Meetkunde in de zon en bij kunstlicht

A.J. Goddijn.

Summary

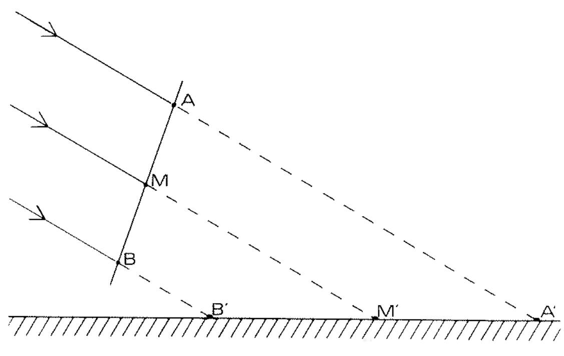
"Shadows and perspective" is intended for use in the 8^th grade. However, various problems in this booklet are an introduction to fine aspects of classical geometry and could be used in more advanced high school classes. Shadows cast by cubes and squares are examined while using natural and artificial light. The conjugate diameters of an ellips are discovered while watching the shadows of a turning windmill. The correct distance to regard a painting is determined by purely geometric means and it is shown by the same method that all quadrangles can be obtained as projections of a square. A particular projection of a cube gives new insight into the orthocenter and the Torricelli point of a triangle.
The article is a part of the teacher's guide to "Shadow and perspective".

Inleiding.

IOWO of OW & OC, zon of regen, het doet er voor de Wiskivonpakketjes niets toe: ze blijven verkrijgbaar. Zelfs verschijnen er nog nieuwigheden, juist op de valreep.
De definitieve versies van "Klein en Groot" en "Schaduw en diepte" liggen nu of zeer binnenkort bij IVIO, met docentenhandleiding. "Schaduw en diepte" is de titel van het drieluik Licht op schaduw/ Evenwijdigheden/Met het oog op diepte.
In de docentenhandleiding van "Schaduw en diepte" zijn behalve praktische wenken en beschrijvingen van ervaringen in de klas, ook wat meer achtergronden opgenomen. O.a. een stukje historie en een fraai brokje klassieke meetkunde dat uit de leerlingentekst voortvloeit, maar in de 2e klas MAVO-LBO niet direct aan de orde zal komen. Dat gedeelte uit de docentenhandleiding is ook goed verteerbaar voor niet-gebruikers van het pakket. De belichte onderwerpen zouden echter prima een plaats kunnen hebben in een bovenbouwprogramma waarin meetkunde serieus genomen wordt.

Allerlei in de zon.

Deze leerlingen onderzoeken de schaduwen die een doodgewone kubus op de vloer kan werpen. Bij zonlicht zijn dat alleen zeshoeken en vierhoeken en een vraag uit het pakketje is dan ook: "Waarom eigenlijk geen vijfhoeken?" Het valt niet mee uit het blote hoofd zomaar een afdoend antwoord te vinden op die vraag, maar de leerlingen die het natuurlijk met een echt kubusje in de oktoberzon deden, geven een aanwijzing: als je de kubus beweegt zie je altijd twee hoeken tegelijk verdwijnen of ontstaan. Voor hen is dat een afdoende verklaring, maar we graven nu even dieper.
De verdwijnende hoeken blijken tegenover elkaar te liggen en daarom denken we direct aan symmetrie. Op de foto is te zien dat alleen puntsymmetrie in aanmerking komt voor nader onderzoek.
We nemen eens twee punten A en B, puntsymmetrisch ten opzichte van M en laten we eens kijken wat de zon er mee doet. Schaduwen van punten geven we met een extra tekentje verder aan, hier dus A', B' en M'. We beschouwen de zon als een bron van evenwijdige lichtstralen, de zon is als het ware een oneindig verre puntvormige lichtbron. Dat is een idealisering van de werkelijkheid, die de zaken hanteerbaar maakt.

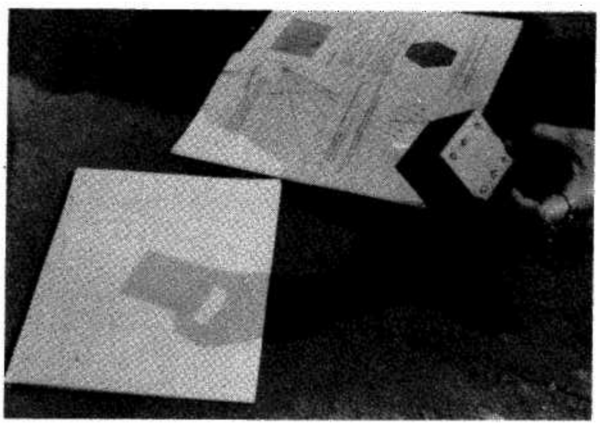


Veel meetkundekennis is niet nodig om vast te stellen dat A'M' gelijk is aan B'M'. En A', M' en B' liggen óók op één lijn, met andere woorden: de puntsymmetrie blijft behouden bij schaduwvorming door de zon.
De gevolgen van deze vaststelling gaan ver: Een kubus is puntsymmetrisch, zijn schaduw dus ook. Weg vijfhoeken!

