Magische vierkanten van drie kanten bekeken.

J. Speelpenning
S.L.O. Enschede

Summary

Though magic squares are well-known, they are rarely used at school.
Experiences with pupils on three age levels are sketched: for 12-13 years olds magic squares are a subject to use and appreciate commutativity of addition; for 14 years olds letters rather than numbers are no surprise; finally at the age of 17: the linear space of magic squares.
In all three experiences the pupils were well motivated. The magic squares were useful as a didactic tool.

Iedere wiskundedocent is weleens de prent 'Melancholica' van Dürer tegengekomen, waarop, voor de wiskundige, een aantal interessante voorwerpen staan afgebeeld. Zoals dit 'magisch vierkant'.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

U weet wel, de som van de getallen in de rijen, in de kolommen en op de diagonalen is steeds gelijk. Trouwens ook de sommen van de getallen uit een aantal 2 bij 2 deelvierkanten: "bijna alles klopt".
Nu zijn we gewend om bij een magisch vierkant meteen te denken aan een vierkant van 3 bij 3 of 4 bij 4, waarin de getallen van 1 tot en met 9 of 1 tot en met 16 voorkomen.
Hier is eigenlijk weinig 'magisch' aan:

3	3	3
3	3	3
3	3	3

In dit artikeltje wil ik aan een magisch vierkant (MV) alleen de eis opleggen dat de som van de getallen in de rijen, de kolommen en op de diagonalen gelijk is, en dus niet wèlke getallen erin voorkomen.
Het leuke van MV's is dat je er op zoveel verschillende niveau's mee bezig kunt zijn. En dat ook de leerlingen het een aantrekkelijk en intrigerend stukje wiskunde vinden.
Hier volgen een aantal beschrijvingen van lessen over MV's, die zich in een brugklas, een tweede klas en in een 5/6 VWO-groep afspeelden.

In de brugklas

Op het bord staat

4	5	9
11	6	
	7	8

Na een wat sturende vraag " zien jullie iets bijzonders aan deze rijtjes getallen?" (ik wijs op het rijtje 4-5-9, de diagonaal 4-6-8 en de kolom 5-6-7) komt al snel het antwoord dat "er steeds 18 uitkomt".

Deze groep leerlingen, die nog maar weinig aan letterrekenen gedaan heeft vult het MV met weinig moeite aan.
Ze zijn weinig verrast over het feit dat je zo maar met *letters* een MV kunt maken. Dat verbaast me. Het lijkt alsof ze vinden dat het gemanipuleer met letters al zoveel 'magie' in zich heeft, dat het niet meer dan logisch is dat je zo'n vierkant kunt vullen.
Pas als we voor a en b getallen substitueren is een groeiende verrassing merkbaar.
Er komt steeds een 'goed' vierkant uit!
Na een paar keer substitueren geloven ze het wel. 'Geloven', ja. Meer kun je, denk ik, ook niet verwachten. Het echt begrijpen is in dit stadium te veel gevraagd.
Nog eentje, nu met drie letters. Een moeilijke trouwens.

a		c
	b	

"Er moet overal 3b uitkomen."

Hun grote probleem is "hoe kom ik van die a en c af". Nadat we gezamenlijk de eerste uitrekenen (midden boven) gaat het wel, zij het met moeite. Als het klaar is, en we één keer voor a, b en c getallen hebben gesubstitueerd, vind ik het welletjes.
Enige tijd later komt het magisch-vermenigvuldig-vierkant (MVV) nog aan de orde. Zelfde eisen, alleen optellen vervangen door vermenigvuldigen.

Na

10		8
16	20	
50		

en

48	144	54
	72	

waarbij het rekenwerk de grootste hindernis blijkt (blijft), gaan we over tot MVV's met letters.

a^2b		ab^3
	ab^2	
		b^3

Het rij/kolom/diagonaalproduct is, bepaalt de klas, a^3b^6.
De leerlingen vullen het vierkant verder aan. In feite doen ze niet veel meer dan een oefeningetje met machten, maar het heeft hier, voor hen, een heel ander doel. Het 'magisch maken' van het vierkant. In tegenstelling tot de gewone oefeningen met machten werken ze hier met plezier aan. En dat was mijn doel.

Ook

abc^2		b^3c
	ab^2c	
a^2bc		

brengt weinig problemen.

De behoefte om te controleren of deze vierkanten echte MVV's zijn, door voor a, b en c getallen in te vullen is er nu niet. "Je kan toch zo zien dat het dan ook moet kloppen" hoor ik.
"Zeker weten?"
" 't Is toch een magisch vierkant" is het antwoord.
Tsja.
Zouden ze nu wel begrepen hebben hoe magisch het vierkant is?

