De voetbal is natuurlijk het meest besproken veelvlak van het moment. Om orde te brengen in de grote hoeveelheid veelvlakken, heeft **H. G. Telkamp** een methode bedacht om ze systematisch allemaal te construeren.

Structuren van de veelvlakken

Inleiding

Het doel van de studie is een methode te vinden waarmee de veelvlakken met een bepaald aantal zijvlakken Z, hoekpunten H of ribben R kunnen worden gevonden. Dit doel wordt bereikt door stereometrische constructies toe te passen, waarbij de veelvlakken met R ribben worden afgeleid van veelvlakken met een lager aantal ribben. Hierdoor ontstaat een samenhang tussen de veelvlakken, die dan kunnen worden afgeleid uit het veelvlak met het laagste aantal ribben, het viervlak. Ik ga hierbij uit van de veronderstelling dat met behulp van een complete verzameling constructies een complete verzameling veelvlakken kan worden verkregen.

Definities

Een veelvlak is een afgesloten deel van de driedimensionale ruimte, dat begrensd wordt door veelhoeken als zijvlakken en veelvlakshoeken als hoekpunten. Het hoekpunt wordt opgevat als veelvlakshoek, waardoor het gelijkwaardig is aan het zijvlak. Er komen geen inspringende (concave) hoeken in voor, die niet door vervorming kunnen worden omgezet in convexe hoeken. Vervorming is het opnieuw tekenen van een veelvlak met andere lengte en hoekverhoudingen. De structuur blijft daarbij hetzelfde. Een structuur is een willekeurig en dus onregelmatig veelvlak, waarbij lengte en hoekverhoudingen niet bepaald zijn. De structuur is de manier, waarop de zijvlakken en zijvlakshoeken worden samengevoegd. Veelvlakken die dezelfde structuur hebben, zijn (kwalitatief) identiek; bijvoorbeeld een afgeknot viervlak en een driezijdig prisma zijn identiek. Een structuur is regelmatig als hij begrensd wordt door uitsluitend n-hoeken en m-vlakshoeken, want door toevoeging van de voorwaarde: de zijvlakken en de zijvlakshoeken zijn gelijkzijdig, ontstaan door vervorming de regelmatige veelvlakken. Een structuur is deelregelmatig als hij begrensd wordt door uitsluitend n-hoeken of m-vlakshoeken; bijvoorbeeld een afgeknot viervlak, $m = 3$, is deelregelmatig. Een structuur is symmetrisch als na vervorming ten minste één symmetrievlak kan worden gevonden. De convexe voorwaarde betekent dat een rechte die het veelvlak snijdt, twee snijpunten heeft.

Voor deze veelvlakken geldt (ook zonder convexiteit) de stelling van Euler: $Z + H = R + 2$.

Z is het aantal zijvlakken

H is het aantal zijvlakshoeken

R is het aantal ribben

Z, H en R zijn natuurlijke getallen: $Z \geq 4$, $H \geq 4$, $R \geq 6$

Een zijvlak is een veelhoek met drie of meer zijden. Een zijvlakshoek is een hoekpunt met drie of meer hoeken $< 180°$. Een ribbe is een lijnstuk waarin twee zijvlakken en twee zijvlakshoeken samenkomen. Zijvlakken en zijvlakshoeken zijn de elementen van een veelvlak.

Aan de formule van de stelling van Euler is te zien:

a. Het is de voorstelling van een plat vlak in de variabelen Z, H en R.
b. R is het grootste getal.
c. Als de getalswaarden van Z en H worden verwisseld, blijft R gelijk.
d. Veelvlakken en structuren kunnen worden ingedeeld in de kenmerken Z, H of R.

Op grond van b) en c) lijkt R het beste kenmerk om de veelvlakken en de structuren in te delen. De veelvlakken waarbij de substituenten van Z en H zijn verwisseld, komen dan in dezelfde verzameling R-ribbige veelvlakken of structuren. Dit feit geeft aanleiding tot het gebruik van het begrip toegevoegde of duale veelvlakken of structuren. Dit zijn twee veelvlakken waarbij de getalswaarden van Z en H en van z_i en h_i zijn verwisseld. z_i is het aantal i-hoeken en h_i is het aantal i-vlakshoeken. Bij iedere i-hoek hoort een i-vlakshoek en omgekeerd. Z, $H \geq 4$; z_i, $h_i \geq 0$ en $i \geq 3$. Dus als $(Z, H) = (n_1, n_2)$ dan geldt voor de toegevoegde $(z_i, h_i) = (a, b)$. Er doen zich twee gevallen voor: de toegevoegde en zijn origineel zijn identiek of ze zijn verschillend.

Voorbeeld 1: de toegevoegde van de n-zijdige piramide is de piramide zelf.

Voorbeeld 2: de n-zijdige bipiramide en de afgeknotte n-zijdige piramide zijn toegevoegd.

Voorbeeld 3: de $2n$-zijdige trapezoëder en de $(2n + n)$-zijdige prismoïde zijn toegevoegd.

Grenzen van Z en H als functie van R

De bovengrens: Een veelvlak heeft zoveel mogelijk zijden als het zoveel mogelijk driehoeken bevat. Als er alleen driehoeken zouden zijn, dan geldt: voor iedere driehoek zijn drie ribben nodig, dus, $R = 3Z$, maar iedere ribbe wordt gedeeld door twee zijvlakken, dus $R = \frac{3Z}{2}$ en $Z = \frac{2R}{3}$.
In het algemeen geldt dus: $Z \le \frac{2R}{3}$.