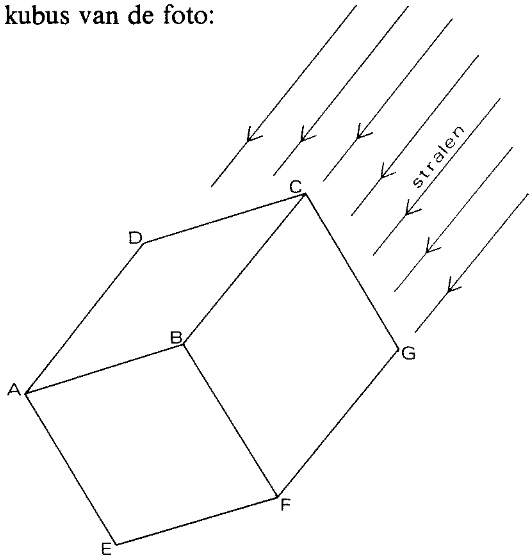
Twee evenwijdige lijnen zijn puntsymmetrisch rond elk punt midden tussen die lijnen. Als de lijnen niet evenwijdig aan de stralen van de zon lopen, moet zoiets ook in het schaduwbeeld gelden.

Voor we verder gaan nog een andere basistechniek. De stralen die door een lijn lopen vormen een vlak. De snijlijn van dit vlak met de vloer is de schaduw, dus ook een lijn. Met twee vlakken door de twee evenwijdige lijnen van zoëven, zien we natuurlijk twee evenwijdige schaduwlijnen.
Deze benadering werkt ook als de stralen uit een punt komen. De vlakken hoeven dan echter niet evenwijdig te zijn.
De puntsymmetrie overleeft deze schaduwvorming in het algemeen ook niet. Wanneer trouwens wel? Dat kan uitgeknobbeld worden aan de hand van het gedeelte "Afstanden" uit het leerlingenboekje. Daar wordt onderzocht wat een lamp en de zon doen met een gespannen touw, waarin op gelijke afstanden van elkaar knopen gelegd zijn.

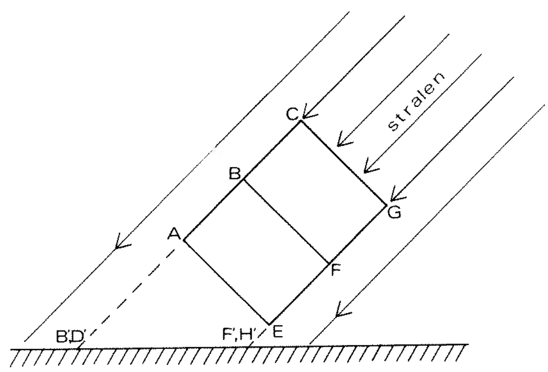
Vierkante schaduwen?



Hier wordt een kubus schuin gehouden. Toch is er een vierkante schaduw ontstaan. Bij het ontwerpen van het pakket had ik alleen gerekend op de voor de hand liggende methode: de kubus met een van z'n zijvlakken naar de zon en een vel papier loodrecht op de stralen. De leerlingen dachten minder rechtlijnig en vonden zelfs grotere schaduwvierkanten. Hier is de kubus van de foto:



De zonnestralen lopen evenwijdig aan de vlakken ABCD en EFGH. Zo leveren alleen D, B, F en H hoeken in de schaduw op. Neem eens DB loodrecht op de stralengang, de schaduwkolom heeft dan een rechthoekige doorsnede van 1 bij $\sqrt{2}$ meter (of centimeter, dat doet er niet toe). Van opzij gezien:



Als α 45° is, wordt B'F'H'D' een vierkant. Het is ook mogelijk BD niet loodrecht op de stralen te houden. Dan moet α iets groter worden genomen. B'F' wordt kleiner. We hebben dus het grootste vierkant gevonden!

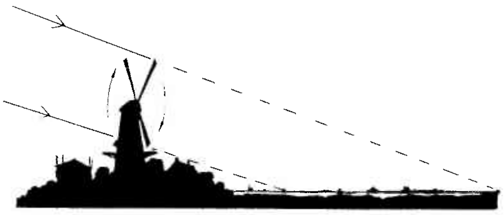
Schaduw van vierkantjes.

Het ruimtelijk inzicht is even zwaar op de proef gesteld en we houden het nu maar eenvoudig: een vlak vierkantje en zijn zonneschaduw.
Twee vragen uit "Schaduw en diepte":

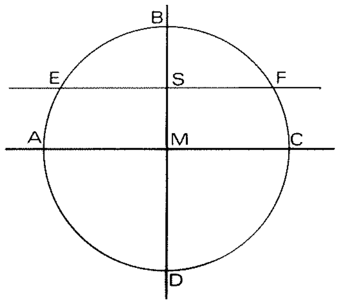
44. Maak een vierkant van karton. Probeer wat voor verschillende schaduwen je er op de grond mee kunt maken. Teken de vormen die je kunt maken.
45. Hoe moet je het vierkant ten opzichte van de grond houden om een vierkante schaduw op de grond te krijgen?

Eerst even vraag 45. We zien direct: evenwijdig aan de grond. Wie minder doorkneed is in de klassieke meetkunde ontdekt, proberend, meer. "Zó schuin" kon ook volgens sommige leerlingen. Ik schets het idee, verdere uitwerking is overbodig.

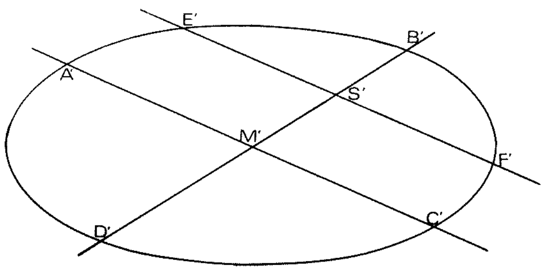
Op een duistere plek in het planimetrieboek heette dat "antiparallel".
Nu vraag 44.
Het zijn allemaal parallellogrammen. Uitgaande van 1 bij 1 meter maak je 's avonds een rechthoek van 1 bij 1000 meter, maar niet van 2 bij 2 meter. Dat is duidelijk. Maar waarom lukt een ruit met diagonalen van 1,41 en 2000 meter wel, terwijl een ruit met diagonalen 1,42 en 1000 meter zich niet laat vormen? Draai het vierkantje eens wat om zijn as. Ziet u dat de oppervlakte van de schaduw constant is?