5 en 6 VWO

Er is nog een derde plaats (niveau) waar ik het gebruik van MV's kan aanbevelen. Dat is bij wiskunde II in 5 of 6 VWO.
Het blijkt telkens weer dat leerlingen moeite hebben met het voorstellen van een vectorruimte anders dan de 'gewone' pijlen-ruimte.

Dat (2, 3, 4) of $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ iets anders kan voorstellen dan een punt of plaatsvector is moeilijk.
De goede voorbeelden van 'andere' vectorruimten zijn schaars, althans, op dit niveau. Functie-ruimten als vectorruimten spreken velen niet aan; het begrip basis blijkt dan al grote problemen te geven.
Met magische vierkanten lukt het gemakkelijker.
Uitgaand van een of ander 3 bij 3 MV laat je zien dat je, door vermenigvuldigen van de getallen met een constante, weer een MV krijgt. Ook het optellen van MV's levert nieuwe MV's.
Kortom, lineaire combinaties van MV's zijn mogelijk.
De lineaire structuur is verzekerd.
Dan komt de vraag of je soms met behulp van een paar 'basis'-MV's alle andere MV's kunt opbouwen, door lineaire combinaties te maken. De dimensie-vraag rijst.
Na wat pogingen (achteraf kun je dat natuurlijk ook beredeneren) blijkt dat we een willekeurige MV kunnen beschrijven met:

a		c
	b	

dat de groep via de spring-plank-methode aanvult tot

a	−a+3b−c	c
−a+b+c	b	a+b−c
2b−c	a−b+c	−a+2b

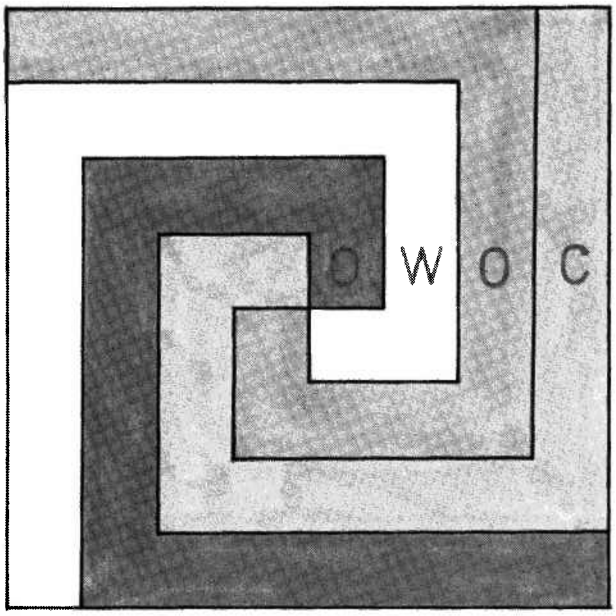
Na splitsing krijgen we:

$$a \times \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ \hline\end{array} + b \times \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 2 \\ \hline\end{array} + c \times \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ \hline\end{array}$$

De basis-vierkanten zelf blijken magisch. Dat valt natuurlijk ook te berekenen zeker als je het eenmaal gezien hebt.
In elk geval staat hier, keurig netjes, een 3-dimensionale basis voor de lineaire ruimte van MV's.
Het ligt voor de hand te denken dat de ruimte van 4 bij 4 MV's waarschijnlijk 4-dimensionaal is. Dat is echter niet waar. Hoe dàt zit kunt u het beste even nalezen in het artikel van Vriesendorp (2).
Misschien nodigt dit artikeltje u uit om in een verloren uurtje 's met MV's aan de slag te gaan. Of juist niet in een verloren uurtje, maar tijdens uw lessen over een bepaald onderwerp, waarbij MV's een prettige of aantrekkelijke oefenplaats, dan wel illustratie kunnen vormen. Ik sta daar achter. Vierkant.

(1) Watzlawick, P. e.a., *"Het kan anders",* V. Lochem, Slaterus 1974.
(2) Vriesendorp, F.M., *Magische vierkanten als voorbeeld voor lineaire ruimten,* Euclides 76/77, nr. 2.
Freudenthal, H., *"Tovenarij? Neen, wiskunde"*, Wiskrant 14, jrg. 4, 1978, pag. 35.

Oplossing vier eiken:



het IOWO verknipt

Hiernaast de mooiste oplossing – vonden wij – van onze puzzel uit het proefnummer. Deze inzender krijgt dan ook een extra prijs.
Ook de inzending die de meeste kilometers heeft af moeten leggen hebben we extra beloond.

Totaal dus zo'n vijf abonnementen:

W.E. Groen	A.W.V. Voordenlaan 15	1241 AN	Kortenhoef
G. Engelen	Parklaan 26	4702 XE	Roosendaal
F.W. Drost	Witte de Withstraat 23		Ede

extra prijzen:

A.J.E. de Leeuw	Gerard Doustraat 13		Utrecht
Lucien Kieffer	1 Rue Jean Jaurès	1836	Luxembourg