Praktische opdrachten in de wiskundeles, ze lijken soms wat uit de mode te raken. Toch bieden dergelijke projecten de mogelijkheid om de gewone sleur te doorbreken en om leerlingen echt uit te dagen. In dit artikel beschrijven **Monique Bakker**, **Mascha Klerkx** en **Hans Sterk** een bijzondere praktische opdracht rond tensegrities, vormvaste houtje-touwtjeconstructies die niet alleen het hoofd, maar ook de handen aan het werk zetten.

'Houtje-touwtje'-wiskunde

Vormbepaling van tensegrities als praktische opdracht voor wiskunde D

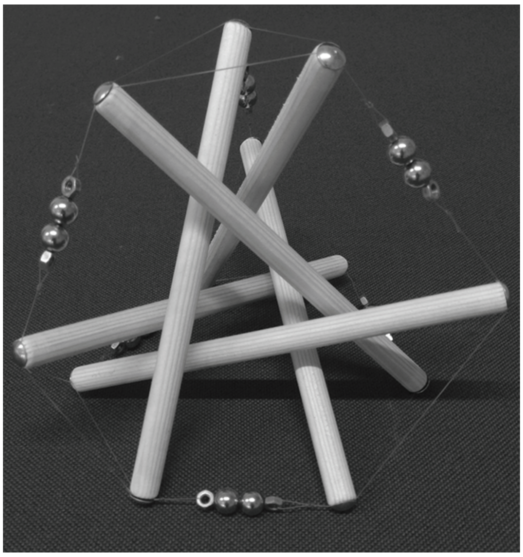
Inleiding

De leukste praktische opdrachten zijn die waarbij de leerlingen verrast worden door de wiskunde en trots zijn op een tastbaar eindresultaat. Vorig schooljaar kregen de 5- en 6-VWO wiskunde D-klassen op het Maurick College in Vught van ons een praktische opdracht over *tensegrities*. Het begon als een lastig te begrijpen stukje droge wiskunde, totdat de leerlingen daadwerkelijk aan de slag konden met het maken van een eenvoudige tensegrity. Toen ze de smaak eenmaal te pakken hadden, werd er met veel enthousiasme gewerkt aan de eindopdracht: het bedenken, berekenen én maken van een eigen tensegrity (figuren 1 tot en met 3). De resultaten overtroffen onze verwachtingen, en niet alleen de leerlingen, maar ook wij leerden veel bij. Daarom hier een introductie in de wondere wereld van tensegrities en de bijbehorende 'houtje-touwtje'-wiskunde.
We leggen eerst uit wat tensegrities zijn. Daarna volgt een beschrijving van de opzet van de praktische opdracht. Bij het begeleiden daarvan is het wenselijk om enig inzicht te hebben in de gebruikte formules. Daarom wordt, na een korte bespreking van vormbepaling in het algemeen, dieper ingegaan op de vormbepaling van icosaëder-tensegrities, trommel-tensegrities (met als varianten gestapelde trommel-tensegrities en ellipsvormige trommel-tensegrities) en tetraëder-tensegrities. Het artikel eindigt met een evaluatie van de praktische opdracht.

Tensegrities

Tensegrity is een samentrekking van de woorden 'tensional' (door trek) en 'structural integrity' (constructieve integriteit). De naam geeft aan dat een tensegrity één geheel is door een evenwicht tussen trek- en drukkrachten. De trekkrachten worden opgenomen door trekelementen, zoals touwtjes, elastiekjes of kabels, en de drukkrachten door drukelementen, zoals houten stokjes of metalen buizen. Daarom worden tensegrities ook wel houtje-touw-


1)


2)

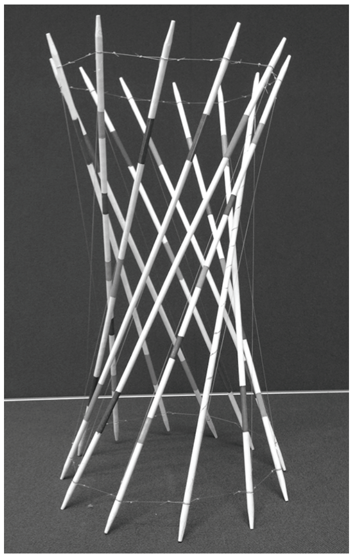

3)

fig. 1 Ellipsvormige trommel-tensegrity met dertig stokjes (Timo Gielgens & Mark van Iersel).

fig. 2 Tetraëder-tensegrity met magnetische verbindingen (Peter Martens & Sam van Gaal).

fig. 3 Trommel-tensegrity van mikado-stokjes (Kristel Kuijpers & Fenna Philipse).

