van 2 variabelen*, IVIO, 1978. Lelystad.