De diagonalen van het vierkant draaien als molenwieken rond. En de schaduwen van de wieken gaan hun eigen gang in het zonbeschenen veld. Van ver komt de schaduwpunt snel dichtbij, steekt langzaam over en gaat snel weer terug. De baan is een ellips. Kunnen we zo elke twee lijnen door het midden van de ellips als schaduwen krijgen? Nee, bij één schaduwlijn lijkt de andere al vast te liggen. Maar hoe?
Hier zijn de wieken – de diagonalen van het vierkant – met omgeschreven cirkel en een lijn evenwijdig aan AMC.



Natuurlijk is ES gelijk aan SF. Nu de schaduw. De schaduw van de cirkel is de bewuste ellips.



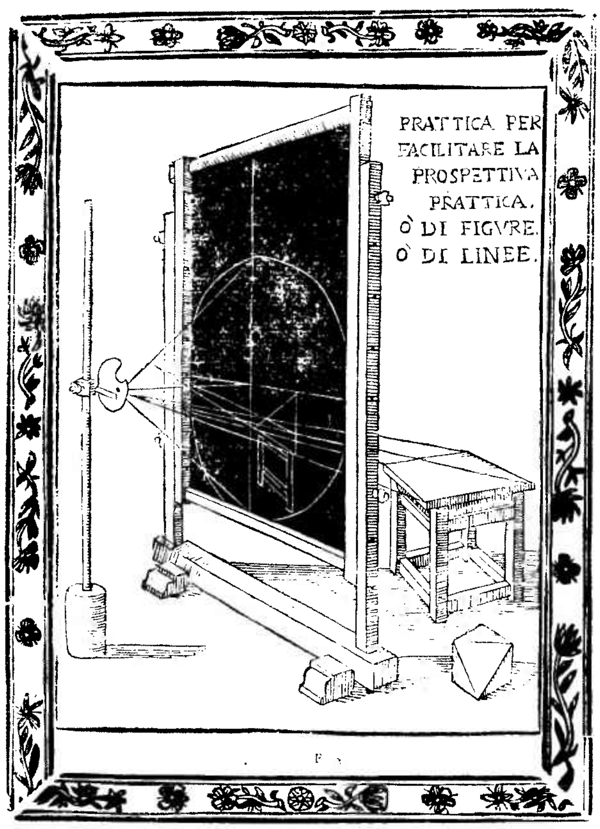
Maar nu is E′S′ gelijk aan S′F′. Je kunt ook zeggen: laat de koorde E′F′ over de ellips schuiven, steeds evenwijdig aan A′C′. Dan doorloopt het midden van de koorde een lijn, n.l. B′D′.
Uitgaande van koorden evenwijdig aan B′D′, vinden we A′C′ terug! Twee zulke lijnen heten toegevoegde middellijnen van de ellips. Uit de analytische meetkunde zal dat voor velen nog wel bekend zijn, al zullen weinigen ze op deze manier in de buitenlucht hebben opgemerkt.

Even een opgave tussendoor. Neem een vaste ellips. De oppervlakte van een parallellogram, gevormd door de raaklijnen die evenwijdig zijn aan twee toegevoegde middellijnen, is gelijk aan het produkt van de assen van de ellips. Met het voorgaande in het achterhoofd is het niet moeilijk, maar met analytische meetkunde is het een hele kluif!

We zijn nog niet klaar met ons vierkantje. We moeten nog weten welke ellipsen we kunnen krijgen als schaduw van een cirkel met middellijn $\sqrt{2}$ meter. Denk eens een bol met die middellijn om de cirkel. De schaduw van de bol is weer een ellips, nu met korte as $\sqrt{2}$ en lange as in ieder geval méér meter. Maar de schaduw van de oorspronkelijke cirkel raakt aan die ellips (waarom?) en we zien snel: de schaduw van de cirkel is een ellips met korte as *kleiner* dan $\sqrt{2}$ en met lange as *groter* dan $\sqrt{2}$.
Aan de lezer om te bewijzen dat al deze ellipsen inderdaad als schaduw mogelijk zijn. Daarmee is de schaduw van het vierkantje grondig bekeken!

