Variabelen, letters, onbekenden, bekende onbekenden*)

H.G.B. Broekman
P.D.I., R.U. Utrecht

Summary

A few examples are to exhibit the difficulties students can meet if working with variables. The constructive and operational aspects of variables are discussed.
Conclusions:
- *An essential condition for learning to think is reflecting on one own's mental activity.*
- *An essential further condition for learning to work with variables is a good preparation including in particular or even necessarily learning to predict (and to formulae).*
- *Variables occur in schoolmathematics as empty spots or as place-holders.*

We werken als wiskundigen dagelijks met variabelen en toch, we weten er zo weinig van. (1) Er zit zoveel aan vast, dat we de neiging hebben er maar van af te blijven.
In dit artikel wil ik in het eerste gedeelte via voorbeelden een aantal moeilijkheden signaleren rond het gebruik van variabelen om vervolgens een aantal aspecten van 'variabelen' nader onder de loupe te nemen.
Maar eerst wil ik aandacht besteden aan het feit dat de meeste lezers ervaren hebben dat leerlingen letters vaak moeilijk vinden (m.i. vinden ze dat niet ten onrechte).

Letters gebruiken is moeilijk, of niet soms?

Vb. 1: $V = \{ P \mid d(P,A) = d(P,B) \}$
$W = \{ P \mid d(P,M) = r \}$
Opmerking van mijn zoon (Havo-leerling): 'wiskunde-leraren zijn net padvinders, die houden ook zo van geheimschrift'.
Vb. 2: (uit een examen-bundel)
Van een scherpe hoek x is $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$
Dan is $2 \sin x \cos x = ...$
A. $-\frac{5}{4}$ B. $-\frac{3}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{5}{4}$

Vraag: Wat wordt hier door x voorgesteld?

Vb. 3: (uit zomaar een boek)
$-2(x + 4) + 5(3 - x) = 14$
Opmerking van een Mavo-lerares: de leerlingen weten niet wat er staat, maar gelukkig kunnen ze deze vergelijking wel oplossen.

Vb. 4: Een mooi voorbeeld dat mij een paar jaar geleden aan het denken zette is het volgende:
Een leraar behandelde het 'liftspook' uit het boek "Passen & Meten".

ingedrukte knop	lift stopt op etage
5	8
8	11
2	5

Hierna gaf de leraar z'n leerlingen nog enkele gevallen om te 'berekenen'. Toen sprong ik er in met

x $\qquad$ (x + 3)

en op dat moment zwegen deze 12 à 13 jarigen uit een 1e klas van een lagere tuinbouwschool stil.
Op de vraag hoe ze aan de uitkomsten kwamen, volgden diverse redeneringen waaruit bleek dat ze best patronen ontdekt hadden (structuur!) en dat ze ook in staat waren dat weer in hun herinnering op te roepen, m.a.w. te REFLECTEREN op hun eigen (mentale) handelen. Alleen het verwoorden van de ontdekte regelmaat, de FORMULE weergeven in wiskundetaal (met letters en andere tekens), dát ging te ver!
Hierin zitten twee zaken die ik wat nader wil bekijken, voordat we teruggaan naar variabelen.

*) Naar aanleiding van een college uit de serie Achtergronden van de schoolwiskunde voor studenten van de R.U. Utrecht (voorjaar 1980). Hierbij werd dankbaar gebruik gemaakt van nog niet gepubliceerd materiaal van Joop van Dormolen en de critische kanttekeningen van Jaap Vedder.

Ten eerste het *reflecteren* en ten tweede het *voorspellen*, of – algemener – het maken van formules.