Een veelvlak heeft zoveel mogelijk hoekpunten als het zoveel mogelijk drievlakshoeken bevat. Als er alleen drievlakshoeken zijn, dan zijn voor iedere drievlakshoek drie ribben nodig, dus $R = 3H$, maar iedere ribbe wordt gedeeld door twee zijvlakshoeken, dus $R = \frac{3H}{2}$ en $H = \frac{2R}{3}$ is het maximum.
In het algemeen geldt: $H \le \frac{2R}{3}$.

De benedengrens: Een veelvlak heeft zo weinig mogelijk zijden als er zijden in voorkomen met zo veel mogelijk ribben en hoekpunten. Dit is het geval met de afgeknotte n-zijdige piramide. Deze bestaat uit twee n-hoeken en n vierhoeken. Het veelvlak kan men opgebouwd denken uit n drieribbige gebroken rechten in de vorm van een C of U, waarbij de drie ribben in één vlak liggen. Voor iedere vierhoek is één gebroken rechte nodig, dus $R = 3Z$ en $Z = \frac{R}{3}$, maar de boven- en onderzijde tellen nog mee, dus $Z = \frac{R}{3} + 2$ is het minimum.
In het algemeen geldt: $Z \ge \frac{R}{3} + 2$.

Een veelvlak heeft zo weinig mogelijk hoekpunten als er hoekpunten in voorkomen met zo veel mogelijk ribben en zijden. Dit is het geval met de n-zijdige bipiramide. Deze bestaat uit twee n-vlakshoeken en n viervlakshoeken. Het veelvlak kan men opgebouwd denken uit n drieribbige stervormige figuren, waarvan de ribben niet in één vlak liggen. Ze hebben de vorm van een drievlakshoek. Dus $R = 3H$ en $H = \frac{R}{3}$, maar de twee toppen tellen nog mee, dus $H = \frac{R}{3} + 2$ is het minimum.
In het algemeen geldt: $H \ge \frac{R}{3} + 2$.
Voor Z en H gelden dezelfde boven- en benedengrenzen: $\frac{R}{3} + 2 \le Z\ ,\ H \le \frac{2R}{3}$.

Voor iedere waarde van $R \ge 6$ en met behulp van de stelling van Euler vinden we de benedengrens, de bovengrens en de bijbehorende (Z, H) koppels van de veelvlakken (structuren):

$R = 6$ $4 \le Z\ ,\ H \le 4$ $(Z, H) = (4, 4)$: de driezijdige piramide $R6$

$R = 7$ $4\frac{1}{3} \le Z\ ,\ H \le 4\frac{2}{3}$ een zevenribbe bestaat niet

$R = 8$ $4\frac{2}{3} \le Z,\ H \le 5\frac{1}{3}$ $(Z, H) = (5, 5)$: de vierzijdige piramide $R8$

$R = 9$ $5 \le Z\ ,\ H \le 6$ $(Z, H) = (5, 6)$: de afgeknotte driezijdige piramide; $(Z, H) = (6, 5)$: de driezijdige bipiramide

$R = 10$ $5\frac{1}{3} \le Z,\ H \le 6\frac{2}{3}$ $(Z, H) = (6, 6)$: drie veelvlakken

$R = 11$ $5\frac{2}{3} \le Z,\ H \le 7\frac{1}{3}$ $(Z, H) = (6, 7)$ en $(7,6)$: vier veelvlakken

$R = 12$ $6 \le Z\ ,\ H \le 8$ $(Z, H) = (6, 8)$ $(7, 7)$ en $(8, 6)$: vijftien veelvlakken

$R = 13$ $6\frac{1}{3} \le Z,\ H \le 8\frac{2}{3}$ $(Z, H) = (7, 8)$ en $(8, 7)$: onbekend

Het Z, H diagram

Grafische voorstelling van de (Z, H) - koppels.
In het Z, H-vlak ($Z = y,\ H = x$) is er voor iedere $R \ge 6$ een rechte $Z + H = R + 2 \rightarrow Z = -H + R + 2$ ofwel $y = -x + R + 2$. Dit is een rechte loodrecht op de bissectrix van het eerste kwadrant. Er ontstaat voor alle $R \ge 6$ een bundel van deze evenwijdige rechten. De (Z, H) - koppels zijn geheeltallige punten op deze rechten gelegen op, of symmetrisch tegenover de lijn $y = x$. Als twee veelvlakken aan elkaar zijn toegevoegd, liggen hun (Z, H) - koppels symmetrisch tegenover de lijn $y = x$. Als een veelvlak aan zichzelf is toegevoegd, ligt het (Z, H) - koppel op de lijn $y = x$.