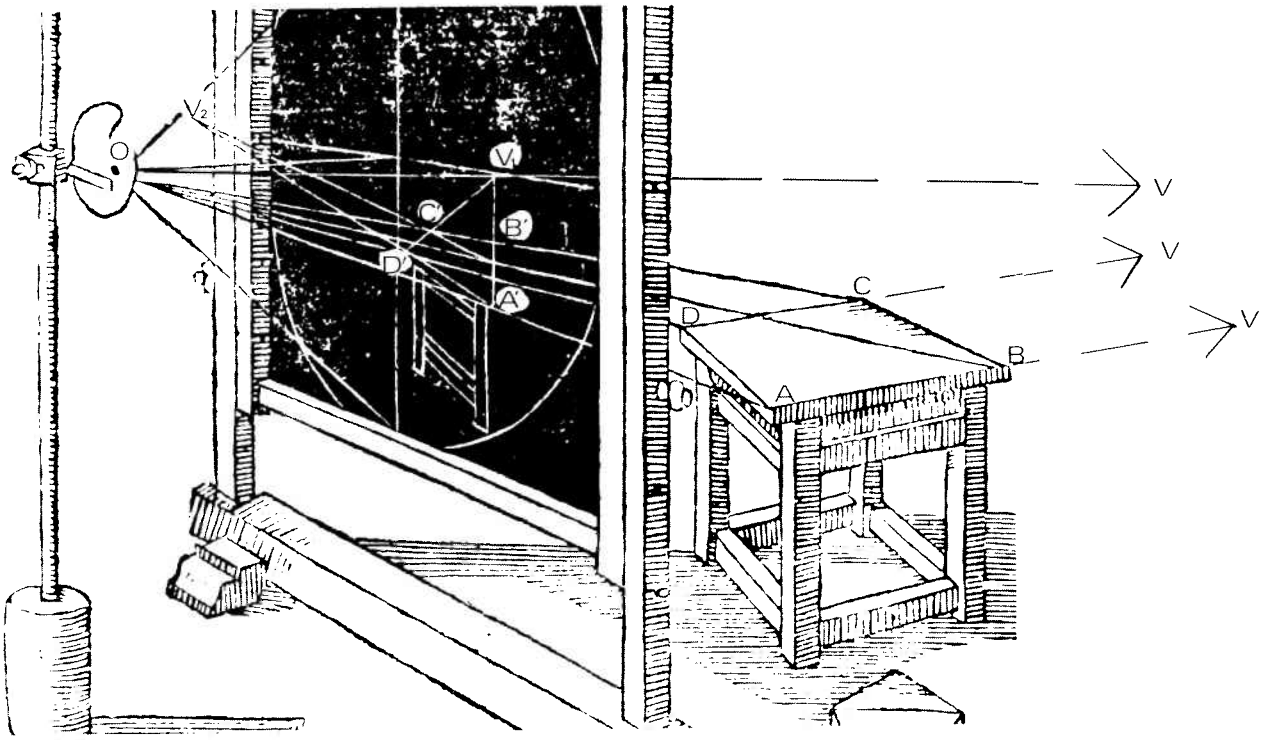
De juiste afstand tot een schilderij.

Genoeg schaduw en zonneschijn. We gaan over op kunstlicht. Bij een dichtbije lichtbron gaat het niet meer om parallelprojectie maar om centrale projectie. Puntsymmetrie is niet meer behouden en het voorgaande kunnen we beter vergeten.
Centrale projectie wordt ook gebruikt bij perspectieftekenen en daar gaan we even op in om een paar sleutelbegrippen toe te lichten. Eerst de kunst, dan het licht dus en we slaan het leerboek van Giulio Trolli da Spinlamberto uit 1672 open op blz. 21.

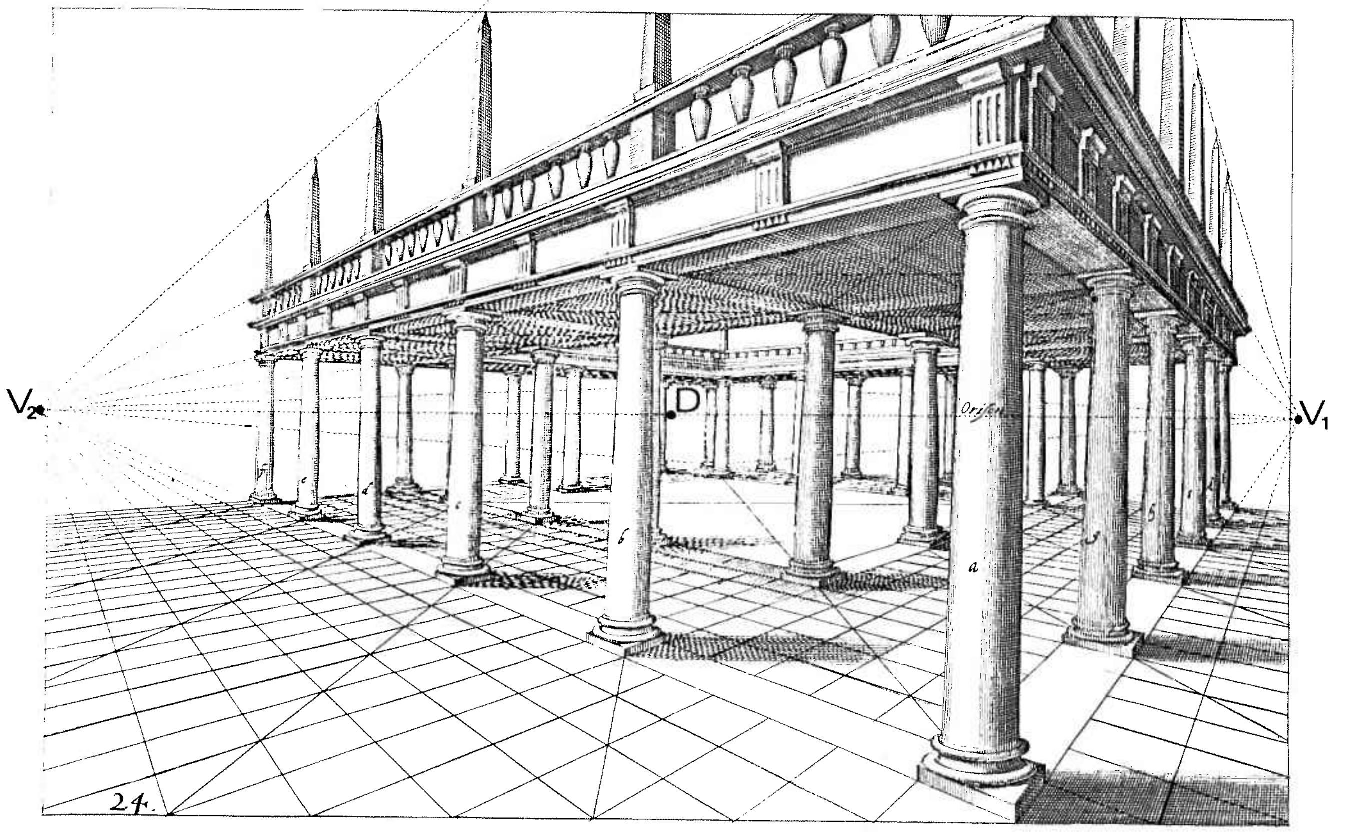


Het "oog" in het palet links is door lijnen met de – laten we aannemen: vierkante – tafel verbonden. Het patroon van de snijpunten met het vlak van tekening (het z.g. tafereel) vormt de gezochte afbeelding van de tafel. Vanuit het gaatje in het palet gezien ziet de tekening er precies uit als de tafel zelf. Precies in de richting van de echte linkerpoot zie je de linkervoorpoot op de tekening. En zo voor alle onderdelen.