tje-constructies genoemd. Een bijzonder kenmerk is dat elk drukelement alleen verbonden is met trekelementen en niet met andere drukelementen. Buckminster Fuller, de Amerikaanse ingenieur, architect, uitvinder, dichter en bedenker van het woord 'tensegrity' sprak daarom over 'islands of compression in a sea of tension'. De meest zuivere tensegrities hebben geen touwtje te veel en verliezen hun vormvastheid als ook maar één touwtje wordt doorgeknipt. Dit maakt dat het nog niet zo eenvoudig is om een tensegrity in elkaar te zetten: pas als het laatste touwtje vastzit, heb je iets dat blijft staan.

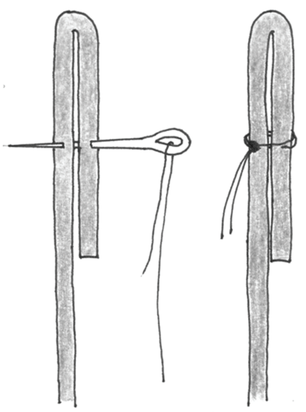
Wiskundig gezien kan elke tensegrity gemodelleerd worden als een verzameling punten. Twee punten kunnen verbonden zijn door een trek- of drukelement, dat randvoorwaarden stelt aan de mogelijke afstanden tussen de punten. In het eenvoudigste geval, waarin aangenomen wordt dat de trek- en drukelementen niet kunnen vervormen (oneindig stijf zijn), kunnen punten die verbonden zijn door een trekelement zich niet van elkaar verwijderen en punten die verbonden zijn door een drukelement elkaar niet naderen. In de praktijk zijn trek- en drukelementen altijd vervormbaar, ook al is dit met het blote oog meestal niet te zien en gaat een verlenging of verkorting gepaard met de ontwikkeling van een trek- of drukkracht. Denk aan een elastiekje: als je dit langer wilt maken, zul je er aan moeten trekken. In een echte tensegrity ontstaan altijd krachten door het eigen gewicht van de stokjes, maar in kleine modellen hebben deze krachten veelal een verwaarloosbare invloed op de vormbepaling. (Een uitzondering is de toren van gestapelde trommeltensegrities die verderop aan de orde komt). Een tensegrity kan ook voorgespannen worden: de trekelementen passen dan alleen tussen de drukelementen als ze wat uitgerekt worden. Dit biedt constructieve voordelen, maar daarmee komen we meer op het gebied van de mechanica en constructief ontwerpen.

Tensegrities fascineren zowel kunstenaars, wiskundigen als constructief ontwerpers en zijn nog steeds onderwerp van wetenschappelijk onderzoek: wat zijn tensegrities precies, waarom zijn ze vormvast, hoe kan de vorm bepaald worden en hoe kunnen ze geclassificeerd worden[1]. Voor leerlingen is het aardige van tensegrities dat er ook met middelbare schoolwiskunde op een zinvolle manier aan de vormbepaling gerekend kan worden (alleen kennis van goniometrie en de stelling van Pythagoras en wat handigheid in het manipuleren van formules zijn vereist), dat ze met stokjes en touwtjes vrij eenvoudig gemaakt kunnen worden en dat er veel informatie over op internet te vinden is[2]. Tensegrities hebben interessante toepassingen in de biologie[3, 4, 5], maar het meest inspirerend zijn de kunstwerken van Marcelo Pars[6] en de tensegrity-uitvinder Kenneth Snelson[7].

Opzet van praktische opdracht

De praktische opdracht is in februari in zowel een 5- als een 6-VWO wiskunde D-klas uitgevoerd. De leerlingen werkten in groepjes van twee (figuur 4). Na een inleidende presentatie gingen ze aan de slag met een mapje met uitleg en opdrachten over het rekenen aan een trommel-tensegrity met drie stokjes. Een verbeterde versie hiervan is gebruikt als opdracht bij een werkgroep op de Nationale Wiskunde Dagen 2013[8]. Als afsluiting hiervan moest een tensegrity berekend en gemaakt worden, met een gegeven stokjeslengte en voor ieder groepje verschillende verhoudingen tussen de touwtjeslengten (figuur 13). Wij zorgden hierbij voor het materiaal: drie ronde grenen stokjes (lengte 25 cm, doorsnede 9 mm, gratis op maat gezaagd in de winkel) met


4)


5)

