Orde van grootte

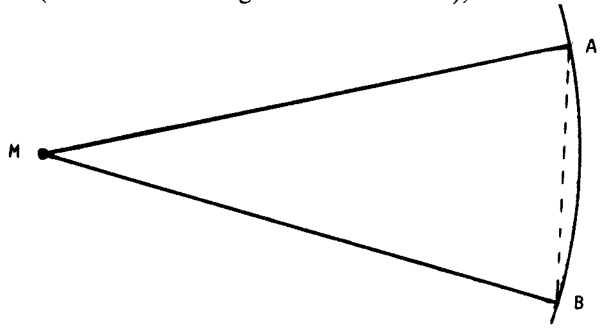
H. Freudenthal

Summary

A well-known paradox: a tunnel through the Earth between two points of the surface at a distance of 100 km would save you only about a metre, though it dips a few hundred metres under the ground. Length saving and dipping are not in a linear relation, not even approximately; they are of different orders of magnitude. Other examples: How far can a mouse look, compared with a man?
A taut string, 100 m long, from A to B, is lengthened by 1 cm; how deep will it drop at B? In measurement the number of observations must be increased n^2 times in order to increase the precision n times. Exponential growth looks exorbitant but for numerical approximations one needs much faster procedures.
Order of magnitude, though important in applications, is awfully neglected in mathematical instruction. No power series are needed to deal with it; even l'Hôpital's rule can be avoided.

Een tunnel

Kort geleden kwam ik een oude bekende tegen: het vraagstuk van de tunnel door de aarde van zeg, Amsterdam naar Arnhem, die je maar een meter weglengte bespaart, terwijl hij toch een paar honderd meter diep het aardrijk induikt. Het is gemakkelijk uit te rekenen.
Als de afstand AB op de eenheidscirkel gemeten x is (= $\angle$ AMB in zogenaamde radialen), dan wordt de



rechte afstand AB gelijk aan 2 sin ½x en het verschil tussen beide

$$x - 2 \sin \tfrac{1}{2}x =$$
$$= x - 2(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}x)^3 + \ldots) =$$
$$= \tfrac{1}{24}x^3 + \ldots ,$$

terwijl de "duiking" van de koorde is:

$$1 - \cos \tfrac{1}{2}x =$$
$$= \tfrac{1}{2}[(\tfrac{1}{2}x)^2 - \ldots]$$
$$= \tfrac{1}{8}x^2 - \ldots$$

Deze twee grootheden, lengtebesparing tot duiking, verhouden zich als

$\tfrac{1}{3}x$ staat tot 1.

Met de aardstraal als een eenheid en x een boog van 100 km lang wordt dit een verhouding van

$\tfrac{1}{3} \cdot 100$ staat tot ongeveer 6500

dus ongeveer

1 staat tot 200.

Bij een boog van maar 10 km lang zou dit liefst

1 staat tot 2000

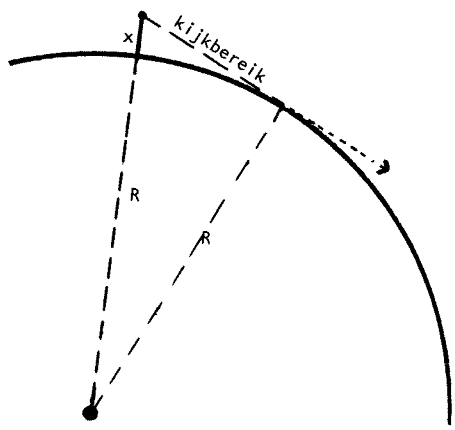
zijn.

Lengtebesparing en duiking verhouden zich niet lineair, ook niet bij benadering lineair. De lengtebesparing neemt veel vlugger af dan de duiking. Je zegt ook: ze schelen een orde van grootte. Dat is dan niet zo bedoeld als in natuurwetenschappen en techniek, dus numeriek volgens het tientallig stelsel, met telkens een factor 10, maar functioneel, met een factor van de onafhankelijke variabele x.