Vergelijkingen voor veelvlakken

In de vergelijking van de stelling van Euler $Z + H = R + 2$ kunnen we Z en H specificeren. z_i is het aantal i-hoeken. h_i is het aantal i-vlakshoeken, z_i, $h_i \ge 0$ $i \ge 3$:
$Z = z_3 + z_4 + z_5 + ... + z_i$
$H = h_3 + h_4 + h_5 + ... + h_i$
Als we de projecties van de elementen van een veelvlak afzonderlijk tekenen, dan zijn daarvoor $2R$ lijnstukken nodig, want bij samenvoegen vallen telkens twee lijnstukken samen tot één ribbe:
$3z_3 + 4z_4 + 5z_5 + ... + iz_i = 2R$
$3h_3 + 4h_4 + 5h_5 + ... + ih_i = 2R$
De hoogste waarde van i in de laatste termen wordt bepaald door de waarde van R.
Stelling van $\frac{R}{2}$: de n-zijdige piramide is het grensgeval. Als $R = 2n$, komen hoogstens n-hoeken en n-vlakshoeken voor. Als $R = 2n + 1$, komen ook hoogstens n-hoeken en n-vlakshoeken voor, $n \ge 3$.
Bewijs: in een n-zijdige piramide komen hoogstens een n-hoek als grondvlak en een n-vlakshoek als top voor. Deze piramide heeft $2n$ ribben. Als we één ribbe extra hebben, is dit onvoldoende om een $n + 1$-hoek en een $n + 1$-vlakshoek te maken, want hiervoor zijn twee ribben extra nodig, dus i het grootste gehele getal $\le \frac{R}{2}$.
Voor iedere waarde van $R \ge 6$ ontstaan stelsels vergelijkingen waarbij voor Z en H de waarden van de (Z, H) - koppels worden ingevuld en voor i het uit R berekende getal.
De vergelijkingen zijn niet oplosbaar met de methoden van de algebra, omdat het aantal onbekenden groter is dan het aantal vergelijkingen. De oplossingen moeten dus op een andere manier worden verkregen: ze worden afgelezen van (projectie)tekeningen of modellen. Ook de structuur van

een veelvlak is alleen te zien in een tekening of model. Onder aflezen wordt verstaan het tellen van het aantal n-(vlaks)hoeken $3 \le n \le \frac{R}{2}$ van de veelvlakken die door constructies zijn verkregen. De afgelezen oplossingen van deze vergelijkingen:

$Z\,(z_3\; z_4\; z_5\; ....\; z_n)$
$H\,(h_3\; h_4\; h_5\; ....\; h_n)$

kunnen worden gebruikt als brutoformule van de bijbehorende veelvlakken. De getallen 3 4 5 .... *n* noemen we de talligheid *t*, het aantal zijden of hoeken van de veelhoeken of veelvlakshoeken die in een veelvlak voorkomen. De brutoformule zegt alleen welke elementen aanwezig zijn en hoeveel van elk. Als met de elementen uit één brutoformule verschillende structuren kunnen worden gevormd, noemen we die isomeren.

Differentialen van Z, H en R

We maken gebruik van de stelling: de verandering van de som van twee of meer variabelen = de som van de veranderingen van de afzonderlijke variabelen. Een differentiaal wordt aangegeven met de Griekse hoofdletter delta, afgekort *d*.

$d(Z + H) = d\,(R + 2) \rightarrow dZ + dH = dR + d2.$ De verandering van een constante is 0, dus $dZ + dH = dR$. Ook geldt:

$dZ = dz_3 + dz_4 + ... + dz_n$
$dH = dh_3 + dh_4 + ... + dh_n$
$3dz_3 + 4dz_4 + ... + \mathrm{n}dz_n = 2dR$
$3dh_3 + 4dh_4 + ... + \mathrm{n}dh_n = 2dR$

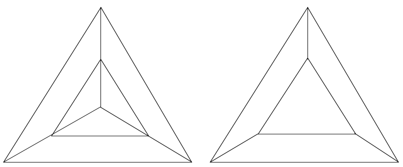
n is het grootste gehele getal $\le \frac{R}{2}$. $dZ\; dH\; dR\; dz_i\; dh_i$ zijn gehele getallen. De differentialen worden gebruikt om de veranderingen die door constructies in veelvlakken ontstaan gedeeltelijk te karakteriseren. Ze worden afgelezen van constructietekeningen.

Constructies

De vanouds bekende constructie is het afknotten, afgekort als A. Op drie van de ribben van een veelvlakshoek wordt een punt gekozen. Door de drie ribben wordt een vlak aangebracht dat de eventuele andere ribben van de veelvlakshoek snijdt in punten die samen een veelhoek vormen, het grondvlak van een verwijderde piramide. Bij het afknotten van een *n*-vlakshoek ontstaan *n* drievlakshoeken. De talligheid van de afgeknotte veelhoeken stijgt met 1. Voor deze constructie geldt: $dZ = 1$, $dH \ge 2$, $dR \ge 3$.

De constructie wordt uitgevoerd met R6, het eenvoudigste veelvlak, de driezijdige piramide of het viervlak, $Z = z_3 = 4$, $H = h_3 = 4$, de talligheid $t = 3$

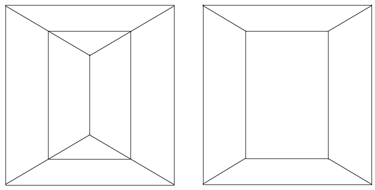
t (3)	*t*(3 4)
Z(4) -A-	*Z*(2 3)
H(4)	*H*(6 0)
*R*6	*R*9 & *R*6



Er ontstaat een afgeknotte driezijdige piramide, $z_3 = 2$, $z_4 = 4$, $h_3 = 6$, $h_4 = 0$. Voorbeeld: een driezijdig prisma. De structuur is deelregelmatig: alleen drievlakshoeken.