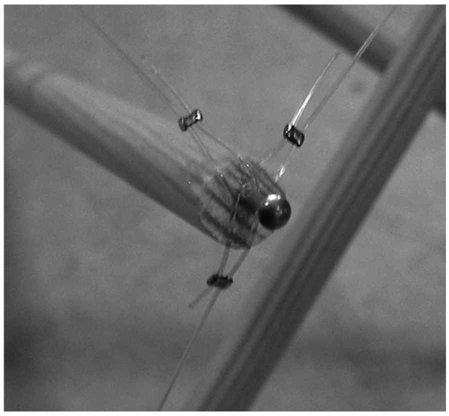

6)

fig. 4 Leerlingen aan het werk in de klas.

fig. 5 Het naaien van lusjes (één keer doorsteken en dan vastknopen, draadeindjes niet te kort afknippen).

fig. 6 Lusjes gemaakt met knijpkraaltjes.

draadnagels in de kopse einden (lengte 25 mm, doorsnede 1,5 mm). Omdat het nauwkeurig knopen van lusjes in de touwtjes lastig is, hebben we de leerlingen een alternatief voorgesteld: het naaien van lusjes (figuur 5). De materialen hiervoor, gevlochten metseldraad met een doorsnede van 1,2 mm, naaigaren en naalden kregen de leerlingen ook van ons. Een leerlinge ontdekte nog een andere handige manier om lusjes te maken, met behulp van knijpkraaltjes, kleine metalen kralen die worden dichtgeknepen met een platbektang (figuur 6). Als hulp bij het in elkaar zetten van de tensegrities hadden we verder nog gezorgd voor elastiekjes, wel waarschuwend voor het gevaar van wegschietende stokjes. Een spijkertje in een oog is niet fijn. Met een spreadsheet konden we de berekeningen van elk groepje snel controleren voordat ze begonnen aan het maken van de touwtjes.

Daarna moest elk groepje nog een eigen tensegrity berekenen en maken aan de hand van de trommel-, ellips- of tetraëderformules op de website van Pars. De leerlingen moesten hierbij zelf voor het benodigde materiaal zorgen. In een bijgeleverde beoordelingsrubric (zie de presentatie van de werkgroep op de Nationale Wiskunde Dagen 2013) werden eisen gesteld aan de wiskunde, de nauwkeurigheid van de uitvoering, het aantal gebruikte stokjes, de creativiteit en eigen inbreng en het verslag. Ook de inleidende opdrachten en de uitvoering van de tensegrity met drie stokjes telden mee voor het eindcijfer.

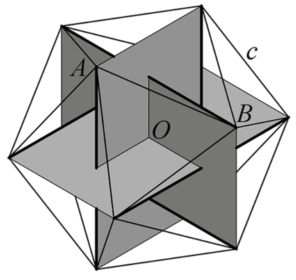
De planning, gebaseerd op drie lessen per week, was dat de leerlingen een week aan de inleidende opdrachten en twee weken aan de eigen tensegrity zouden werken. Dit laatste liep iets uit, omdat veel leerlingen het moeilijk vonden om te kiezen welke tensegrity ze wilden maken. Daarom werd de inleverdatum wat verschoven, zodat ze de gelegenheid kregen om in eigen tijd de tensegrity en het verslag af te maken.

Vormbepaling

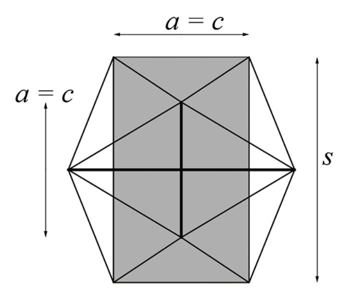
Bij de vormbepaling van een tensegrity gaat het om de keuze van het type – uit hoeveel stokjes bestaat de tensegrity en hoe zijn deze stokjes verbonden door touwtjes – en het bepalen van de lengte van de stokjes en de touwtjes. Bij dit laatste kan gekozen worden tussen statische en kinematische methoden[9]. In de statische methoden wordt gezocht naar een evenwichtsconfiguratie, waarbij er evenwicht is tussen de trek- en drukkrachten in touwtjes respectievelijk stokjes. Deze methoden vragen nogal wat kennis van mechanica en zijn daarom voor leerlingen niet zo bruikbaar. De liefhebber kan in een artikel van Tibert en Pellegrino[9] een eenvoudig voorbeeld vinden. In de kinematische methoden wordt de lengte van de stokjes constant gehouden en de lengte van de touwtjes geminimaliseerd, of andersom: wordt de lengte van de touwtjes constant gehouden en de lengte van de stokjes gemaximaliseerd. Als de stokjes van een tensegrity willekeurig in de ruimte geplaatst worden, hebben deze, ook als ze verbonden zijn door touwtjes, in het algemeen nog veel bewegingsmogelijkheden ten opzichte van elkaar. Alleen door uit te gaan van regelmatige veelvlakken, waarbij de uiteinden van de stokjes de hoekpunten vormen en de touwtjes de ribben, kunnen de bewegingsmogelijkheden van de stokjes ten opzichte van elkaar zover ingeperkt worden dat (relatief) eenvoudige formules voor de vormbepaling kunnen worden afgeleid.