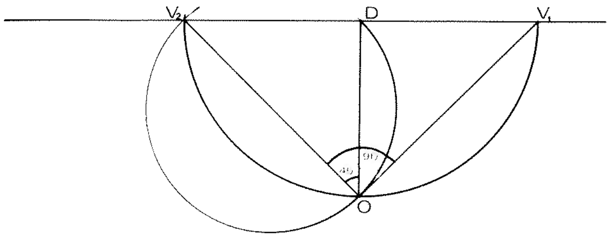
Vanuit dat ene punt gezien, zie je alles op de tekening precies onder dezelfde hoek als de werkelijkheid. De bedoeling van het perspectieftekenen is, deze illusie zo goed mogelijk uit te voeren. Een deel van de illustratie vergroten we even.



Het blad van de vierkante tafel ABCD vinden we al op de tekening: A′B′C′D′. AB en DC zijn in werkelijkheid horizontaal en evenwijdig. Denk ze verder doorgetrokken naar rechts. Hun oneindige verte V komt op het tafereel terecht als het punt V_1, dat is het snijpunt van de lijn door O (het "oog"), die evenwijdig loopt met AB en DC, met het tafereel. V_1 is het snijpunt van A′B′ en D′C′. Zo vinden we ook V_2 als snijpunt van B′C′ en A′D′. V_1 en V_2 heten verdwijnpunten. Ze zijn de projecties van de oneindige verten van bundels evenwijdige lijnen. Zo is ieder punt P van het tafereel op te vatten als verdwijnpunt van een geschikte bundel evenwijdige lijnen, n.l. de lijnen evenwijdig aan OP. V_1 en V_2 liggen nog op ooghoogte. De punten op ooghoogte in het tafereel vormen de horizon. U begript nu wel dat de hoek $V_1 OV_2$ 90° moet zijn en we zijn klaar om met kennis van zaken een perspectieftekening te bekijken uit "Perspective", een leerboek van Jan Vredeman de Vries uit 1599.



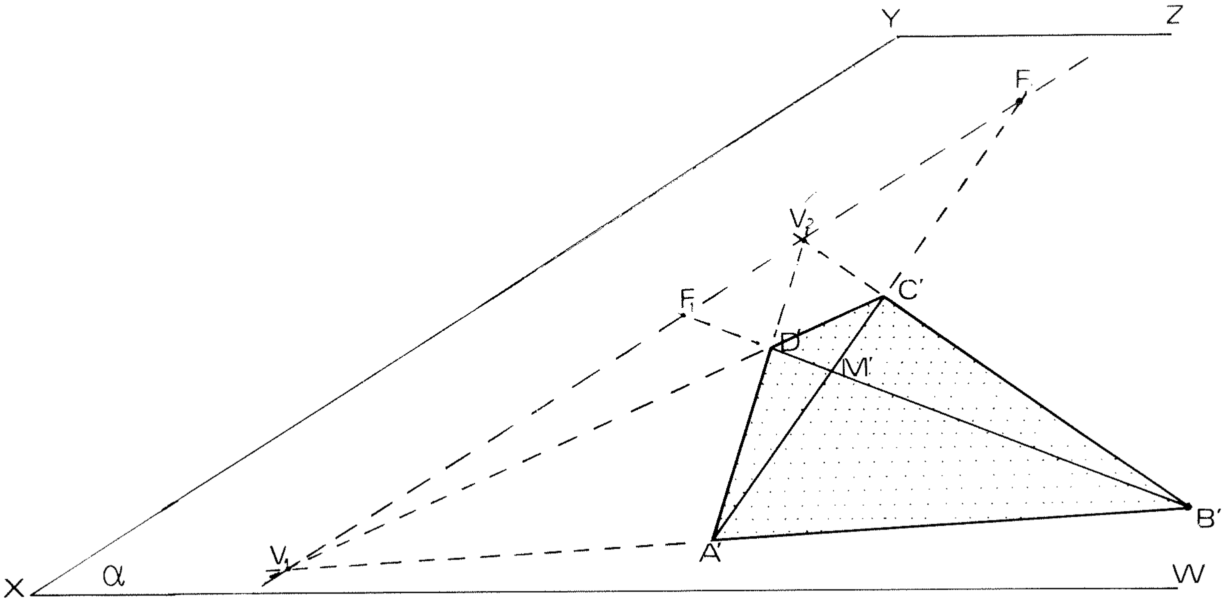
Een tegelvloer, vierkante tegels natuurlijk.
Hoe moeten we deze tekening bekijken? Of: waar is O? In ieder geval de horizon V_1V_2 op ooghoogte houden. Maar we willen ook V_1V_2 onder 90° zien. De mogelijke punten O liggen dus op een halve cirkel met V_1V_2 als middellijn. Van boven gezien:



