Binnenin is 't minder

H. Freudenthal
OW & OC, R.U. Utrecht

Summary

Inside it is less.
Simple intuitive proof of the proposition: The perimeter of a convex polygon lying inside the polygon P is shorter than that of P. Similarly: The surface of a convex polyhedron lying inside the polyhedron P is smaller than that of P.

Als je binnen een grote veelhoek P een veelhoek Q tekent, kun je er zeker van zijn dat de laatste de kleinere oppervlakte heeft. Inderdaad, want het hele idee van oppervlakte, hoe je het ook keert en wendt, berust op de aloude euclidische eis dat het deel kleiner is dan het geheel. Maar heeft Q, binnen P gelegen, ook een kleinere omtrek? Het hoeft niet: figuur 1 laat een driehoek P zien met binnenin een grillige Q, die beslist langer van omtrek is.

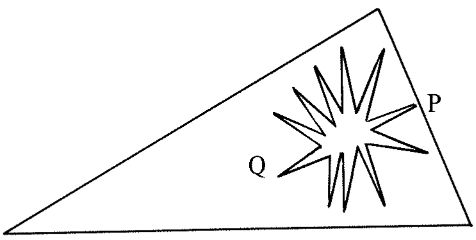


fig. 1

Ik heb me echt ingespannen een grillige Q te tekenen en allicht zult u vermoeden dat een wat fatsoenlijkere Q, binnen P gelegen, wel kleiner van omtrek zou zijn.

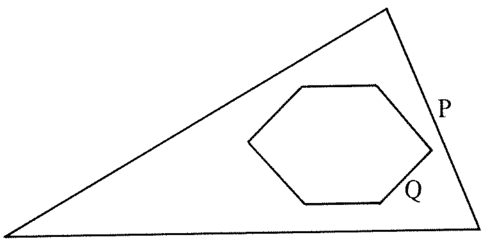


fig. 2

Een fatsoenlijker Q, dat zou zoiets zijn als door figuur 2 wordt gesuggereerd. Maar waar bestaat de fatsoen van deze Q in? De nieuwe Q heeft geen inspringende hoeken, hij is wat je noemt convex. Een veelhoek Q heet namelijk convex als, hoe je ook twee punten erop kiest, het verbindende lijnstuk nooit buiten de veelhoek Q treedt. Nu is het ook bij convexe veelhoeken geenszins zo gesteld dat een kleiner oppervlak met een kleinere omtrek gepaard gaat. Vergelijk die twee in figuur 3 met elkaar.

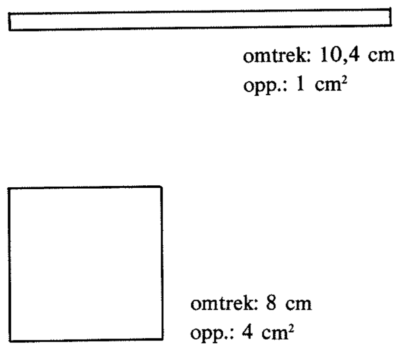


fig. 3

We stellen echter *twee* eisen:
ten eerste Q is convex en ten tweede Q is binnen P gelegen, en dan is de vraag gewettigd of de volgende uitspraak juist is:

Stelling 1: Ligt de veelhoek Q binnen P en is Q bovendien convex, dan is de omtrek van Q kleiner dan die van P.

Deze stelling is inderdaad juist en op de ene of andere manier te bewijzen. Het is nu de kunst en mijn bedoeling een bewijs te produceren, waarbij je de juistheid als het ware in één oogopslag ziet.
Stelling 1 laat zich terugbrengen tot:

Stelling 2: Knipt men van een veelhoek P een stuk weg, dan wordt de omtrek kleiner.

Met knippen bedoel ik één rechte knip, een lijnstuk, zoals in figuur 4 de stippellijn.
Nu is stelling 2 direct in te zien. Wegknippen betekent immers, dat een gebroken lijnstuk door een recht

lijnstuk (in fig. 4 de stippellijn) wordt vervangen. We beroepen ons dus op het feit dat de *rechte* verbinding tussen twee punten de *kortste* is.

