

# Probleemgestuurd onderwijs

Een inspirerende ervaring in Maastricht

F. Goffree

S.L.O. Enschede

## Summary

*The Medical School of the University of Limburg – the youngest among the Netherlands Universities – has chosen a new style of instruction: via applications the students get access to the available knowledge. It is what they call problem steered instruction aiming at active acquirement of knowledge, integration of knowledge areas and selfreliance. A good idea for mathematics teacher training, or isn't it?*

## Wiskundeonderwijs

Hoewel over wiskunde en wiskundeonderwijs verschillend gedacht kan worden, zal niemand ontkennen dat er in de wiskundeles problemen worden opgelost. Het terrein van het probleemoplossen is bij uitstek dat van de wiskundeleraar, en de rekenonderwijzer en dat van degenen die gebruik maken van reken- en wiskundeonderwijs om hun problemen op te lossen. In een krant voor wiskundeleraars kun je zo'n uitspraak misschien wel doen, maar daarmee is hij nog niet waar. Beter gezegd: daarmee is niet de hele waarheid gezegd. Andere vakgebieden hebben eveneens vakspecifieke problemen, die ook door leerlingen in de school opgelost dienen te worden. Ik wil me hier evenwel beperken tot wiskundeonderwijs. Als dat goed wordt gegeven, worden niet alleen opgaven gemaakt, maar wordt er ook geleerd hoe je in het algemeen problemen kunt aanpakken. Het gaat dan bijvoorbeeld niet alleen om het vinden van de oplossing van een gegeven stelsel vergelijkingen, maar ook om diverse methoden voor het oplossen van stelsels van twee vergelijkingen. Dit voorbeeld is vrij laag bij de grond en nogal algoritmisch bepaald. Net zoals het voorbeeld van de staartdeling. Basisschoolkinderen leren niet één, of wellicht honderd staartdelingen maken, maar ze leren een algoritme, die voor 'alle' staartdelingen bruikbaar is. Algoritmische regels hebben maar een beperkt toepassingsgebruik. Vanuit wiskundig didactisch standpunt worden ze ook niet zo erg gewaardeerd. Men spreekt van trucjes of kunstjes, die routineus en zonder enig inzicht (geleerd en) toegepast kunnen worden. Meer waardering is er voor een heuristische aanpak. In goed wiskundeonderwijs leren kinderen bepaalde zoekregels, die in het algemeen steun bieden bij het oplossen van wiskundige opgaven. Bij een dergelijk heuristisch wiskundeonderwijs, waarin het minder gaat om standaardopgaven met standaardoplossingen, stelt men

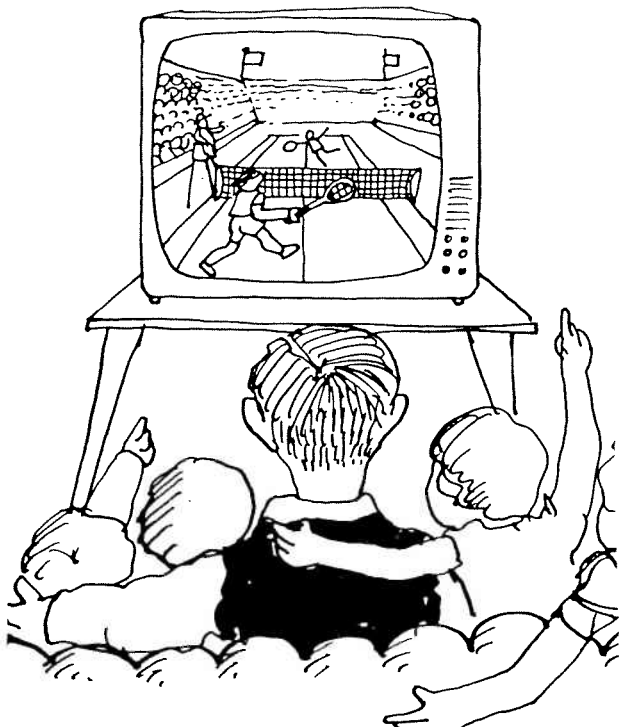
zich tot doel een wiskundige attitude te ontwikkelen. Die houdt ondermeer in dat de leerling het leuk vindt met betrekking tot nieuwe problemen 'op onderzoek te gaan' en dat hij daartoe ook een (nogal persoonlijk geaard) instrumentarium heeft verworven.