De tweede constructie is het afknotten van een ribbe (A_2). Hierbij worden twee punten gekozen op twee ribben van een veelvlakshoek en een derde op een ribbe van een aangrenzende veelvlakshoek. Er wordt een tentvormig stuk verwijderd, dat evenveel ribben kan hebben als het achtergebleven stuk. Ook voor deze constructie geldt: $dZ = 1$, $dH \ge 2$, $dR \ge 3$. De constructie wordt uitgevoerd met de afgeknotte driezijdige piramide:

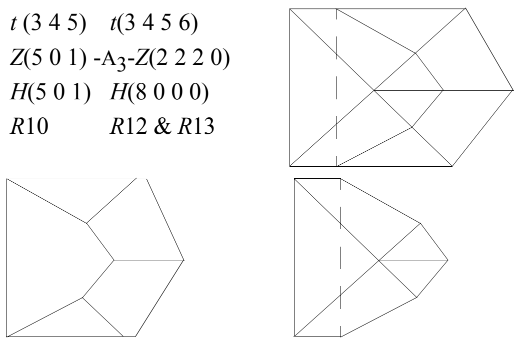
t (3 4)	*t*(3 4 5 6)
Z(2 3)-A_2-	*Z*(0 6 0 0)
H(6 0)	*H*(8 0 0 0)
*R*9	*R*12 & *R*9



Er ontstaat een afgeknotte vierzijdige piramide, een afgeknotte driezijdige piramide wordt verwijderd. Voorbeelden: parallellepipedum, romboëder, rechthoekig blok, kubus. De structuur is regelmatig: alleen vierhoeken en drievlakshoeken. In twee stappen zijn we van R6 naar R12 gekomen.

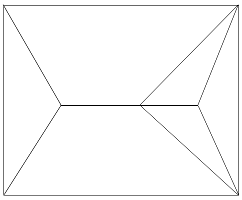
De derde afknottingsconstructie is de afknotting van een zijvlak (A_3): drie punten worden gekozen op de ribben van drie veelvlakshoeken die op dit zijvlak uitkomen. Voor deze constructie geldt $dZ = 0$, $dH \ge 0$, $dR \ge 0$, $dH = dR$. Het verwijderde stuk van de afknotting is zelf ook weer een veelvlak. De beide zijvlakken die uit het afknottingsvlak ontstaan, worden uitsluitend begrensd door drievlakshoeken. Bij A_3 wordt een schijf afgesneden waarvan de zijkant bestaat uit drie- en vierhoeken. Het verwijderde veelvlak kan meer ribben hebben dan het achtergebleven veelvlak. De constructie wordt uitgevoerd met de vijfzijdige piramide:

t (3 4 5)	*t*(3 4 5 6)
Z(5 0 1) -A_3-	*Z*(2 2 2 0)
H(5 0 1)	*H*(8 0 0 0)
*R*10	*R*12 & *R*13



Deze R12 is deelregelmatig, alleen drievlakshoeken. De brutoformule van de R13 is *t*(3 4 5 6) *Z*(3 3 1 0) *H*(7 0 1 0). Bij een constructie is meestal een toegevoegde constructie te vinden. In dit geval wordt een nieuw hoekpunt gekozen buiten en boven een zijvlak van een veelvlak. Door dit hoekpunt en de ribben van het zijvlak worden vlakken aangebracht die elkaar snijden in een piramide. Bij het piramideren (P) van een *n*-hoek ontstaan *n* driehoeken. De talligheid van de veelvlakshoeken aan de basis stijgt met 1. Voor deze constructie geldt: $dZ \ge 2$, $dH = 1$, $dR \ge 3$. De constructie wordt uitgevoerd met het afgeknotte viervlak:

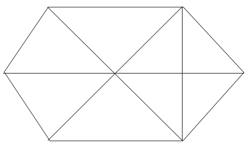
t (3 4) *t*(3 4 5 6)
Z(2 3) -P-*Z*(4 3 0 0)
H(6 0) *H*(4 3 0 0)
*R*9 *R*12

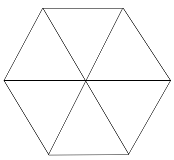


Een gelede driezijdige piramide, symmetrisch, gelijktallig, één van de zes isomeren met deze brutoformule.
De afknotting A en A_2 en de piramidering P zijn constructies waarbij dR het grootste is. Bij afknotting en piramidering van een n-zijdige piramide $R = 2n$ ontstaan maximaal n nieuwe ribben, $dR = n$, dus van $R = 2n$ naar $R = 3n$; $R(\text{voor}) = \frac{2}{3}\ R(\text{na})$ of $R(\text{na}) = \frac{3}{2}\ R(\text{voor})$. Omdat met A, A_2 en P alleen veelvlakken kunnen worden geconstrueerd met $dR \geq 3$, zijn er nog meer constructies nodig met lager dR. Deze constructies worden verkregen uit A en P door het afknottingsvlak en het piramideringstoppunt een bijzondere ligging te geven. De uitbreiding van een zijvlak met een hoekpunt en een ribbe is zo'n constructie: UZ:

1. Breid een zijvlak van een veelvlak uit, Z_1.
2. Kies een ribbe van dit zijvlak.
3. Trek de aangrenzende ribben door; er ontstaat een tweehoek of een driehoek. Een tweehoek bestaat uit een ribbe en twee halve rechten aan één kant. De hoeken zijn $\geq 90°$.
4. Kies in de tweehoek of de driehoek een nieuw hoekpunt.
5. Verbind dit hoekpunt met de hoekpunten van de gekozen ribbe en met de andere hoekpunten van het aangrenzende zijvlak Z_2. De gekozen ribbe wordt een diagonaal van de uitgebreide Z_1. Het gekozen hoekpunt wordt de top van een piramide met Z_2 als grondvlak. Z_2 verdwijnt als zijvlak. De constructie wordt uitgevoerd met de vijfzijdige piramide:

t (3 4 5) *t*(3 4 5 6)
Z(5 0 1) -UZ-*Z*(6 0 0 1)
H(5 0 1) *H*(6 0 0 1)
*R*10 *R*12

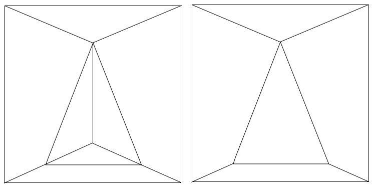




De zeszijdige piramide, symmetrisch en gelijktallig. Voor deze constructie geldt: $dZ \geq 1$, $dH = 1$, $dR \geq 2$.
De toegevoegde constructie is het afknotten door een hoekpunt AH: kies een ribbe AB, kies op twee ribben van de veelvlakshoek B twee punten C en D, door A C en D wordt het afknottingsvlak aangebracht. Voor deze constructie geldt: $dZ = 1$, $dH \geq 1$, $dR \geq 2$.

