

Onlangs heeft de Universiteit Utrecht het gebouw van het Mathematisch Instituut hernoemd tot het Hans Freudenthalgebouw. Bij deze gelegenheid hield **Marja van den Heuvel-Panhuizen** een korte voordracht over de betekenis van het didactische werk van Freudenthal. Hieronder vindt u de tekst van deze voordracht. Daarnaast is er ook een videoclip beschikbaar die bij deze opening is gemaakt.<sup>1</sup>

## De opening van het Hans Freudenthalgebouw

Nadenkende over de uitnodiging om bij de opening van het Hans Freudenthalgebouw kort stil te staan bij het didactische werk van Freudenthal, leek het me een goed idee om me te beperken en me te richten op slechts een van zijn didactische vondsten. Ik heb hierbij gekozen voor de anti-didactische inversie.

Maar eerst wil ik ook iets zeggen van meer algemene aard.

Freudenthals betekenis voor de didactiek van het reken-wiskundeonderwijs, die *was* en *is* nog steeds enorm. Nationaal, en zeker ook internationaal. Het is niet voor niets dat de International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), als commissie van de International Mathematical Union, in het jaar 2000 de Hans Freudenthal Award heeft ingesteld, waarmee om de twee jaar, iemand wordt geëerd die een excellente prestatie op het gebied van mathematics education heeft geleverd in de vorm van een grootst opgezet, cumulatief onderzoeksprogramma. Met die laatste toevoeging wordt behalve Freudenthal, ook de rond 1970 begonnen innovatiebeweging geëerd die later bekend is geworden onder de naam *Realistic Mathematics Education*.

Wat is nu die betekenis die Freudenthal voor de didactiek van het rekenen en de wiskunde heeft geleverd? Kwantitief uitgedrukt: 201 + 1 publicatie; althans volgens de bibliografische inventarisatie zoals opgenomen in *China Lectures*. Toegegeven, daar zitten ook kleine bijdragen bij en een aantal dubbele (omdat verscheidene publicaties in meerdere talen zijn verschenen), maar die 202 publicaties bevatten ook de vier belangrijke standaardwerken die Freudenthal ons heeft nagelaten:

- *Mathematics as an Educational Task* uit 1973
- *Weeding and Sowing – A preface to a Science of Mathematics Education* uit 1978
- *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* uit 1983

- en zijn laatste werk, *Revisiting Mathematics Education – China Lectures*, verschenen in 1991, een jaar na zijn overlijden.

Waar gaan die 202 publicaties over? Over een brede variëteit aan onderwerpen uit het wiskundecurriculum, gespreid over alle scholingsniveaus, van het leren van wiskunde door kleuters tot het leren van wiskunde in het voortgezet en hoger onderwijs. Daarnaast komt ook de lerarenopleiding meermalen aan bod.

Wat echter opvalt, is dat Freudenthal zich in die 202 publicaties vooral heeft gericht op elementaire leerprocessen, en dan met nadruk zowel op ‘elementaire’ als op ‘leerprocessen’. Als paradigmatisch voorbeeld hiervan kan het in 1975 in *Pedagogische Verslagen* verschenen artikel ‘Wandelingen met Bastiaan’ worden gezien. Het is voor ons heel bijzonder dat Bastiaan hier nu aanwezig is, en dat geldt ook voor zijn moeder, Freudenthals dochter Mirjam, en de rest van de familie die wij ook kennen uit het didactische werk van Freudenthal.

De verleiding is groot om hier enkele van Freudenthals observaties de revue te laten passeren. Nou vooruit, een dan, opgetekend door Freudenthal tijdens het eten. Bastiaan is dan bijna vier jaar en vier maanden oud, maar ofschoon hij al heel wat telwoorden kende, weigerde hij te tellen. Ik citeer Freudenthal:

We aten bij Mirjam. Bastiaan triomfantelijk een lepeltje met zes aalbessen opheffende: ‘Zoveel zijn wij.’

We waren inderdaad met zijn zessen.

Ik: ‘Waarom?’

Hij: ‘Ik zie het zo.’ En dan doorgaande: ‘Twee kinderen, twee volwassenen, twee opa en oma’. Zo zaten we trouwens aan tafel, hij en Monica, tegenover elkaar, Mirjam en Frans, Suus en ik.

Volgens Freudenthal was dit een essentieel moment in de ontwikkeling van Bastiaans getalbegrip. Een maand eerder gebeurde nog het volgende. Ik citeer weer:

Hij gooit na elkaar drie voorwerpen in het water en telt één, twee, drie.

Ik: 'Hoeveel heb je in het water gegooid?'

Hij: 'Vier.'

Maar een dag later gebeurde ook dit. Ik citeer weer:

Hij vond op straat een papierslang. Ik vroeg hem, hoe lang die wel was. Ik verwachtte 'zó lang!' Hij zei 'vier meter'. Eventjes later ontmoetten we Oma en zijn moeder die ik het vertelde. Zij schatten ook. Ik mat de slang met mijn armen en zei: 'Iets meer dan zes meter, misschien zeseneenhalf.' Bastiaan: 'Laten we zeggen, zeven.'

Het waren die discontinuïteiten in leerprocessen die Freudenthal triggerden en die soms alles wat hij tot nu toe over het leren van getalbegrip had gelezen op zijn kop zetten. In het algemeen werd er in de toen bestaande literatuur vanuitgegaan dat kinderen eerst de telrij leren en op basis hiervan kunnen bepalen hoeveel er van iets zijn. Bij Bastiaan verliep dit anders. Hij kende aantallen, maar telde niet. En toch kon hij toen al bijvoorbeeld vrij goed groepen eendjes schatten. Freudenthal kon niets anders doen van vaststellen dan dat een kind van iets meer dan vier jaar "the hero of the exploit" was "who smashed his theory to bits".