De muis en pythagoras

Hoever kan een muis en hoever kan de mens in de vlakte kijken? Met je oog op de hoogte x boven de aarde (met straal R) kijk je zover als de raaklijn lang is, dus

$$\sqrt{(2R + x)x} = \sqrt{2Rx + \ldots}$$

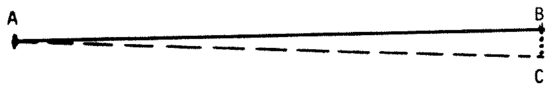


Neem je voor x respectievelijk 2m (mens) en 3 cm (muis), dan krijg je een zicht van respectievelijk

5 km en 500 m.

De muis kan naar verhouding verder kijken dan de mens.
Hoogte en zicht verhouden zich niet lineair. Je moet 100 keer zo hoog klimmen om 10 keer zo ver te kijken. Ze schelen een "halve" orde van grootte.

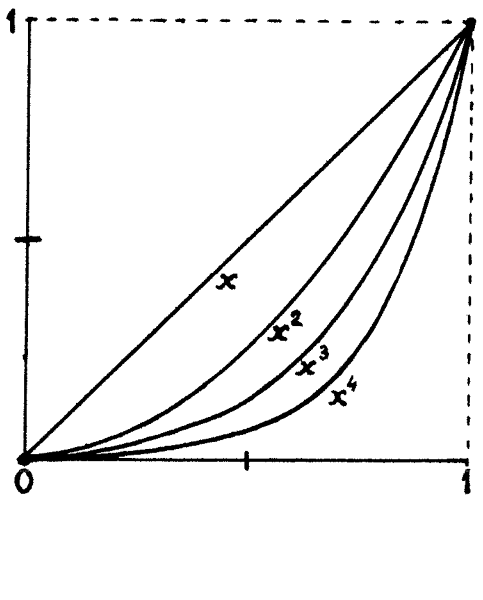
Ik span tussen A en B horizontaal een touw van 100 m lang. Ik verleng het met 1 cm. Hoever kan ik het dan bij B laten zakken?



De uitkomst is $\sqrt{2}$ m.
Van 't zelfde laken en pak is de $\sqrt{n}$ – wet uit de foutentheorie: je moet een grootheid 100 keer zo vaak meten om de nauwkeurigheid van het gemiddelde met een factor 10 op te voeren. Het zit hem ook weer in Pythagoras. Onafhankelijke fouten worden niet lineair opgeteld, maar alsof ze loodrecht op elkaar stonden, volgens Pythagoras. n keer de fout σ geeft voor de som een fout $\sqrt{\sigma^2 + \ldots \sigma^2} = \sqrt{n}\,\sigma$, dus voor het gemiddelde $\frac{1}{\sqrt{n}}\,\sigma$.

L'hôpital en nog eenvoudiger

Moet je voor beschouwingen als daarstraks iets afweten van reeksontwikkelingen zoals ik met de drie stippeltjes suggereerde? Reeksontwikkelingen zijn er voor wie ermee vertrouwd is. Het kan elementairer. Ik bedoel: met de regel van L'Hôpital, die in het onderwijs, voor zover hij er een kans krijgt, er jammer genoeg was losjes bijhangt. Het is echt jammer, want orde van grootte is in toepassingen van de wiskunde een belangrijk aspect. Het kan trouwens nog elementairer dan met L'Hôpital.
Als je achter elkaar de functies



$x \to x,\ x \to x^2,\ x \to x^3, \ldots$
bekijkt, zie je naarmate de exponent groeit
$x \to x^n$
vlugger met x naar 0 gaan en de grafiek zich nauwer aan de x-as koesteren. Je kunt het ook in de afgeleide uitdrukken: Van de functies die ik boven de revue liet passeren, verdwijnt telkens één afgeleide meer voor $x = 0$. De functie
$x \to x^n$
verdwijnt in $x = 0$ samen met al zijn afgeleiden tot de $(n-1)$-de toe, terwijl de n-de afgeleide $n!$ wordt.