De constructie wordt uitgevoerd met het afgeknotte viervlak:

t (3 4) *t*(3 4 5)
Z(2 3) -AH-*Z*(2 0 4)
H(6 0) *H*(6 1 0)
*R*9 *R*11

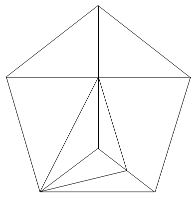


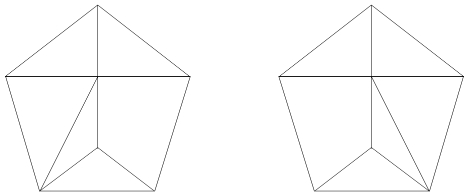
Eén van de vier symmetrische *R*11. Er wordt een *R*6 verwijderd. Omdat met UZ en AH alleen veelvlakken kunnen worden geconstrueerd met $dR \geq 2$ zijn er nog constructies nodig met een lagere dR. Zo'n constructie is de diagonalisering van een zijvlak van een veelvlak (DZ):

1. Trek een diagonaal in een zijvlak.
2. Breng een afknottingsvlak aan door de diagonaal en een punt op een overstaande veelvlakshoek. Per diagonaal zijn er twee afknottingsvlakken mogelijk. Er ontstaat een nieuw zijvlak dat de overstaande zijvlakshoeken snijdt.

Voor deze constructie geldt: $dZ = 1$, $dH \geq 0$, $dR \geq 1$. De constructie wordt uitgevoerd met een R11, de diagonaal wordt een nieuwe ribbe:

t (3 4 5) *t*(3 4 5 6)
Z(3 2 1) -DZ-*Z*(5 1 1 0)
H(6 1 0) *H*(5 1 1 0)
*R*11 *R*12



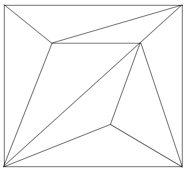


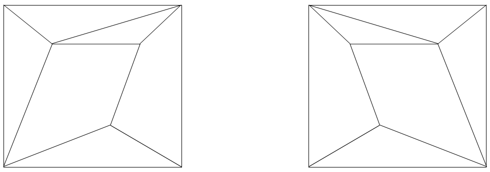
Er ontstaan twee spiegelbeeldisomeren. Bovendien is de toegevoegde identiek met het origineel. Het is gelijktallig. Er wordt een *R*6 verwijderd.
De toegevoegde constructie van DZ is de diagonalisering van een zijvlakshoek van een veelvlak DH. Deze zijvlakshoek moet minstens een viervlakshoek zijn:

1. Kies een zijvlak Z_1 en een aangrenzende veelvlakshoek.
2. Breid de vlakken van de aangrenzende zijvlakken Z_2 en Z_3 uit tot een snijlijn wordt verkregen. De halve snijlijn gelegen boven Z_1 is een diagonaal van de veelvlakshoek.
3. Kies een nieuw hoekpunt op deze diagonaal.
4. Verbind het hoekpunt met de andere hoekpunten van Z_1.

Deze constructie is een piramidering waarbij het toppunt van de piramide het nieuw gekozen hoekpunt is. Twee ribben van Z_2 en Z_3 worden diagonalen. Voor deze constructie DH geldt: $dZ \geq 0$, $dH = 1$, $dR \geq 1$.
De constructie wordt uitgevoerd met een *R*11.

$t(3\ 4\ 5)$ $t(3\ 4\ 5\ 6)$
$Z(6\ 1\ 0)$ -DH-$Z(4\ 3\ 0\ 0)$
$H(2\ 4\ 0)$ $H(4\ 3\ 0\ 0)$
$R11$ $R12$



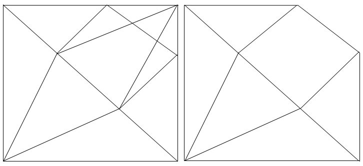


Er ontstaan twee asymmetrische spiegelbeeldisomeren, de toegevoegde is identiek aan het spiegelbeeld. Dit zijn twee van de zes isomeren van dezelfde brutoformule. Dan zijn er nog twee constructies met $dR \geq 0$: het afknotten door een ribbe, AR:

1. Kies een ribbe R_1.
2. Kies een punt op een tegenoverstaande kruisende ribbe R_2, die deel uitmaakt van een tegenoverstaande veelvlakshoek.
3. Trek het vlak door R_1 en dit punt. Er ontstaat een nieuw zijvlak.

Voor deze constructie AR geldt: $dZ = 0$, $dH \geq 0$, $dR \geq 0$. Dit zijn dezelfde benedengrenzen als bij A_3. De constructie wordt uitgevoerd met een $R11$:

$t(3\ 4\ 5)$ $t(3\ 4\ 5\ 6)$
$Z(6\ 1\ 0)$ -AR-$Z(5\ 1\ 1\ 0)$
$H(2\ 4\ 0)$ $H(4\ 3\ 0\ 0)$
$R11$ $R12$ & $R8$

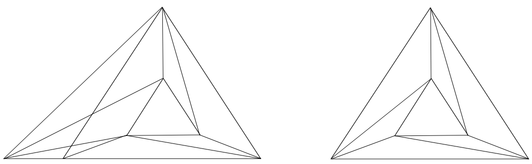


Er ontstaat een symmetrisch $R12$, een $R8$ wordt verwijderd. De toegevoegde constructie van AR is het uitbreiden van een drievlakshoek langs een ribbe, UH_3:

1. Verleng een ribbe die in een drievlakshoek eindigt.
2. Kies op de verlengde ribbe een nieuw hoekpunt.
3. Trek nieuwe ribben vanuit dit hoekpunt naar de hoekpunten van de veelhoek die onder de verlengde ribbe ligt.