Icosaëder-tensegrities

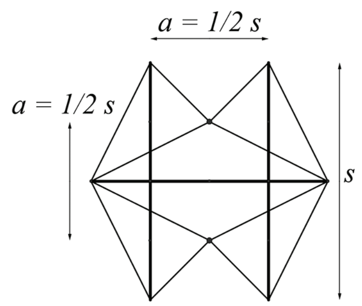
Van alle tensegrity-types die in dit artikel besproken worden, leidt de vormbepaling van de icosaëder-tensegrity tot het eenvoudigste optimaliseringsprobleem. Bij deze tensegrity (figuur 9) gaan we uit van een icosaëder (regelmatig twintigvlak) gevormd door drie orthogonale rechthoeken met lengte s en breedte a (figuren 7 en 8), waarvan de hoekpunten verbonden zijn met touwtjes met lengte c. Kijken we bijvoorbeeld naar het touwtje dat gespannen is tussen de punten



7)



8)



9)

fig. 7 Icosaëder gevormd door drie orthogonale rechthoeken.

fig. 8 Aanzicht icosaëder.

fig. 9 Aanzicht isocaëder- tensegrity.

$$A(\tfrac{1}{2}a, 0, \tfrac{1}{2}s) \text{ en } B(0, \tfrac{1}{2}s, \tfrac{1}{2}a)$$

dan volgt met de stelling van Pythagoras dat

$$c^2 = (\tfrac{1}{2}a)^2 + (-\tfrac{1}{2}s)^2 + (\tfrac{1}{2}s - \tfrac{1}{2}a)^2 = \tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{2}sa + \tfrac{1}{2}s^2.$$

Omdat in een icosaëder alle ribben dezelfde lengte hebben, moet de breedte a van de rechthoek, die ook een ribbe vormt, gelijk zijn aan de touwtjeslengte c, dus:

$$c^2 = \tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{2}cs + \tfrac{1}{2}s^2 .$$

Hieruit volgt dat:

$$a = c = (\tfrac{1}{2}\sqrt{5} - \tfrac{1}{2})s = s/\varphi \approx 0{,}618s ,$$

waarbij $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ gelijk is aan de guldensnedeverhouding.

Wanneer we elke rechthoek vervangen door twee stokjes langs de lange zijden (met lengte s) krijgen we een tensegrity waarin elk uiteinde van een stokje verbonden is met vier touwtjes. Tegen de intuïtie ingaand is deze tensegrity echter niet vormvast. Omdat de korte zijden van de rechthoeken niet vervangen worden door stokjes, hebben de parallelle stokken langs de lange zijden de mogelijkheid om naar elkaar toe te bewegen. Dit kunnen we nagaan door terug te kijken naar de formule:

$$c^2 = \tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{2}sa + \tfrac{1}{2}s^2 .$$

De grafiek van c^2 als functie van a is een dalparabool, met een minimum voor $a = \tfrac{1}{2}s$, gelijk aan:

$$c^2 = \tfrac{3}{8}s^2 \text{, dus:}$$

$$c = \tfrac{1}{4}\sqrt{6}s \approx 0{,}612s < 0{,}618s.$$

Alleen als we in de icosaëder-tensegrity, die dus geen echte icosaëder is, de afstand a zo kiezen dat de lengte van de touwtjes c minimaal is, is de tensegrity vormvast en blijven alle touwtjes strak staan. De les uit dit verhaal is dat het voor het rekenen aan een tensegrity niet voldoende is om de stokjes willekeurig in de ruimte te plaatsen en met behulp van de stelling van Pythagoras de lengten van de touwtjes te bepalen. De stokjes en touwtjes moeten zo slim geplaatst worden, dat de stokjes op geen enkele manier meer kunnen bewegen ten opzichte van elkaar.

De isosaëder-tensegrity biedt weinig keuzevrijheid in de vormbepaling: kies je een stokjeslengte s, dan ligt daarmee de touwtjeslengte c vast. Voor leerlingen is hij daarom niet zo interessant. Dit is anders bij de trommel-tensegrities en hun varianten. De vormbepaling daarvan biedt veel keuzevrijheid, maar leidt ook tot een wat ingewikkelder optimaliseringsprobleem.