Laten we nu omgekeerd een functie f veronderstellen die voor $x = 0$ samen met zijn afgeleiden tot een met de $(n-1)$-de verdwijnt, terwijl de n-de afgeleide de waarden $a\ (\neq 0)$ heeft. Dus $f^{(n)}(0) = a$, en voor x in de buurt van 0 ook nog $f^n(x)$ ongeveer a. Nu krijg je wegens $f^{(n-1)}(0) = 0$

$$f^{(n-1)}(x) = \int_0^x f^{(n)}(t)dt$$

hetgeen ongeveer ax is,

$$f^{(n-2)}(x) = \int_0^x f^{(n-1)}(t)dt$$

hetgeen ongeveer $\frac{1}{2}ax^2$ is, enz. tot uiteindelijk

$$f(x) \text{ ongeveer } \tfrac{1}{n!}\,ax^n.$$

Dus een functie die in 0 met zijn afgeleide tot en met de $(n-1)$-de verdwijnt, is daar van de orde als x^n. Wenst u een zorgvuldiger bewijs, dan veronderstelt ze de n-de afgeleide continu bij 0. In de buurt van 0 is dan
$a - \varepsilon < f^{(n)}(x) < a + \varepsilon$
waarbij n de (positieve ε) nog willekeurig klein mag nemen, als de "buurt van 0" maar voldoende klein wordt verondersteld. Door deze ongelijkheid n-keer te integreren, kom je bij

$$\tfrac{1}{n!}(a - \varepsilon)x^n < f(x) < \tfrac{1}{n!}(a + \varepsilon)x^n$$

terecht. Je kunt dit ook als volgt uitdrukken:
Is f n-keer differentieerbaar in de buurt van 0 en de n-de afgeleide continu in 0, dan is

$$\lim_{x \to 0} f(x)x^{-n} = a,$$

hetgeen een speciaal geval is van de regel van L'Hôpital, maar voor ons ook voldoende.

Als we de "lengtebesparing"

$$x \to x - 2 \sin \tfrac{1}{2}x$$

en de "duiking"

$$x \to 1 - \cos 2\,x$$

volgens deze methode behandelen, zien we voor $x = 0$ in het eerste geval de functie met haar eerste en tweede afgeleide verdwijnen, terwijl de derde ¼ is. In het tweede geval verdwijnt de functie alleen met zijn eerste afgeleide, terwijl de tweede ¼ is. Dit bevestigt opnieuw dat gemeten in de afstand de duiking van de tweede orde is, terwijl de wegbesparing van de derde is.

Voor zoiets kun je natuurlijk ook gemakkelijker voorbeelden aandragen. Ik wilde expres met iets moeilijks beginnen. Het meest voor de hand liggend en van grote importantie: als je voorwerpen op schaal kopieert, gedragen de oppervlakten zich als van de tweede en de inhouden als van de derde orde vergeleken bij de lineaire afmetingen, en overeenkomstig doen verschijnselen als warmte-uitwisseling en gewicht er kwantitatief aan mee. Een op de schaal 10 verkleind mens, zou maar een duizendste wegen, terwijl zijn huidoppervlak een honderdste zou zijn, naar verhouding zou hij dus 10 keer zoveel moeten eten om op temperatuur te blijven.

Halve ordes van grootte

We zijn trouwens nog andere orde van groottes tegengekomen. Het zicht als functie van de hoogte x gedroeg zich als $x^{1/2}$. Met L'Hôpital valt zo iets niet in te zien. Trouwens $x \rightarrow x^{1/2}$ is voor $x = 0$ niet eens differentieerbaar. Oorspronkelijk stond er voor het zicht de uitdrukking

$$z = \sqrt{(2R + x)x}\,.$$

Deel je dit door $x^{1/2}$ dan komt er

$$z \,/\, x^{1/2} = \sqrt{2R + x}$$

hetgeen voor $x \rightarrow 0$ tot $\sqrt{2R}$ nadert. Daarmee is dan de orde van grootte ½ gerechtvaardigd.
Zo moet je dan dergelijke uitspraken verstaan "een functie f gedraagt zich voor kleine $|x|$ als x^{α}":

$$A^{-1} \leq x^{-\alpha} f(x) \leq A$$

voor kleine $|x|$.