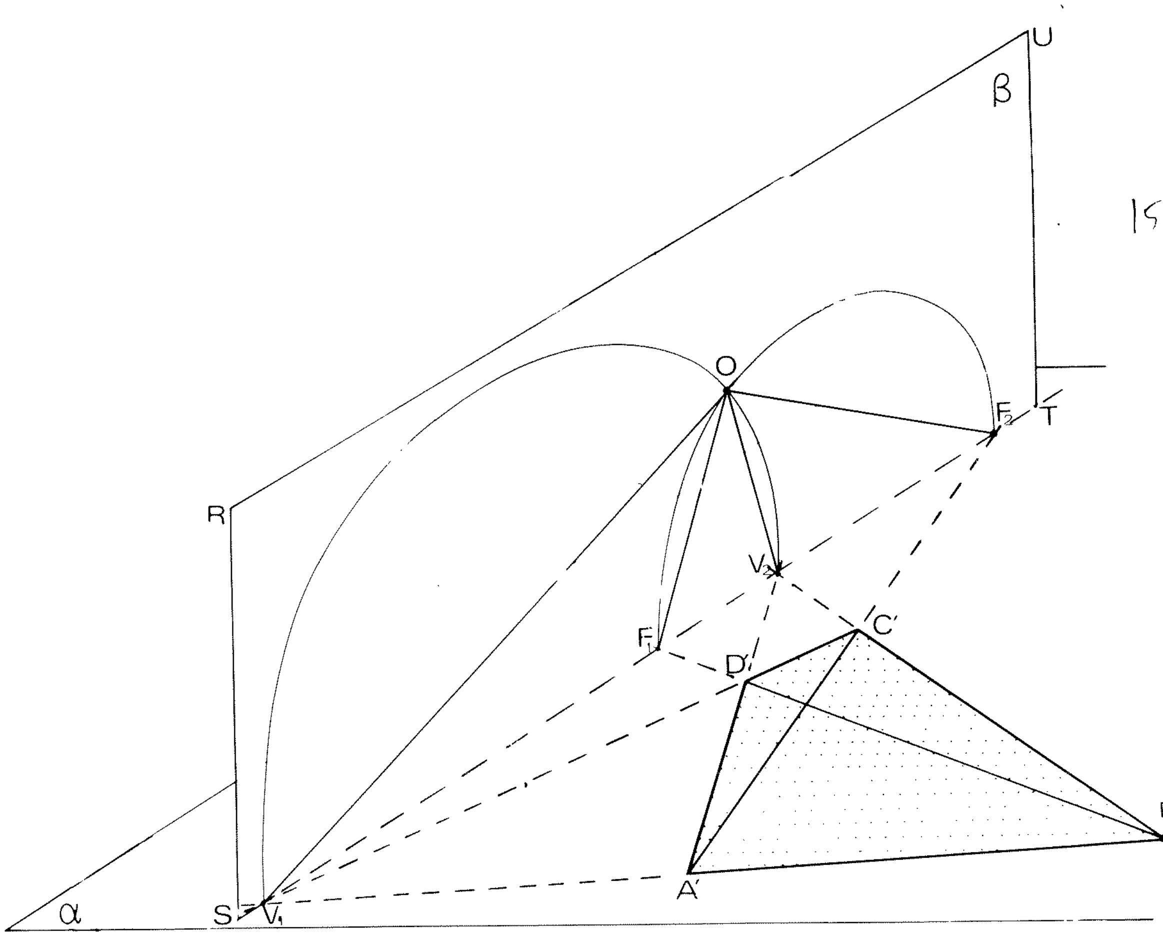
Maar V_2D moet onder 45° gezien worden. Dat geeft ook een cirkelboog aan mogelijkheden. Natuurlijk is het snijpunt van de twee cirkels ons gezochte punt. Vroeger zouden we deze prent uitvergroten en op een dubbele pagina oude Wiskrant drukken. Nu moet het oog wel erg dichtbij. Maar probeer het zelf eens met een andere plaat. Het diepteëffect van de tekening is veel sterker vanuit het goede oogpunt.
Moraal van dit verhaal: er is bij een perspectieftekening niet alleen één goede afstand, er is eigenlijk maar één goed standpunt: het oogpunt van waaruit de tekening gemaakt is.

Vreemde vierhoeken.

De vierkante tegels hebben op de tekening allerlei rare vormen gekregen: heel smal bij de horizon en vreemd uitgerekt in de hoeken. Het lijkt wel of alles projectie van een vierkant kan zijn en dat gaan we nu dan ook bewijzen.
Eenzelfde probleem is: welke schaduwen kan een vierkant bij puntvormige nabije lichtbron opleveren? De bijbehorende meetkunde is hetzelfde, al lijkt de volgorde oog-tafereel-vierkant nu verwisseld tot lamp-vierkant-schaduw.
In de volgende tekening is een willekeurige vierhoek A'B'C'D' getekend. Dat is de schaduw. Denk het vlak α, gesuggereerd door WXYZ horizontaal. V_1 en V_2 zijn de verdwijnpunten van de zijden, F_1 en F_2 van de diagonalen.