Voor deze constructie UH_3 geldt: $dZ \geq 0$, $dH = 0$, $dR \geq 0$. De constructie wordt uitgevoerd met een $R11$:

$t(3\ 4\ 5)$ $t(3\ 4\ 5\ 6)$
$Z(6\ 1\ 0)$ -UH_3-$Z(8\ 0\ 0\ 0)$
$H(2\ 4\ 0)$ $H(0\ 6\ 0\ 0)$
$R11$ $R12$



Er ontstaat een regelmatige achtvlakstructuur. Voorbeeld: skalenoëder en octaëder.

We hebben nu tien constructies:

	dZ	*dH*	*dR*	*afk.*	*naam*
1	1	≥ 2	≥ 3	A	Afknotting van een hoek
2	1	≥ 2	≥ 3	A_2	Afknotting van een ribbe
3	0	≥ 0	≥ 0	A_3	Afknotting van een zijvlak
4	≥ 2	1	≥ 3	P	Piramidering
5	1	≥ 1	≥ 2	AH	Afknotting door een hoekpunt
6	≥ 1	1	≥ 2	UZ	Uitbreiding van een zijvlak
7	1	≥ 0	≥ 1	DZ	Diagonalisering van een zijvlak
8	≥ 0	1	≥ 1	DH	Diagonalisering van een zijvlakshoek
9	0	≥ 0	≥ 0	AR	Afknotting door een ribbe
10	≥ 0	0	≥ 0	UH_3	Uitbreiding van een drievlakshoek

Uit een veelvlak met R ribben kunnen veelvlakken worden geconstrueerd met een aantal ribben dat loopt van $R + 1$ tot het grootste gehele getal $\leq \frac{3R}{2}$ door eenmalige toepassing van elk van de constructies op de juiste plaatsen in het veelvlak R. Omgekeerd volgt hieruit dat de veelvlakken met R ribben kunnen worden afgeleid uit de veelvlakken waarvan het aantal ribben loopt van het kleinste gehele getal $\geq \frac{2R}{3}$ tot R-1 door eenmalige toepassing van elk van de constructies op de veelvlakken op alle mogelijke plaatsen. De veelvlakken van deze verzameling moeten weer op dezelfde wijze worden geconstrueerd uit verzamelingen veelvlakken met lagere R, zodat we uitkomen bij het veelvlak met de laagste R: het viervlak $R6$ of de driezijdige piramide.

De veelvlakken zijn af te leiden uit $R6$ door herhaalde toepassing van de tien constructies in de juiste volgorde en op de juiste plaatsen in de veelvlakken. Als we de veelvlakken met R ribben willen construeren, is het nodig om eerst de veelvlakken te construeren waarvan het aantal ribben loopt van 6 tot R-1.

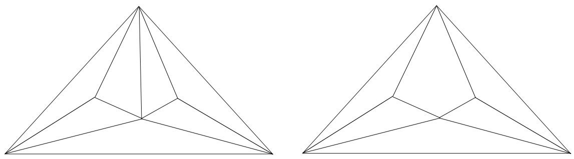
Als we de twaalfribbigen $R12$ willen construeren, dan zijn nodig: $R8$ uit $R6$, $R9$ uit $R6$ en $R8$, $R10$ uit $R8$ en $R9$, $R11$ uit $R8$, $R9$ en $R10$, $R12$ uit $R8$, $R9$, $R10$ en $R11$. Deze uitvoerige werkwijze is nodig om er zeker van te zijn dat geen veelvlak wordt gemist. Achteraf blijkt dat, behalve de piramide, $R9$ uit $R8$, $R10$ uit $R9$, $R11$ uit $R10$ en $R12$ uit $R11$ kan worden afgeleid.

Naast de constructies die vooral drievlakshoeken, bijvoorbeeld afknotten, en driehoeken, bijvoorbeeld piramideren opleveren, zijn er nog twee constructies die een vierhoek of een viervlakshoek geven.

Constructie 11: Breng door een ribbe een vlak aan dat buiten een veelvlak is gelegen. Kies aan weerszijden van de ribbe twee punten in het vlak. Trek de verbindingslijnen van de twee punten met de hoekpunten van de aan de ribbe grenzende zijvlakken. De ribbe wordt een diagonaal van een vierhoek, de verbindingslijn van de twee punten wordt de andere diagonaal. De ribbe verdwijnt als ribbe van het veelvlak: $dR = -1$. De verbindingslijnen met

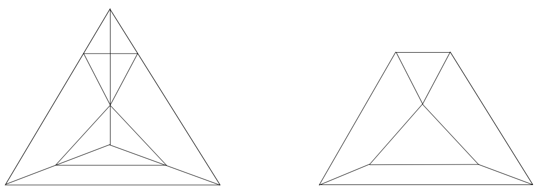
de hoekpunten van de twee aangrenzende zijvlakken komen erbij: $dR = 4$ (van de vierhoek) + de zijvlakken van de piramide-achtige structuren (minstens vier) - 2 (verdwijnende zijvlakken) of $dZ \geq 3$. $dH = 2$ (de twee gekozen punten. Naam: bipiramidering; afkorting: BP.
De constructie wordt uitgevoerd met een driezijdige piramide ($R6$).