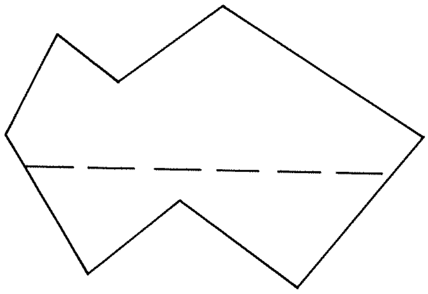


fig. 4

Met stelling 1 zijn we nu ook gauw klaar. Immers Q (zie fig. 2) kan uit P worden verkregen door achtereenvolgens langs de zijden van Q hele stukken van P weg te knippen. We maken hier ook echt van de convexiteit van Q gebruik. Immers in figuur 1 zouden we het met eenvoudige rechte knippen niet klaar spelen om Q uit P eruit te knippen.
(Een tussenopmerking voor fijnproevers: het uitknippen van Q betekent dat Q als doorsnee van halfvlakken wordt verkregen. Halfvlakken zijn convex en de doorsnee van convexe figuren is weer convex. Convexe figuren kunnen steeds als doorsnee van halfvlakken worden verkregen.)
Aardig hè, maar wat pover voor een artikel. Dus gaan we het wat aandikken en wel op een voor de hand liggende manier.
Laat P en Q nu veel*vlakken* zijn, Q convex en binnen P gelegen en laten we van die veelvlakken de oppervlaktes bekijken. Hoe luidt ons vermoeden nu?

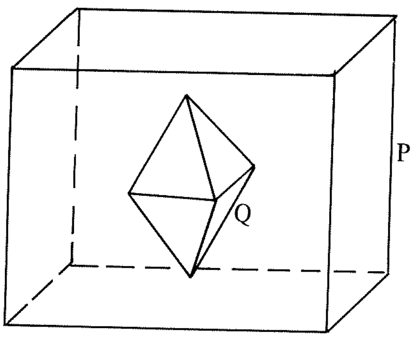


fig. 5

Stelling 3: Is Q binnen P gelegen en bovendien convex, dan heeft Q een kleinere oppervlakte dan P.

Net als stelling 1 uit stelling 2, laat stelling 3 zich afleiden uit stelling 4.

Stelling 4: Snijdt men van een veelvlak P een stuk weg, dan wordt de oppervlakte kleiner.

Waar bestaat dat wegsnijden nu in? Antwoord: Een vlakke snede, die trouwens vanzelf een convex veelhoekvlakstuk is. En wat je wegsnijdt, is om zo te zeggen een tent met een vlakke bodem en tentwanden die trouwens nogal grillig mogen samenhangen, ook met een "slurf" zoals in figuur 7.

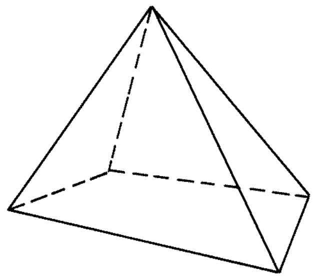


fig. 6

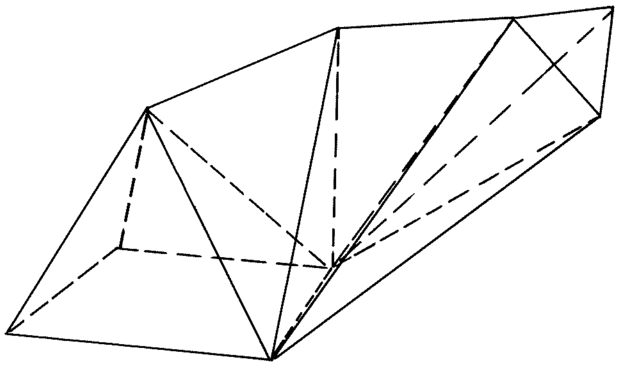


fig. 7

Maar stelling 4 wil ook nog bewezen worden.
Hoe deden we het met stelling 2?
De rechte verbinding – zeiden we – is immers de kortste. En nu? Als ik in een vlakke veelhoek een veelvlakkap moet inspannen, is de vlakke bodem het zuinigste, hij heeft de kleinste oppervlakte. Het is de natuurlijke "aandikking" van "het rechte lijnstuk in de kortste verbinding", maar hoe zie je het in?
Wel, hoe weet je dat het rechte lijnstuk de kortste verbinding is? Je bent gewoon om deze uitspraak in verband te brengen met wat men noemt het driehoeksaxioma voor metrische ruimten,

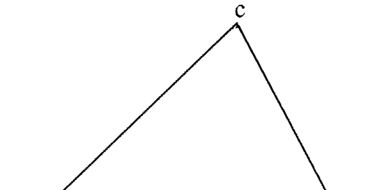


fig. 8

$$\text{afst}(a,b) \leq \text{afst}(a,c) + \text{afst}(b,c),$$

ofwel: in een driehoek is de som van twee zijden groter dan de derde.
Herhaalde toepassing hiervan levert inderdaad het gewenste resultaat voor een ingewikkeldere omweg. Maar voor het ruimtelijk geval is dat niet de aangewezen manier. Het gaat simpeler. Trouwens ook al in het

vlakke geval. Je redeneert dan als volgt: Waarom is het rechte lijnstuk ab korter dan de gebroken lijntrek ab? (zie fig. 9).