## DE SOM VAN ALLE CIJFERS

Om de getallen 1 tot en met 20 op te schrijven hebben we 31 cijfers nodig. De som van die cijfers is 102. Wat is de som van alle cijfers die nodig zijn om de getallen van 1 tot en met 1 miljard (1.000.000.000) op te schrijven? Dit probleem werd bedacht door een zekere Leo Moser en gepubliceerd in 1950 in Scripta Mathematica als no. 224 van de rubriek "Curiosa". De oplossing hoeft niet meer dan 10 regels te beslaan; het gaat hier namelijk meer dan ooit om de idee, die vondst. Enkele eenvoudige rekenkundige bewerkingen volstaan.

Daar ga je eens lekker voor zitten. Goed lezen wat het probleem is, constateren dat je zoiets nog niet eerder hebt opgelost. Dan vereenvoudig je het probleem: miljard wordt duizend. Dit past op een eenvoudige kilometerteller. Ah, nu heb je een aardig denkmodel. Je laat 'alle' getallen van 1 t/m 999 'even' passeren. De systematiek van het positiesysteem, geconcretiseerd op te tellen, brengt je op een idee.... Achteraf kun je over je eigen probleemaanpak nadenken: eerst gegevens en gevraagd goed doordacht. Geprobeerd om het probleem te herkennen. Vereenvoudiging aangebracht. Notatieschema gezocht. Denkmodel gevonden. Systematiek ontdekt.....

Deze reflectie op de eigen wiskundige activiteit (en het uitwisselen daarvan met anderen) is essentieel voor het verwerven van een wiskundige attitude. Een goede aanleiding voor reflectie vond ik in 'Zie je wel' (IOWO, 1979). Er wordt een situatie geschetst, waarin een vader met vier kinderen naar de T.V. zitten te kijken. Er is een tenniswedstrijd te zien.



Vader lokt de kinderen uit met de opmerking: "t Is niet eerlijk. Okker heeft een veel groter veld". De kinderen gaan daarop in, met serieuze en minder serieuze opmerkingen.

Aan de leerlingen wordt gevraagd om zich in deze discussie te mengen. Ik verwacht dat die leerlingen daardoor gaan nadenken over de wijze, waarop zij het perspectief gezien (of niet gezien) en begrepen (of niet begrepen) hebben.

In andere Nederlandse wiskundeschoolboeken heeft men, naar mijn weten, tot nu toe nog niet van dergelijke aanleidingen kunnen creëren (2).

De wiskundeleraar zal op dit punt zelf het initiatief moeten nemen.

### Wiskundendidactiek-onderwijs

Wiskundeleraars in opleiding moeten dus niet alleen wiskunde leren, ze dienen het ook te leren onderwijzen. Daarvoor komt heel wat kijken. Zien we hier even af van het belangrijkste aspect van het leraarschap, de omgang met leerlingen, dan blijft er veel pedagogische, didactische, onderwijskundige kennis over die verworven dient te worden.

Een wiskundeleraar moet van wisten weten als het gaat om zaken als begrip en inzicht, uitleggen en begrijpen, toetsen, motivatie, leerstofordening, leerdoelen, leren, leerprocessen, onderzoekend leren....

Daarover valt heel wat te lezen, en te discussiëren. In goed wiskundendidactiek-onderwijs tracht men deze kennis functioneel te laten worden, door bijvoorbeeld in de praktijk van het lesgeven, in het instituutpracticum of door middel van casestudies en incidenten de theorie zichtbaar te maken. Soms lukt het zelfs om de theorie toe te passen in praktische situaties. Momenten, waarop dat gebeurt ervaart men als een hoogtepunt in het opleidingsonderwijs.

### Wiskundeleraar als probleemoplosser

Elke wiskundeleraar ontmoet tijdens het onderwijzen velerlei problemen. De wiskundige opgaven, die het leerboek hem aanreikt, zijn daarvan meestal de minst lastige. Het zijn juist de pedagogisch-didactische problemen, die steeds weer een aanslag doen op zijn inventiviteit en vakmanschap.

Een paar voorbeelden uit de praktijk:

- Gegeven  $f(x)=4x^2+8x$   
Leerling: waarom mag je niet gewoon door 4 delen?