Het reflecteren

Zowel Russische leerpsychologen (Gal'perin, Davydov) als Amerikaanse (Guilford, Klaski) benadrukken steeds meer dat een wezenlijk onderdeel van leren is het leren reflecteren.
Het is in dat verband aardig om te zien hoe er verschillende reacties komen bij de volgende opdracht. (2)
Kinderen krijgen de volgende vier problemen op te lossen:

1. B C A N → N A C B
2. 5 2 3 7 → 3 7 5 2
3. K R T P → T P K R
4. 4 8 9 1 → 1 9 8 4

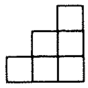
Alle vier de opgaven zijn in twee stappen op te lossen door achtereenvolgens steeds twee letters van plaats te verwisselen. De kinderen krijgen de symbolen op kaartjes en de kaartjes kunnen verlegd worden. Daarna wordt de vraag gesteld de opgaven te klassificeren, dat wil zeggen aan te geven welke opgaven op elkaar lijken en waarom.
Als wiskundigen zullen we geneigd zijn te komen met een inhoudelijke klassificatie (op grond van de oplossingsmethode, die we kennelijk terug kunnen roepen in ons geheugen o.i.d.), maar veel kinderen en ook volwassenen komen met een formele klassificatie (op grond van de uiterlijke vorm; letters of cijfers).
Voor de ontwikkeling van het denken is het goed het reflecteren op de algemene oplossingsmethode, het oplossingsprincipe te bevorderen. Dat kan o.a. door het verslag uitbrengen aan anderen over de gevolgde werkwijze bij het oplossen van een probleem en het opsporen van (actief luisteren naar) de (denk)werkwijze van anderen. We vinden dit terug in veel leerstofpakketjes van het IOWO, zoals bijv. bij het bepalen van het aantal verschillende uitslagen van een kubus. Een aantal goede voorbeelden zijn te vinden in Wiskrant 21 van maart 1980.
Ook de National Association of Independent Schools te Boston benadrukt in z'n materiaal het zoeken naar algemene oplossingsprincipes. Een belangrijk middel daarbij is het naar elkaar leren luisteren en met elkaar leren praten van de leerlingen. Een illustratief voorbeeld daarvan kreeg ik van Tom Barclay. (3)

De computer is defect en geeft de volgende optelling:
(a) 354 + 72 = 326
Welke fout maakt de computer?
Maak zelf ook zo'n opgave en leg die voor aan anderen om ze er achter te laten komen welke fout er ingebouwd zit.
Als niemand het kan raden geef je nog een tweede voorbeeld bij hetzelfde probleem. Ook kun je anderen de gelegenheid geven een voorbeeld te geven – bij jouw probleem – waarvan jij aangeeft of het juist of onjuist is.
Leerlingen kwamen met o.a. de volgende problemen:
(b) 321 + 72 = 15
(c) 508 + 72 = 500
(d) 112 + 37 = 482 en 23 + 125 = 355
(e) 348 − 48 = 348 en 308 − 48 = 268 (4)

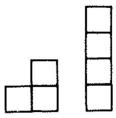
In de school vinden we het reflecteren o.a. terug telkens als we een leerling aanraden eens te kijken hoe hij/zij een vorige opgave aangepakt heeft; ook bij opgaven waarbij blikwisseling nodig is, d.w.z. een opgave waarbij juist het op een andere manier kijken nodig is. (5)

Het voorspellen; het maken van formules

Vb. 1: Volgens de Engelse wiskundige en psycholoog Richard Skemp is de grote kracht van wiskundige modellen dat ze naast een grote eenvoud (de geordende verzamelde natuurlijke getallen enz.) de mogelijkheid in zich hebben om voorspellingen te doen. Een van de voorbeelden die hij daarbij geeft – en dat is uit te breiden met vele, zowel algebraïsche als meetkundige – betreft het maken van een trapje van legoblokjes door 5-jarigen.



Pak genoeg blokjes voor de volgende traptrede



Pak genoeg blokjes om de tussenliggende trede te maken

Voor iets oudere kinderen zou de vraag kunnen worden: hoeveel blokjes heb je nodig voor een éентrap, tweetrap en zelfs voor een tientrap.
En wat willen wij wiskundigen dan zo graag? Natuurlijk een nette formule voor een n-trap.

Vb. 2: Tom Barclay gaf het volgende voorbeeld: Deel cuisenaire blokjes (6) (staafjes) uit aan groepjes leerlingen. Eenheid (wit), lengte 2 (rood), lengte 3 (groen), etc.