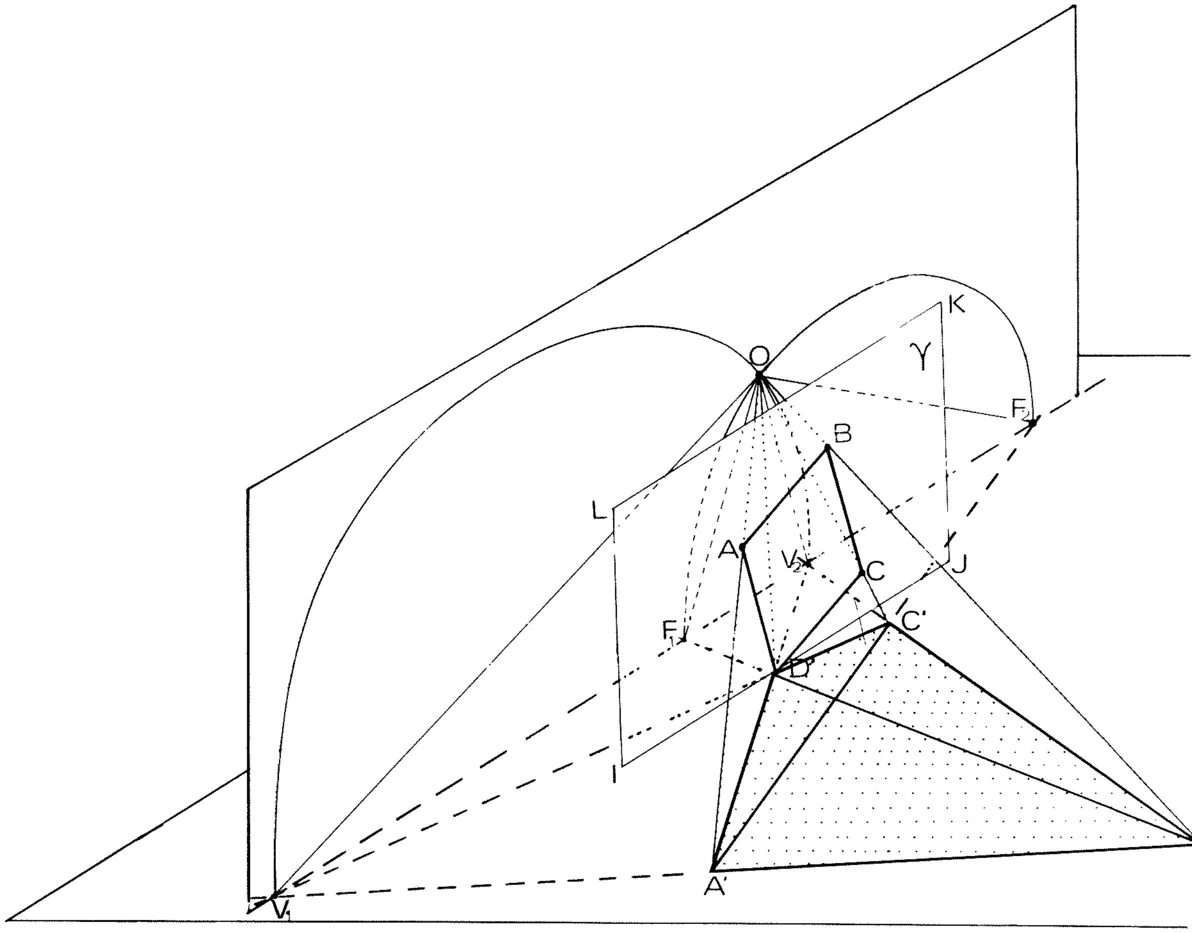


Vanuit het te zoeken punt O moet V_1V_2 onder 90° gezien worden en F_1F_2 ook. We willen A'B'C'D' immers als projectie van een vierkant krijgen. Wel, neem een vlak door V_1V_2 en trek daarin halve cirkels op V_1V_2 en F_1F_2. Zie de tekening.



Gesuggereerd is dat dat vlak β (met RSTU aangegeven) loodrecht op α staat, maar dat is niet nodig. O is in ieder geval gevonden, er is zelfs wat variatie mogelijk:

O ligt op een cirkel rond de horizon V_1V_2. Neem nu een vlak γ, evenwijdig aan β; daar leggen we het vierkant in. Voor het gemak nemen we γ door D′, dat maakt de tekening waarin γ door IJKL gesuggereerd is wat overzichtelijker.

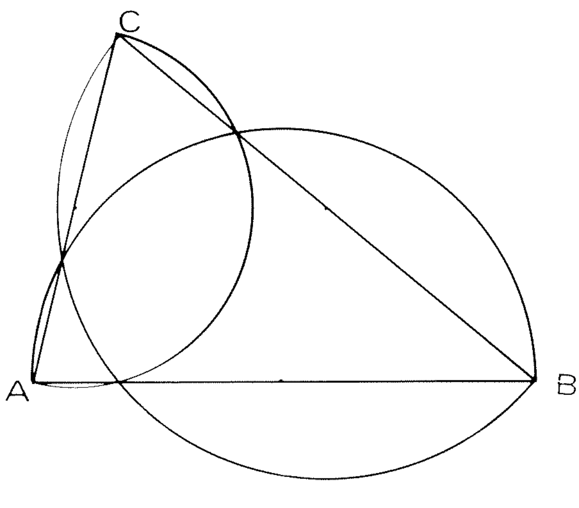


De lijnen OA′, OB′ etc. bepalen nu A,B etc. in vlak γ. Hoe ziet ABCD er in werkelijkheid uit?
We hebben gelet op hoeken, dat gebruiken we dan nu ook maar: AB is evenwijdig aan VO. Kijk maar naar het vlak OV_1B_1. Dat snijdt β en γ in respectievelijk OV_1 en AB. Dan is AB // OV_1. Zo ook BC // OV_2. Maar dan is AB $\perp$ BC, want OV_1 en OV_2 zijn loodrecht. Voor de andere zijden en de diagonalen bewijst men soortgelijke zaken. Kortom: ABCD is vierkant. Maar nu zijn we klaar. A′B′C′D′ was een willekeurige veelhoek, die nu schaduw van een vierkant blijkt te zijn. Nog een opgave: de twee cirkels snijden elkaar loodrecht. Waarom?