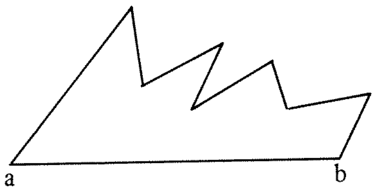


fig. 9

Je projecteert de lijntrek loodrecht op de rechte lijn ab, waarbij het lijnstuk ab geheel (misschien zelfs "meer dan geheel") overdekt wordt. Bij het projecteren worden de afzonderlijke stukken van de lijntrek verkort (althans niet verlengd). Om precies te zijn (zie fig. 10):

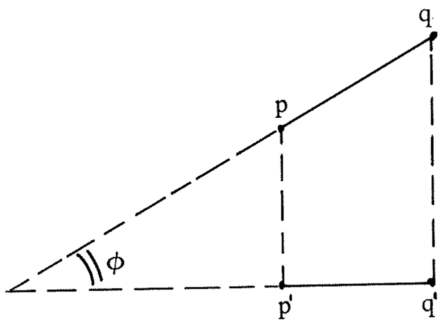


fig. 10

afst p'q' = cos ϕ . afst pq,
waarbij ϕ de hoek is die de lijn p'q' met de lijn pq maakt. Dus in 't geheel wordt de gebroken lijntrek door het projecteren verkort. Net zo kun je in de

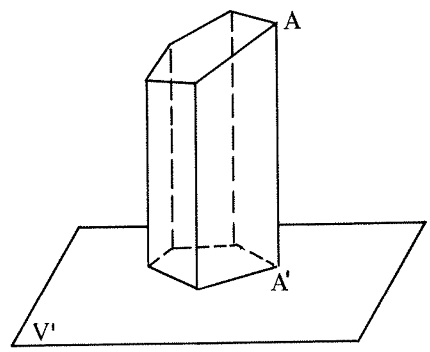
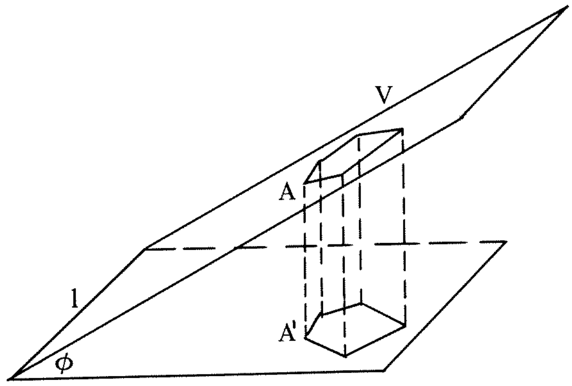


fig. 11

ruimte redeneren (zie fig. 11): Als je een vlakstuk A, in een vlak V van de ruimte gelegen, op het vlak V' loodrecht projecteert, heeft het projectiebeeld A' een oppervlakte die ook weer kleiner (althans niet groter) is dan die van A. Om precies te zijn, ook weer:



opp A' = cos ϕ . opp A
waarbij ϕ de hoek is die vlak V met vlak V' maakt. En hoe bewijs je dat? Laten we voor het gemak voor A een rechthoek nemen met de ene zijde evenwijdig aan de snijlijn van de vlakken V en V' en de andere zijde er loodrecht op. Dan is het duidelijk dat de eerste zijde bij het projecteren qua lengte gehandhaafd en de andere met cos ϕ vermenigvuldigd wordt. Zodoende. In plaats van een rechthoek had je voor A ook een rechthoekige driehoek kunnen nemen. En een willekeurige veelhoek? Zoek dat nou zelf uit. Ik heb me al genoeg ingespannen.
Nog een slotopmerking. De stellingen gelden ook voor enigszins fatsoenlijke enkelvoudig gesloten krommen en oppervlakken in plaats van veelhoeken en veelvlakken. Voor het bewijs zijn limietprocessen vereist. In deze vorm staan de stellingen trouwens in wezen al bij Archimedes, in zijn werk "Van de sfeer en de cilinder". Ze staan daar als postulaten, dus zonder bewijs. Het is mij niet duidelijk waarom Archimedes die uitspraken niet bewezen, d.w.z. tot eenvoudigste teruggebracht heeft, zoals het boven is geschied en voor Archimedes een koud kunstje geweest moet zijn.