I Laat de leerlingen witte blokjes kop aan staart leggen en aangeven hoe groot het buitenoppervlak is. Vraag daarna om de gevolgde werkwijze (de redenering).

aantal blokjes	buiten-oppervlak (antwoorden)	gegeven redeneringen 11.a	11.b	11.c
1	6	4×1+2	6	1×6
2	10	4×2+2	6+6−2	2×6−1×2
3	14	4×3+2	10+6−2	3×6−2×2
↓	↓			↓
n	4n+2			n×6−(n−1)×2

II Zelfde opdracht als bij I (met rood, enz.):

Bij rood (lengte 2)	8n+2	n×10−(n−1)×2
Bij licht-groen (lengte 3)	12n+2	n×14−(n−1)×2
Bij lengte p	4pn+2	n(4p+2)−(n−1)×2

III Dezelfde opdracht, maar nu met de 'grootste zijvlakken' op elkaar.

Oppervlakte Aantal staafjes	lengte 1	2	3	4 ... p
1	6	10	14	
2	10	16	22	
3	14	22	30	
4	18	28	38	
n	4n+2	6n+4	8n+6	

symmetrie in de diagonaal

Bij lengte p en n staafjes:
$2(p+1)n + 2p = 2pn + 2n + 2p$
$2(pn + n + p)$
Opmerking: een aardige aanpak – via blikwisseling – is die waarbij ieder gestapeld blok beschouwt wordt als een nieuw blok. Je krijgt dan: (boven + onder) + (2 einden) + (voor en achterkant) = $2p + 2n + 2np$

Vb. 3: Hoe groot is het aantal diagonalen in een regelmatige 4-hoek; etc., etc.

Samenvattend

In onze algebra, maar ook in de meetkunde, komen we mogelijkheden te over tegen om leerlingen te oefenen in het reflecteren, het voorspellen en het maken van formules. (Reflecteren in de zin van terugblikken en voorspellen in de zin van vooruitkijken).
Waar komen we nu variabelen tegen? En op welke manier? En is dat dan echt zo moeilijk als we de leerlingen de kans geven zich daar goed op voor te bereiden? Ik verbeeld me niet het enig juiste antwoord te hebben op deze vraag, maar het voorgaande houdt voor mij wel de uitdaging in om verder te kijken dan louter het gemanipuleer met letters.

Waar komen we variabelen zeker tegen?

Het woordje 'zeker' heb ik onderstreept omdat ik hier een keuze maak. Ik kies uitdrukkelijk niet voor het uitdiepen van het *existentiële aspect* van de variabele. Van mij dus geen antwoord op de vraag 'wat *is* een variabele'? Degene die daarin geïnteresseerd is kan hierover o.a. iets lezen bij Vredenduin. (7)
Waar ik wel wat nader op in wil gaan is het *constructieve aspect* (heeft te maken met hoe je een variabele maakt) en het *operationele aspect* (wat je met een variabele kunt doen).
In de vorige paragraaf zijn we al enkele voorbeelden tegengekomen waarbij variabelen een rol speelden: nog niet zo expliciet bij het reflecteren op een gevolgde werkwijze, maar wel bij het beschrijven van een patroon, het opstellen van een formule.
Dat is iets anders dan:
vul in $5 = \square + \square$
Het is ook iets anders dan $5 = 2 + \square$

$5 = 2 + \square$ kom je tegen op de basisschool. Ik heb het gehaald uit het kwantiwijzer materiaal, een diagnostisch instrumentarium voor het omgaan met hoeveelheden. (8)
In dit materiaal kwam ik ook tegen $13 + 6 = 14 + \square$ én een poging om het '=' teken niet alleen voor 'daar komt uit' te gebruiken (wat wel zit in $3 + 2 = 5$, etc.).
We moeten wel bedenken dat dit gebruiken van een te vullen hokje best problematisch is als we naar open beweringen willen, m.a.w. naar 'echt open' plaatsen. Toch helpt dat open vakje ons wel op weg, want het bepaalt de plaats waar een getal moet komen en doet denken aan *'open plaats'* (plaatsbepaler/plaatsbezetter).
In het schoolboek Moderne Wiskunde deel 1 lezen we:

3.2 Open beweringen
Variabelen
De bewering "12 is een deler van 24" is waar. Van de bewering "p is de helft van 36" kunnen we nog niet zeggen of hij waar is. Dat hangt af van het getal dat je voor p invult.
Zeg je bijvoorbeeld "19 is de helft van 36" dan is de bewering niet waar. Beweringen als "p is de helft van 36" worden open beweringen genoemd. In een open bewering komt een open plaats voor. Deze open plaats moet nog worden ingevuld. We hebben op deze open plaats zo lang de letter p gezet. We hadden natuurlijk net zo goed een andere letter kunnen gebruiken een a, een k of een x bijvoorbeeld.
open beweringen
De letters die we op de open plaatsen zetten heten variabelen. Wat is de oplossingsverzameling van de open bewering "x is kleiner dan 8"?
variabelen

Maar daar zit m.i. nu net het probleem van veel leerlingen, net als voor de wiskundigen die vóór Descartes (letters werden voor het eerst gebruikt door François Viete 1560-1603) leefden.
Leerlingen hanteren letters (variabelen) meer als *plaatsvervangers*, als naamgever (label) voor een bepaald punt, getal, voorwerp, of iets dergelijks.
Op de manier van: figuur 3a, som 7b, het punt P, enz.
In feite gaat het daar in het volgende stukje uit "Getal & Ruimte" N1b ook over:

§ 3. *Letters in plaats van getallen.*
a. We stellen in de wiskunde getallen vaak voor door letters. Als a een getal voorstelt, dan is $a + 3$ de som van a en 3. De uitkomst van $a + 3$ weet je natuurlijk nog niet. Die hangt van a af. Als je weet dat a gelijk is aan 5, dan is $a + 3$ gelijk aan $5 + 3 = 8$. Als je weet dat a gelijk is aan 4, dan is $a + 3$ gelijk aan $4 + 3 = 7$. In de volgende tabel zijn voor a tien verschillende getallen genomen. Deze staan in de bovenste rij. In de onderste rij staan de uitkomsten van $a + 3$.

a	5	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4
a+3	8	7	6	5	4	3	2	1	0	−1

Dat leerlingen er inderdaad vaak zo op reageren weten de gebruikers van "Van A tot Z" deel 1b maar al te goed. Hoeveel leerlingen maken de hier volgende opgave b niet door 14 te substitueren in de vorm die ze bij a gevonden hebben (zoals de bedoeling is), maar door het inverse-voorschrift stap voor stap af te werken?

6. Het opstellen en lezen van samengestelde functies.

Een functie heeft als voorschrift:
1e tel er 2 bij
2e deel door 8
3e neem het tegengestelde

a. Hoe noteer je deze functie?
b. Wat is voor deze functie het beeld van 14?
c. Wat is in woorden het voorschrift van de inverse functie?
d. Hoe noteer je deze inverse functie?
e. Los op: $-(\frac{x+2}{8}) = -5$.

Ook de examencommissie die het MAVO-examen 1980 samenstelde hield rekening met het gebruik van letters. In de volgende opgave wordt de x duidelijk gebruikt als open plaats. Zodra je echter wilt gaan rekenen neem je een 'vast' getal en je kiest daarvoor de plaatsvervanger p.