$t(3)$ $t(3\ 4\ 5)$
$Z(4)$ -BP-$Z(6\ 1\ 0)$
$H(4)$ $H(2\ 4\ 0)$
$R6$ $R11$



Er ontstaat één van de vier elfribbigen; het is symmetrisch.
Constructie 12: In plaats van een vlak aan te brengen door een ribbe van een veelvlak en dan twee punten te kiezen aan weerszijden van de ribbe, kan ik ook een (hoek)punt kiezen op een ribbe en dan twee afknottingsvlakken aanbrengen door het punt en de twee aangrenzende veelvlakshoeken: de dubbele afknotting DA.
De ribbe die verdwijnt, wordt vervangen door een viervlakshoek: $dR = -1$, $dH_4 = 1$. In plaats van de eindpunten van de ribbe komen twee zijvlakken: $dH = -2$, $dZ = 2$.
$dR \geq 6$ (van de zijvlakken) -1 of $dR \geq 5$.
$dH \geq 5$ (inclusief het gekozen punt) -2 of $dH \geq 3$.
De constructie wordt uitgevoerd met een driezijdige piramide ($R6$).

$t(3)$ $t(3\ 4\ 5)$
$Z(4)$ -DA-$Z(2\ 4\ 0)$
$H(4)$ $H(6\ 1\ 0)$
$R6$ $R11$



Er ontstaat één van de vier symmetrische elfribbigen. In dit geval zijn met twee toegevoegde constructies twee toegevoegde veelvlakken verkregen.

Afbeeldingen van veelvlakken

De klassieke afbeelding uit de stereometrie is een figuur bestaande uit 'zichtbare' ribben aan de voorkant, die als getrokken lijnen worden weergegeven, en 'onzichtbare' ribben aan de achterkant, die als gestippelde lijnen worden weergegeven. Het is een projectietekening, waarbij de projecterende lijnen evenwijdig lopen van het veelvlak naar het projectievlak. Als vorm en grootte van belang zijn, zijn drie projecties nodig op drie projectievlakken die samen een drievlakshoek vormen. Als afgezien wordt van vorm en grootte is één projectie voldoende.
Een veelvlak kan zo worden vervormd dat alle ribben zichtbaar worden bij projectie op een gekozen zijvlak als grondvlak, het Schlegeldiagram. Er ontstaat dan een vlak netwerk dat voldoet aan de eisen:

- In ieder punt komen minstens drie ribben samen.
- Er komen geen veelhoeken met inspringende hoeken in voor.

Voor zo'n netwerk geldt ook de stelling van Euler voor veelvlakken, mits de omtrek als zijvlak wordt meegeteld. Het beeldvlak telt dan dubbel. Het netwerk wordt aan één kant van het beeldvlak bekeken. Als het beeldvlak doorzichtig is, en we bekijken de afbeelding aan de andere kant, dan zien we het netwerk van het spiegelbeeld van het veelvlak. Deze twee veelvlakken kunnen spiegelbeeldisomeren zijn, bijvoorbeeld bij $R10$. Deze netwerken kunnen gebruikt worden om de tien constructies aan uit te voeren.
Een willekeurig netwerk dat aan de twee eisen voldoet, is in het algemeen geen projectie van een veelvlak, maar geeft wel de juiste structuur weer. Voorbeeld: de structuur van een afgeknotte vierzijdige piramide, een vierhoek omgeven door een ring van vier vierhoeken is een projectie als de drie bundels van de vier verlengde overstaande ribben door drie punten gaan die drie affiniteitsassen vormen en een affiniteitsdriehoek.
Voorbeeld: een veelhoek die geheel met driehoeken is 'gevuld', is een projectie.
Als een netwerk of projectie op ondoorzichtig papier is getekend en daarna wordt uitgeknipt, dan ontstaat een vlak structuurmodel. Beide zijden van het papier geven nu een deel van de structuur weer van hetzelfde veelvlak. Op de lege achterkant kunnen ook één of meer ribben worden ingetekend.
Voorbeeld: teken een vierhoek $ABCD$, trek diagonaal AC, knip de vierhoek uit, trek op de andere kant diagonaal BD. Er ontstaat een projectiemodel (PM) van $R6$.
$ABCD$ is de projectie van een vierledige ribbering. Een ribbering is een niet-vlakke veelhoek die alleen uit lijnstukken bestaat.
Voorbeeld 2: teken een driehoek, kies een punt binnen de driehoek en verbind dit met de hoekpunten. Dit is de projectie van $R6$. Het PM ontstaat door de figuur uit te knippen. De netwerken aan weerszijden van het PM kunnen aan één zijde van het papier zichtbaar gemaakt worden door de uitslag van het PM te tekenen: UPM. De uitslag bestaat uit twee veelhoeken die gespiegeld zijn ten opzichte van een gemeenschappelijke ribbe (scharnier).
Elk van de veelhoeken bevat een netwerk van de projectie van één kant van het veelvlak. Bij terugvouwen langs het scharnier ontstaat weer het PM.
Voorbeeld 1: teken twee gespiegelde driehoeken met een

gemeenschappelijke ribbe, kies in één van de driehoeken een punt en trek de lijnen naar de hoekpunten. Dit is een UPM van $R6$.