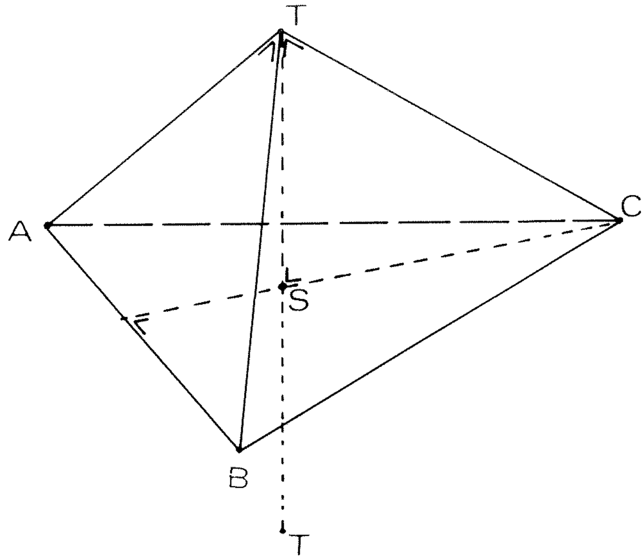
De kubus, nu beschouwd als willekeurige driehoek.

Nu elke vierhoek er als vierkant uit kan zien, is het hek van de dam. Op een regionale bijeenkomst werden ook vijfhoeken ontdekt als schaduw van een kubus. Als de nabije lichtbron precies langs één zijvlak strijkt, dan kan dat. Natuurlijk proberen we nu een regelmatig vijfhoekige schaduw te krijgen.
Neem een kubus van zeg 10 cm bij een hoofddiagonaal. We projecteren op een vast vlak. Twee gegevens, de windrichting en de steilheid bepalen de stand van de diagonaal. Je kunt nu de kubus alleen nog om de diagonaal draaien: het derde gegeven. De lichtbron moet in het nu vastgelegde vlak ABCD liggen, dat geeft nog twee vrijheidsgraden. Het geheel is door vijf gegevens bepaald. En nu moeten we dus vijf variabelen zo vastleggen dat er een regelmatige vijfhoek ontstaat. Een vijfhoek is pas door zeven gegevens bepaald. Als we de grootte nog even vrij laten – d.w.z. de hoogte die we het samenstel van kubus en lichtbron boven het vaste vlak laten innemen blijft vrij – dan is dat zes gegevens die moeten kloppen. Het zou kunnen lukken, maar gezien de vijf vrijheidsgraden die we maar hebben, moet het onwaarschijnlijk geacht worden. Wie het toch probeert moet het verder zelf maar uitzoeken.

Een extreem denkbeeldig geval bewaren we tot slot: Zet de puntvormige lichtbron precies op een hoekpunt van de kubus. De donkere ruimte achter de kubus is nu door drie vlakken begrensd, die elkaar in het lichtpunt snijden. Een schaduw is een snijvlak van deze driezijdige pyramide met een vlak. Kan elke driehoek zo ontstaan? Proberen maar met driehoek ABC, voorlopig scherphoekig.

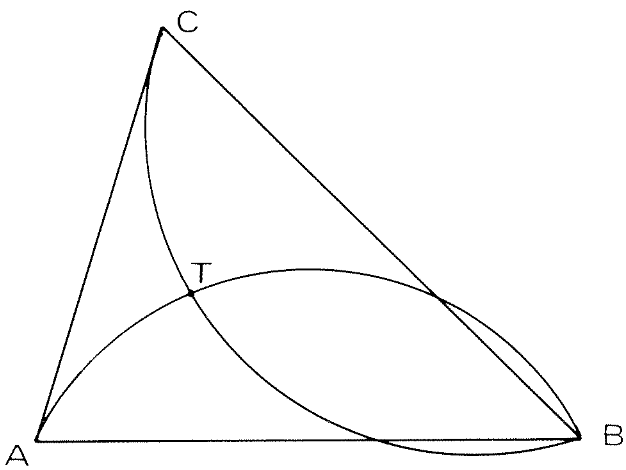


Vanwaar zien we AB onder 90°?
Dat is vanaf de bol met middellijn AB.
De drie bollen met middellijnen AB, BC en AC snijden elkaar in twee punten T en T[1]. Die punten voldoen. Vanuit T en T′ zien we alle zijden onder 90°.



Laat TT′ in S door het vlak van de driehoek gaan.
TS is loodrecht op ABCD. Dus is AB $\perp$ TS.
TC is loodrecht op ABT. Dus is AB $\perp$ TC.
Maar dan is AB ook loodrecht op CS. S ligt op de hoogtelijn uit C op AB. Maar natuurlijk ook op de andere twee hoogtelijnen .... Hé, die hoogtelijnen gaan door één punt!

Je kunt ook van een kleinere hoek uitgaan, bijvoorbeeld 60°; in plaats van de bol moet je dan een oppervlak nemen dat ontstaat door omwentelen van de boog waarvanuit je AB onder 60° ziet, rond AB. Een soort dichtgeknepen donut zonder gat is dat. Een grotere hoek mag ook, maar er is een grens: 3 keer die hoek is hoogstens 360°. Het geval 120° geeft een plat plaatje. Er is precies één punt waarvanuit je alle drie de zijden onder 120° ziet. Je construeert dat door de juiste bogen op AB en BC in het vlak van de driehoek te zetten. Je vindt één punt T. ATC is nu vanzelf 120°.



T is óók een bijzonder punt van de driehoek. Torricelli (ja, die van de kwikbarometer!) bewees in 1640 dat voor dit punt AT + BT + CT minimaal is. Kan de lezer dat ook? Suggestie: draai voor een ander punt T CTB rond B eens 60° naar rechts. Zo ontstaan C′ en T′. Beschouw AT + TT′ + T′C′.
Toch eeuwig zonde als die mooie meetkunde bestoft in de kast blijft liggen!