In 1987 maakte Freudenthal in het *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (een tijdschrift dat nu nog bestaat en inmiddels een internationale uitgave van Springer is geworden) nog eens duidelijk hoe verrukt hij was over datgene wat je van dat observeren van elementaire leerprocessen allemaal kunt leren. Ik citeer weer:

Natürlich wußte ich längst, wie vielseitig *hoch oben* die Mathematik angewandt wurde, aber ich habe mir, ehe das IOWO startete, niemals etwas von der Fülle gerade auf niedrigster Grundschulstufe träumen lassen.

In 1974, drie jaar nadat het IOWO was gestart – met Freudenthal als wetenschappelijk directeur – maakte hij in een artikel over de 'Sinn und Bedeutung der Didaktik der Mathematik', gepubliceerd in datzelfde *Zentralblatt*, duidelijk dat bij hem tijdens dat observeren van leerprocessen allerlei didactische ideeën "aufgedrängt" waren, die later hun plek hebben gekregen in de nieuwe theorie over mathematics education.

Een van deze ideeën waarover hij ook al in een Frans artikel in 1963 had geschreven, was de anti-didactische inversie.

Wat houdt dit in? In ieder geval was het niet iets om na te volgen, maar juist iets om te vermijden. In het kort gezegd betekent het, dat het leren van wiskunde niet moet beginnen met "fertige Mathematik".

Volgens Freudenthal gaat het bij het leren van wiskunde niet om het overdragen van wiskunde als product, maar om wiskunde als activiteit, ofwel om het mathematiseren; een ander zeer belangrijk didactisch kernbegrip dat Freudenthal ons heeft gegeven. Uitgaande van betekenisvolle probleemsituaties uit de realiteit, of uit de wiskunde zelf, moeten de leerlingen de kans krijgen en uitgelokt worden om een ordening hierin aan te brengen, om zo structuur te creëren en wetmatigheden te ontdekken, zodat ze via dit mathematiseren wiskundige concepten en wiskundig gereedschap op een geleide manier kunnen heruitvinden. Geleide heruitvinding, weer een begrip dat centraal staat in de theorie van wiskunde-onderwijs die onder invloed van Freudenthals denkwerk tot stand is gekomen.

In de ogen van Freudenthal moet wiskunde onderwezen worden in de volgorde waarin de leerlingen het zelf zouden kunnen uitvinden. Dat betekent dat het leren van wiskunde moet beginnen bij rijke structuren. Beginnen bij arme structuren, zoals bijvoorbeeld het geval was bij de *New Math* beweging in de jaren zestig en zeventig, maar ook bij het toen gebruikelijke reken-wiskundeonderwijs, betekent in feite dat aan de leerlingen voorgestructureerde, kant-en-klare wiskunde wordt aangeboden en er niets meer te mathematiseren valt.

Beginnen op het formele niveau met axioma's en algoritmes betekent dat we de leerlingen het eigene van de wiskunde als activiteit onthouden en het leren van wiskunde losweken van de realiteit en daarmee van de betekenis die de wiskunde voor de leerlingen zou moeten hebben, met als gevolg dat de samenhang in wat de leerlingen geleerd hebben, ontbreekt, en het geleerde gauw vergeten wordt en niet toegepast kan worden.

Leerlingen mathematiseringsmogelijkheden bieden wordt ook nu nog, wereldwijd, als een belangrijk criterium voor goed reken-wiskundeonderwijs gezien. Freudenthals waarschuwing voor de anti-didactische inversie is niet voor niks geweest. En dat geldt eveneens voor het andere didactische gereedschap dat hij ons heeft verschaft voor het ontwikkelen en onderzoeken van wiskundeonderwijs.



fig. 1 *Het Hans Freudenthalgebouw (foto: M. Uwland).*

Voor ons, reken-wiskundedidactici, is Hans Freudenthal nog steeds een grote inspiratiebron. Daarom zijn we dan ook zeer verheugd met het feit dat de wiskundigen hier in Utrecht zijn naam als boegbeeld voor hun gebouw hebben gekozen. Wij zien deze erkenning van het werk van Freudenthal voor de wiskunde ook indirect als een waardering voor zijn didactische werk waar de naam van Freudenthal zo sterk mee verbonden is.

Het moge allemaal wat verwarrend zijn, een Hans Freudenthalgebouw, een Freudenthal Instituut en binnenkort ook nog een Freudenthal Centrum waarin de Faculteit Bètawetenschappen en de Faculteit Sociale Wetenschappen gaan samenwerken bij onderzoek, ontwikkeling en innovatie, training en advies op het gebied van mathematics en science education, maar deze verwarring nemen we graag op de koop toe.

Wat duidelijk moge zijn, is dat de merknaam 'Freudenthal', gerelateerd aan rekenen en wiskunde en de didactiek ervan, staat als een huis.

*Marja van den Heuvel-Panhuizen  
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht*

#### **Noot**

[1] Zie <http://www.youtube.com/watch?v=7B6wy8BpjMw>. Prof.dr. Bert van der Zwaan leidt de opening van het Hans Freudenthalgebouw in, waarna prof. dr. Marja van den Heuvel-Panhuizen, dr. Bastiaan van der Velden en dr. Wilberd L.J. van der Kallen in beeld, en aan het woord, komen.