Voorbeeld 2: teken twee gespiegelde vierhoeken *ABCD* en *ABC'D'* met gemeenschappelijke ribbe *AB*. Trek *AC* en *BD'*. Dit is de tweede UPM van $R6$ met de projectie van twee vierledige ribberingen *ABCD* en *ABC'D'*. Er zijn dus zes vlakke afbeeldingen van $R6$: twee projectietekeningen, twee PM, twee UPM. Voor het driedimensionale model is een uitslag nodig. Dit is een vlak netwerk, waarbij het model wordt verkregen door dichtvouwen langs de interne ribben (scharnieren). De uitslag kan naar twee zijden van het constructiemateriaal worden dichtgevouwen: naar boven en naar beneden, respectievelijk naar voren en naar achteren. Als de uitslag een asymmetrische figuur is, krijgen we op deze manier modellen van twee spiegelbeeldisomeren. Ook kunnen we de uitslag spiegelen ten opzichte van een lijn in het vlak van de tekening. We krijgen dan twee uitslagen van twee spiegelbeeldisomeren. Dit geval doet zich al voor bij $R10$.

Uitvoering: uitgaande van $R6$ worden met de tien constructies volgens het eerder vermelde constructieschema de veelvlakken (structuren) in de volgorde van opklimmende R geconstrueerd.

1. Na iedere constructie moet worden nagegaan of het nieuwe veelvlak reeds eerder met een andere constructie is verkregen.
2. Is het veelvlak symmetrisch of asymmetrisch? In het laatste geval zijn twee spiegelbeeldisomeren verkregen.
3. Na het voltooien van het constructieprogramma moeten de eventueel nog ontbrekende toegevoegde paren worden opgezocht. Ik stop bij $R12$. Er zijn vijftien $R12$ gevonden: negen zijn symmetrisch, zes asymmetrisch. Er komen negen brutoformules voor: $t(3\ 4\ 5\ 6)$

$Z(0\ 6\ 0\ 0)$	$H(8\ 0\ 0\ 0)$	regelmatige, symmetrische zesvlakstructuur
$Z(8\ 0\ 0\ 0)$	$H(0\ 6\ 0\ 0)$	regelmatige, symmetrische achtvlakstructuur
$Z(2\ 2\ 2\ 0)$	$H(8\ 0\ 0\ 0)$	symmetrisch, deelregelmatig
$Z(8\ 0\ 0\ 0)$	$H(2\ 2\ 2\ 0)$	symmetrisch, deelregelmatig

De toegevoegde paren zijn achter elkaar vermeld.

$Z(5\ 1\ 1\ 0)$	$H(5\ 1\ 1\ 0)$	twee spiegelbeeldisomeren, de toegevoegde is identiek met het origineel
$Z(5\ 1\ 1\ 0)$	$H(4\ 3\ 0\ 0)$	symmetrisch, en zijn toegevoegde:
$Z(4\ 3\ 0\ 0)$	$H(5\ 1\ 1\ 0)$	symmetrisch
$Z(4\ 3\ 0\ 0)$	$H(4\ 3\ 0\ 0)$	zes gelijktallige isomeren:

twee symmetrische toegevoegden en 2×2 toegevoegde spiegelbeeldisomeren; de toegevoegde is identiek met het spiegelbeeld.

$Z(6\ 0\ 0\ 1)$	$H(6\ 0\ 0\ 1)$	zeszijdige piramide, gelijktallig, symmetrisch, toegevoegd aan zichzelf

In plaats van het construeren van $R13$ uit $R9$, $R10$, $R11$ en $R12$ kan de tienconstructiesmethode ook gebruikt worden voor:

1. Het afleiden van bijzondere veelvlakken of structuren uit $R6$, zoals het regelmatig twaalfvlak en het regelmatig twintigvlak $R30$.
2. Het construeren van 'meetkundige reeksen', verzamelingen veelvlakken die gemeenschappelijke kenmerken hebben en waarbij uit term n term $n + 1$ wordt verkregen door toepassing van een stel vaste of variabele constructies. Dit noemen we een stamreeks. Bij een zijtakreeks worden de termen verkregen uit de termen van een stamreeks door toepassing van een stel vaste of variabele constructies. De belangrijkste stamreeks is de reeks der n-zijdige piramiden.
3. Het construeren van verzamelingen deelregelmatige veelvlakken. Er zijn zes van zulke verzamelingen: veelvlakken die alleen bestaan uit drie(vlaks)hoeken, vier(vlaks)hoeken en vijf(vlaks)hoeken. Parametervoorstellingen:
   – Alleen driehoeken: $Z = 4 + 2n$; $H = 4 + n$; $R = 6 + 3n$; $n \geq 0$
   – Alleen drievlakshoeken: $Z = 4 + n$; $H = 4 + 2n$; $R = 6 + 3n$; $n \geq 0$
   – Alleen vierhoeken: $Z = 6 + n$; $H = 8 + n$; $R = 12 + 2n$; $n \geq 0$, $n \neq 1$.
   – Alleen viervlakshoeken: $Z = 8 + n$; $H = 6 + n$; $R = 12 + 2n$; $n \geq 0$, $n \neq 1$.
   – Alleen vijfhoeken: $Z = 12 + 4n$; $H = 20 + 6n$; $R = 30 + 10n$; $n \geq 0$.
   – Alleen vijfvlakshoeken: $Z = 20 + 6n$; $H = 12 + 4n$; $R = 30 + 10n$; $n \geq 0$.
4. Het volledig afknotten A en piramideren P van een veelvlak X en zijn toegevoegde XT. Dit geeft in het algemeen zes veelvlakken: X, XA, XP, XT, XTA en XTP.

Het constructieprogramma leidt tot een systematische stamboom van veelvlakken. Deze is echter te groot om hier af te beelden. U treft hem aan op de website van de *Nieuwe Wiskrant*.

H.G. Telkamp,
Amstelveen