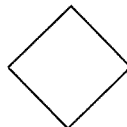


fig. 1

- "Dit is een ruit", zegt een brugklasser, "en het is geen vierkant".
- De klas heeft voor het eerst een lineaire vergelijking ( $3x+7=10$ ) opgelost. De leraar heeft een balans ten tonele opgevoerd, die als denkmodel aardig bleek te functioneren. Een dag later komt een leerling met de opmerking: "Mijn vader doet dat veel gemakkelijker: je brengt de 7 naar rechts, en zet er een min voor...."
- " $\sqrt{16+9}=4+3=7$ . Maar  $\sqrt{25}=5$ . Hoe kan dat nu?", zegt een knappe leerling.
- " $\frac{5x^3y^4}{5x^3y^3} = 11y$ " vindt een leerling in de brugklas.
- "Zijn mijn tanden een deelverzameling van mijn lichaam?" wordt er serieus gevraagd.
- $1:\frac{1}{3} =$  "Ik ben het regeltje vergeten!"(3)

Wat doe je als wiskundeleraar in dergelijke gevallen? De didactische problematiek vraagt om oplossingen die de kennis van het juiste wiskundige antwoord overstijgen. Tenminste moet je je in de vragensteller kunnen inleven, je moet je kunnen verplaatsen in zijn wiskundige kennisbezit, in zijn houding ten opzichte van de wiskunde, in zijn taaltje en denkwijze. Naast dit soort micro-didactische problemen vragen andere zaken, op grotere afstand van de individuele leerlingen, om deskundige aandacht:

- Behandel ik eerst vectoren in  $\mathbb{R}_2$ , en dan de negatieve getallen, of omgekeerd?
- Laat ik de leerlingen met vierkanten experimenteren om de stelling van Pythagoras te vinden en te bewijzen?
- Gebruik ik de context van groei om de exponentiële functie in te leiden?
- Laat ik het bewijs van de kettingregel weg of neem ik het onvolledige bewijs van het boek over?
- Hoe kan ik nagaan of mijn leerlingen inzicht hebben gekregen in het begrip differentiaal quotiënt?

En nog verder van de klas:

- Op welke gronden kunnen we beslissen om een andere serie leerboeken te gaan gebruiken?
- Hoe leg ik aan de ouders uit waarom de wiskunde van nu anders is, in de school, dan zo'n twintig jaar geleden?
- Hoe maak ik duidelijk wat mijn visie is op wiskundeonderwijs?
- Welke aangrijpingspunten heb ik voor een constructief gesprek over samenwerking met mijn collega natuurkunde?

### Toepassen, leren toepassen of leren door toepassen

Ook hier kan de vraag gesteld worden hoe een wiskundeleraar aan zijn vakmanschap komt. Is de vakdidactische know-how toegesneden op dit soort problemen. Of is het zo dat de a.s. leraar, na de bestudering van vakdidactiek, ook het toepassen nog moet leren? Net zoals in sommige wiskundeleergangen, eerst de theorie, dan de vraagstukken!

Misschien kan het ook andersom. Dat wil zeggen dat een confrontatie, tijdens de opleiding, met dergelijke praktijkgevallen, het vakdidactische kennisgebied voor hem ontsluit. Kan het zijn dat de behoefte aan nadere informatie (bijvoorbeeld over wat anderen uitgedacht en gepubliceerd hebben) tot een gemotiveerde studie van theoretisch didactische achtergronden aanleiding is?

### Artsen als probleemoplossers

Na deze lange inleiding kom ik dan eindelijk bij de aanleiding van deze notitie. Op de Rijks Universiteit van Limburg (Maastricht) koos men de laatst genoemde benadering voor o.a. de opleiding van artsen. Artsen zijn namelijk ook probleemoplossers. Zij worden geacht hun patienten op basis van veel kennis (van het menselijk lichaam, de natuurwetenschappen, ziekteverschijnselen, geneesmiddelen, therapieën, menselijke gevoelens, relaties e.d.) te helpen. In de traditionele opleidingen dienden de aankomende artsen éérst veel kennis te verwerven. Deze werd in verschillende specialismen onderwezen. Pas later in de opleiding moesten de studenten trachten de verworven kennis te integreren en toe te passen. Eerst de theorie, dan de toepassing.