Gegeven zijn de functies f en g gedefinieerd door $f(x) = x^2 + 2$ *en* $g(x) = x^2 - 2$. *Voor elke p geldt:*
1) $f(p) + g(p) \geqq 0$
2) $f(p) - g(p) \geqq 0$

A (1) en (2) zijn beide waar
B (1) is waar en (2) is niet waar
C (1) is niet waar en (2) is waar
D (1) en (2) zijn beide niet waar

Is het gek dat veel leerlingen voor p een of meer getallen kiezen en het dan even uitrekenen? In feite niet; ze begrijpen dat je voor x alle reële getallen mag invullen. Er wordt iets gevraagd over concrete reële getallen en 'dus' kies je er een paar. Wat vergeten wordt te zeggen – en aan te tonen – is dat het al dan niet negatief zijn van $f(p) + g(p)$ onafhankelijk van de keuze van p is.
Wie beduvelt hier eigenlijk wie?
Het is in ieder geval – ook zonder de niveau theorie van Van Hiele te kennen – duidelijk dat het doen van uitspraken over somfunctie resp. verschilfunctie een ander denkniveau vereist dan het doen van uitspraken over de afzonderlijke functies.

Voorzichtige conclusie uit het voorgaande:

Een van de grootste problemen bij het omgaan met variabelen – vooral in het middelbaar onderwijs – is het verspringen van de betekenis van de variabele. Soms gebruiken we variabelen als plaatsbepaler (open plaats), maar vaak ook als plaatsvervanger.
Een aardig voorbeeld bij deze conclusie leverde mijn oudste dochter bij het maken van de volgende opgave (Mavo-examen 1978). (9)
Opgave 4. *Gegeven zijn de functies f en g gedefinieerd door* $f: x \rightarrow x + 4$ *en* $g: x \rightarrow \frac{1}{2}x^2$.
De grafieken van f en g snijden elkaar in de punten A en B.
a. Bereken de coördinaten van A en B en teken de grafieken van f en g in één rechthoekig assenstelsel.
Op het lijnstuk AB ligt een variabel punt P. De loodlijn uit P op de x-as snijdt de grafiek van g in een punt Q en de x-as in een punt R met x-coördinaat k.
b. Bereken PQ in het geval dat k = 3.
c. Druk PQ uit in k.
Bereken k in het geval dat PQ maximaal is.

Opgave c leverde haar problemen op. Ze wist wel wat er bedoeld werd, maar was niet in staat PQ uit te drukken in k. Het berekenen van k in het geval dat PQ maximaal is pakte ze als volgt aan. Zij berekende PQ voor een aantal waarden van k $(-1, 0, 1, 2)$, ontdekte symmetrie rond $k = 1$ en concludeerde dat PQ maximaal was voor $k = 1$.
Hoe zullen we haar uitleggen dat hetgeen ze deed fout is, maar toch best goed?

Samenvatting

- Wezenlijk voor het leren denken is het leren *reflecteren* op eigen (mentaal) handelen.
- Wezenlijk voor het leren werken met variabelen is naast het reflecteren een goede voorbereiding, die o.a. kan (m.i. moet) bestaan uit het leren *voorspellen* (en maken van formules). (10)
- Variabelen komen in de schoolwiskunde voor als *plaatsbepalers* (open plaatsen) èn als *plaatsvervangers*. Dit onderscheid zullen we zeer voorzichtig moeten hanteren en niet verdoezelen.

Slotopmerking

Over een drietal problemen heb ik in het kader van dit artikel geen uitspraak gedaan, maar ze dienen m.i. wel gesignaleerd te worden:

1. Waar starten we mee in het onderwijs? Met variabelen als 'open plaats' (plaatsbepaler), of als 'label' (plaatsvervanger)? Anders gezegd met formules (eventueel functies) of met vergelijkingen? (11)
2. Hoe maken we het hanteren van parameters begrijpelijk voor Mavo-leerlingen (zie meerkeuze-vragen uit diverse examens), maar ook Havo-Vwo leerlingen die willen weten waarom in
   $\binom{x}{y} = \binom{1}{5} + \lambda \binom{1}{3}$
   drie letters gebruikt worden en in $y = 3x + 2$ slechts twee.
3. Hoe zit het met de taalkundige kant van het hanteren van variabelen? Hiermee bedoel ik niet alleen de uitspraak van niet-wiskundigen dat letters bij taal horen en dat je daar niet mee rekent, zelfs niet met l voor lengte, h voor hoogte, etc. Ik bedoel vooral het gebruiken van variabelen in een totale 'taalkundige context' zoals o.a. door Sieb Kemme en Joop van Dormolen beschreven werd. (12)

(1) In dat kader is het best aardig eens terug te blikken in de geschiedenis en te bedenken dat de algebra tot de tweede helft van de 19de eeuw niets anders was dan de leer van de vergelijkingen. Bij Van der Waerden (Science Awakening) lezen we echter dat reeds de Babyloniërs gebruik maakten van – weliswaar niet geformuleerde, maar wel uit de tekst te halen – *formules* bij het oplossen van *vergelijkingen*.