Voor x naar ∞

Orde van grootte is er ook in het spel voor grote x. Daarstraks had ik het al over de $\sqrt{n}$ – wet uit de foutentheorie, waarbij je aan grote n dacht.
Iets kan met de tijd t *lineair* groeien, bijvoorbeeld een kapitaal als je de rente niet opnieuw rente laat dragen. Of *kwadratisch* zoals de afgelegde weg $\frac{1}{2}gt^2$ van een eenparig versneld lichaam. Bij de Amerikaanse verkiezingen gaan de kiesmanstemmen van elke afzonderlijke deelstaat en bloc naar de kandidaat met de meeste stemmen in die staat. Je zou denken dat dit systeem de kleine deelstaten begunstigt. Het is net omgekeerd. De kieskracht van de afzonderlijke kiezers in een staat met n kiezers is van de orde $n^{-1/2}$. Dit heeft met de $\sqrt{n}$ – wet van de foutentheorie te maken: het aantal kiezers, vereist om een dubieuze staat "om" te krijgen, is niet constant, groeit ook niet als n, maar als $\sqrt{n}$. De kieskracht van een staat met n kiezers gedraagt zich dus als $n^{1/2}$. Een kleine correctie ten gunste van de heel kleine staten: het aantal kiesmannen is niet strikt evenredig met de bevolking, maar er komt een summand 2 bij. (1)

(1) Gardner, M: *Mathematical Games*, Scientific American Vol. 243 nr. 4, 1980, blz. 16-26.

Exponentiële groei

We hadden het hier over groei van een orde, aangeduid door een vast getal p in de exponent. g(t) groeit met, zeg, de tijd t als t^p, d.w.z.

$$at^p \leq f(t) \leq At^p$$

voor grote t. Maar het kan ook harder: de nu spreekwoordelijke exponentiële groei. De onafhankelijke variabele staat dan in de exponent. Zo groeit het kapitaal A bij samengestelde interest tot
Aq^n na n jaren, omdat elk jaar hetgeen er al is met

$$q = 1 + \frac{p}{100}$$

(p = percentage rente) wordt vermenigvuldigd.

Snelheid van convergentie

Hoe vlug een reeks of een rekenprocedure convergeert, wordt ook met dergelijke maten gemeten. De reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$$

doet het niet zo best. Je kunt de rest

$$\sum_{N+1}^{\infty} n^{-p}$$

schatten door middel van de integraal

$$\int_N^{\infty} x^{-p}\,dx = N^{-p+1}$$

hetgeen met $N \rightarrow \infty$ klein wordt van de orde $p - 1$.
De meetkundige reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

doet het beter. De rest

$$\sum_{N+1}^{\infty} q^n = \frac{q^{N+1}}{N+1}$$

gedraagt zich exponentieel. Maar bij benaderingsprocedures is exponentieel gedrag helemaal niet zo fraai. De reeks voor e

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

heeft de rest

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{N!}$$

Volgens de Stirling formule is

$$N! \sim \sqrt{2\pi N}\ (N/e)^N.$$

Dus wordt $1/N!$ razend vlug klein.
Een ander voorbeeld: Er is een procedure om $\sqrt{2}$ uit te rekenen als limiet van de rij die volgens de recursie

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

ontstaat. Hoe gedraagt de benaderingsfout r_n zich? Ik laat de berekening achterwege. De fout wordt bij elke stap zowat gekwadrateerd. Bij de n-de stap is hij van de orde

$$\alpha^{2^n}$$

en dat is heel wat vlugger dan exponentieel. Het gaat als het ware exponentieel-exponentieel.