### Een nieuwe opleidingsdidactiek

In Maastricht heeft men een andere weg gekozen. Het opleidingsonderwijs is zo ingericht, dat studenten via

de toepassingen toegang zoeken tot het beschikbare kennisbezit. Deze omkering, van toepassingen naar theorie, schetst evenwel een te simpel beeld van de gekozen opleidingsdidactiek. Het is niet zo dat oude leerboeken, waarin de theorie aan de praktische problemen vooraf ging, nu in omgekeerde volgorde moeten worden doorgewerkt. Een geheel nieuwe doordinking van het vakmanschap van de arts (eindtermen), de mogelijke bouwstenen (kennis en vaardigheden), het leren van studenten en het onderwijzen aan studenten bleek noodzakelijk. Men koos voor een didactische werkvorm, die aangeduid kan worden met 'probleemgestuurd onderwijs'. Via min of meer realistische problemen uit de artspraktijk worden de studenten in de gelegenheid gesteld zich het vakmanschap van arts te verwerven. Het komt er nu op neer in het kader van dat vakmanschap goede problemen te vinden. Dat 'goede' hier vele dimensies heeft, moet hierboven duidelijk zijn geworden.

Op de workshop, in januari van dit jaar door de R.U.L. ten behoeve van belangstellenden voor dit werk georganiseerd, kwamen tweedejaarsstudenten in actie op het volgende probleem:

#### *Koude Handen*

*Jantje de Groot (7 jaar) en zijn vriendje Piet de Bruin (7 jaar) spelen op een mooie heldere winterdag in de sneeuw.*

*Na een uurtje komt Jantje huilend thuis "Ik heb zo'n koude handen", zegt hij tegen zijn moeder. "Ik heb helemaal geen pijn", zegt Piet trots, "mijn handen gloeien". Moeder ziet dat Jantjes handen helemaal blauw zijn. Ze stopt ze onder luid protest van Jantje onder de koude kraan. "Gaat het nu beter?", vraagt ze even later. "Ze gloeien", zegt Jantje, "het lijkt wel of er heel veel naalden in prikken."(4)*

Dit probleem werd voorgelegd aan een zogenoemde onderwijsgroep, waarin men, via bepaalde ('heuristische') spelregels, op basis van gezond verstand en reeds in de groep aanwezige kennis, de eerste verkennende activiteiten al discussiërend verrichtte.

Ik vermoed dat de collega's wiskundeleraars met dit probleem ook een heel eind op weg kunnen komen. Niet om een 'eenduidige' oplossing te vinden – daartoe zijn deze opgaven ook niet bedoeld – maar om een behoefte aan nadere informatie duidelijk in kaart te brengen.

Voor het goed functioneren van een onderwijsgroep komt heel wat kijken. Het gaat erom dat men zich gezamenlijk zo sterk mogelijk inzet, geen tijd verliest door het inslaan van irrelevante zijsporen, individuele leerwinst zoekt op het bedoelde terrein, zich sociaal vaardig opstelt e.d. Een niet noodzakelijk op het terrein deskundige docent, tutor genaamd, bewaakt het proces.

De eerder genoemde 'spelregels' voor de discussie noem ik hier nog even(5). Ze zijn samengevat in de zogenoemde 'zevensprong'.

### Stap 1

Helder onduidelijkheden omtrent termen en begrippen op. Ga na wat nog onbekende begrippen in de probleembeschrijving betekenen.

### Stap 2

Probeer gezamenlijk tot een eerste probleemdefinitie te komen.

Beantwoord dus de vraag: "Wat is het probleem?"

### Stap 3

Analyseer het probleem binnen de groep. Ga na wat de verschillende groepsleden al over het probleem menen te weten. Beperk je daarbij niet alleen tot de feitelijke informatie ("ik heb ergens gelezen dat..."), maar probeer ook vooral op basis van je gezond verstand een aantal hypothesen te formuleren ("Zou het niet zo kunnen zijn dat...").

Zorg ervoor dat eerst ideeën op tafel komen, voordat je elkaars bijdragen kritisch onder de loupe neemt. Dat is namelijk de beste garantie dat ieders denkbeelden voldoende aandacht krijgen. Dit laatste heet de brainstormingstechniek.

### Stap 4

Inventariseer nu op papier puntsgewijs de verschillende aspecten van het probleem zoals die uit stap 3 naar voren zijn gekomen.

### Stap 5

Stel prioriteiten. Aan niet alle vragen en veronderstellingen kan aandacht worden besteed. Stel dus gezamenlijk vast welke aspecten van het probleem prioriteit horen te krijgen bij nadere studie.

Maak afspraken over eventuele werkverdeling.