(2) Ontleend aan Miriam Wolters, "Van rekenen naar algebra (een ontwikkelings-psychologische analyse)", pag. 126.

(3) De voorbeelden van het werk van de National Association of Independent Schools kreeg ik van Tom Barclay in april '78 tijdens de jaarlijkse Paas-conferentie van de Engelse Vereniging van Wiskunde-leraren (A.T.M.).

(4) Door de leerlingen waren de volgende 'oplossingen' ingebouwd: a) de computer onthoudt niet; b) telt de cijfers op; c) nul poetst weg; d) links beginnen; e) gelijke cijfers worden niet afgetrokken, blijft staan.

(5) Zie voor "Blikwisseling" G. Doevedans en J. van Dormolen in Euclides 55e jrg. nr. 9, mei 1980.

(6) Cuisenaire blokjes zijn blokjes met breedte 1 en hoogte 1. De lengte van de verschillend gekleurde blokjes is resp. 1, 2, 3 enz.

(7) Euclides nr. 2, oktober 1978.

(8) Eerste experimentele versie van het kwantiwijzer instrumentarium (juni '79) S.V.O.-project 0327 Psychologisch Laboratorium Rijksuniversiteit Utrecht. (Het project staat o.l.v. Dolly van Eerde en Leonard Verhoef vanaf juli '75 en Wim van den Berg vanaf mei '78.)

(9) Zie verder bijv. MAVO-herexamen 1976 opgave 4.

(10) Aad Goddijn schreef in de Wiskrant van september 1979 "Het probleem met het letterteken ligt in het opbouwen van de wereld er achter, niet in de eerste plaats in het rekenen met letters".

(11) Een aparte vraag is dan wel de vraag naar benodigde voorkennis van de leerlingen en de vereiste algemene verstandelijke ontwikkeling. Anders gezegd: wat kan een leerling al aan?

(12) Sieb Kemme (Euclides 54 nr. 10, Euclides 55 nr. 7). Joop van Dormolen (Euclides 56 nr. 9).

Meisjes en wiskunde

In het september-nummer van Euclides stond een oproep aan vrouwelijke wiskunde docenten om te reageren als ze het ook belangrijk vonden om over het onderwerp meisjes en wiskunde te praten. Op onze oproep hebben meer dan 60 vrouwen gereageerd. Op zaterdag 7 november kwamen er 45 vrouwen een hele dag bijeen uit het hele land in een school in Bilthoven.
In veel opzichten was de groep heterogeen van samenstelling. Zo waren er docenten van allerlei schooltypen, ook uit het volwassenenonderwijs. Het was voor de meeste van ons een vreemde ervaring om met zoveel vrouwen te kunnen praten over ons vak wiskunde. Veel hebben er moeite mee gehad zich staande te houden in de studie en in de exacte-vakken-sektie. De aanwezige vrouwen beschikten over een flinke portie doorzettingsvermogen om uiteindelijk de wiskunde-studie tot een goed einde te brengen.
Er zijn die zaterdag groepjes gevormd die zich bezig houden met verschillende onderwerpen, zoals: Hewet, computerkunde, leerboeken doorlichten, verschenen literatuur opsporen, interviews houden, enz.
De volgende landelijke bijeenkomst is:
zaterdag 27 maart 1982
Voor informatie:
Jophien van Vaalen
Korte Prinsengracht 109
Amsterdam
Tel. 020-250871

Marja Meeder
St. Willibrordusstraat 35
Amsterdam
Tel. 020-722509