### Stap 6

Zoek informatie buiten de groep. Zoek naar relevante literatuur, audiovisuele programma's of inhoudsdeskundigen.

### Stap 7

Synthetiseer de informatie. Rapporteer kort en bondig aan elkaar ieders individuele bevindingen en probeer gezamenlijk tot conclusies te komen. Wanneer er nog veel vragen overblijven, of nieuwe vragen worden opgeworpen, dan kan de groep op een dieper niveau van inzicht het proces vanaf stap 2 herhalen.

## Basisfilosofie

Het getuigt mijns inziens van grote moed om een bestaande, gerenommeerde opleiding, zo fundamenteel anders aan te pakken. Natuurlijk had men in Maastricht, bij het opstarten van de nieuwe Universiteit, een unieke kans om iets nieuws op te bouwen. Maar dan nog.

Het moet voor de initiërende onderwijskundigen een grote voldoening geven dat, volgens recente onderzoeksgegevens, de Maastrichtse artsen niet onderdoen voor elders opgeleide collega's.

Onderwijskundig is hier iets zeer bijzonders aan de hand. Ik bedoel te zeggen dat de manier van werken, hier gerealiseerd voor de medische studenten, fundamenteel verschilt van de aanpak in vele (sub)faculteiten, waartoe de vakgroepen onderwijskunde behoren.

Het verschil zit 'm in de opvatting over wetenschap, over wetenschappelijk werken, over leren wetenschappelijk te werken. Laat men zich bij het oplossen van wetenschappelijke problemen vaak leiden door de bestaande know-how (begin met een literatuurstudie), in probleemgestuurd onderwijs worden eerst gezamenlijk de witte plekken in het beschikbare kennisaanbod gesignaleerd. Dan gaat men op zoek, in de literatuur, bij deskundige docenten of bij praktiserende vaklieden.

Mogelijk vindt men de gewenste informatie, mogelijk ook niet. Vanuit wetenschappelijk standpunt (in het bijzonder voor hen die wetenschap als een proces beschouwen) zijn overigens juist die overgebleven witte vlekken interessant. Daaraan moet namelijk, ook ten behoeve van de 'praktijk', gewerkt worden.

## Achterliggende principes

Als je opleiding, vakmanschap en wetenschap zo beschouwt, is er sprake van overeenkomst.

De werkwijzen tijdens de opleiding, in de beroepsuitoefening en in het wetenschappelijk werk stemmen duidelijk overeen. Dit kan betekenen dat het leren van de afgestudeerden, tijdens de beroepsuitoefening, spontaan voortgang vindt.

In Maastricht heeft men de achterliggende principes expliciet verwoord:

- het gaat om actieve kennisverwerving;
- integratie van de kennisgebieden wordt tijdens de studie tot stand gebracht;
- continuïteit van studiegedrag is gewaarborgd;
- zelfstandigheid bij het studeren wordt bevorderd.

## Een karwei voor onderwijsontwikkelaars

Wie zou in welke opleiding niet deze principes tot de zijne willen maken? Ik ken geen wiskundelerarenopleider die bezwaar zou aantekenen. De grote problemen rijzen evenwel als het erop aankomt een opleiding inhoudelijk op basis van deze principes in te vullen. In Maastricht is men, zover ik kan beoordelen, al aardig ver gevorderd. Nergens zag ik een zo fundamentele opleidingsdidactische inbreng van onderwijskundigen, tot op het vlak van de onderwijsrealisering uitgewerkt. In nauwe samenwerking met de vakspecialisten hebben ze iets tot stand gebracht, dat hopelijk ook anderen zal inspireren. Dat die 'anderen' ook lerarenopleiders mogen zijn, in het bijzonder wiskundelerarenopleiders is een van mijn vele wensen.

- (1) NRC/Handelsblad, 20 febr., 1982.
- (2) Turnau, S., *The Mathematical textbook for Young Students*, in *ESM 11* (1980) 393-410.
- (3) Uit een mathematisch didactisch practicum voor begeleidende docenten van het MAVO-project-SLO 1981.
- (4) Uit: Werkboek bezoekers Workshop R.U.L. jan. 1982.
- (5) Smidt, H.G. en P.A.J. Bouhuijs, *Onderwijs in taakgerichte groepen*, Aula 803, 1980.
- (6) Wetering, G. v.d., NRC/Handelsblad, 28 jan. 1982.