Trommel-tensegrities

Het uitgangspunt bij een trommel-tensegrity (figuren 10 tot en met 14) is een afgeknotte piramide met gelijkvormige regelmatige veelhoeken als boven- en ondervlak (of een recht prisma als de veelhoeken congruent zijn). De vorm van deze afgeknotte piramides ligt vast met de keuze van de afstand z tussen onder- en bovenvlak, het aantal hoekpunten n en de stralen r_a en r_b van de omgeschreven cirkels in respectievelijk onder- en bovenvlak. Er geldt:

$$a = 2r_a \sin(\tfrac{1}{2}\varphi) \text{ en } b = 2r_b \sin(\tfrac{1}{2}\varphi)$$

$$\text{met } \varphi = 360°/n \qquad (1)$$

Hierbij zijn a en b de lengten van de zijden van de veelhoeken en is φ de bij deze veelhoeken behorende middelpuntshoek. Wanneer we de stokjes schuin zetten tussen de hoekpunten van het onder- en bovenvlak en touwtjes spannen langs alle ribben a, b en c, krijgen we een tensegrity waarbij elk stokjesuiteinde verbonden is met drie touwtjes. Ook deze tensegrity is nog niet vormvast. Als het bovenvlak om de symmetrieas draait, zodanig dat de stokjes nog schuiner komen te staan gaan de touwtjes c (die tussen onder- en bovenvlak lopen) slap hangen. De touwtjeslengte $c_{\min}$ waarbij de tensegrity wel vormvast is, kunnen we berekenen door de draaihoek θ_t te bepalen waarvoor bij vaste stokjeslengte s de touwtjeslengte c minimaal is. In de werkgroepopdracht[8] is afgeleid dat:

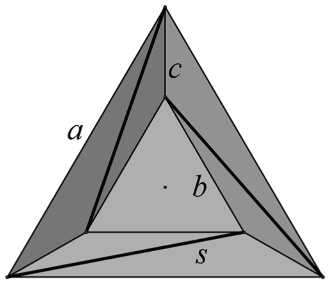
$$\theta_t = 90° - \tfrac{1}{2}v\varphi = 90° - 180° \cdot v/n \qquad (2)$$

$$c_{\min}^2 = s^2 - 4r_a r_b \sin(\tfrac{1}{2}v\varphi) = s^2 - 4r_a r_b \sin(180° \cdot v/n) \qquad (3)$$

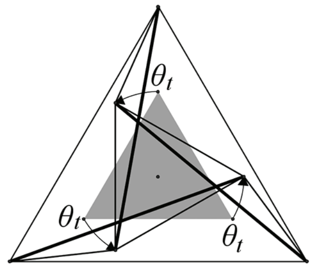
$$\text{en } z_t^2 = c_{\min}^2 - r_a^2 - r_b^2 + 2r_a r_b \cos\theta_t \qquad (4)$$

Hierbij is z_t de hoogte van de vormvaste tensegrity en geeft v aan hoeveel hoekpunten de stokjes worden verschoven tussen boven- en ondervlak (figuur 10). Dit aantal moet minstens 1 zijn, want als $v = 0$ gekozen wordt, vallen de stokjes tussen onder- en bovenvlak samen met de touwtjes c.

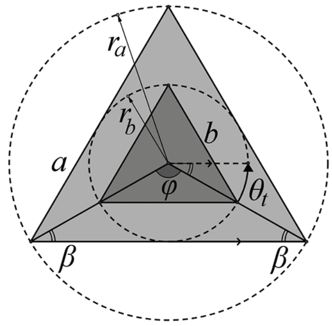
Bij een tensegrity met drie stokjes ($n = 3$, $\varphi = 360°/3 = 120°$) leiden $v = 1$ en $v = 2$ tot tensegrities die alleen in draairichting verschillen:



$n = 3, v = 1$

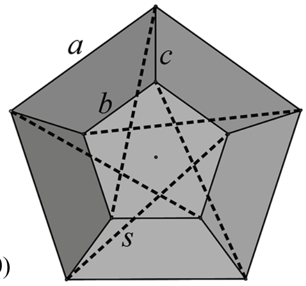


$\theta_t = 30°$



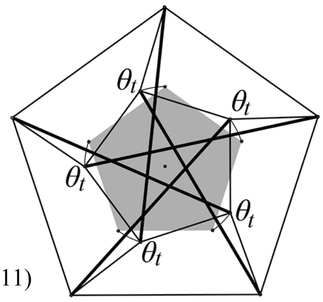
$\varphi = 120°$

10)



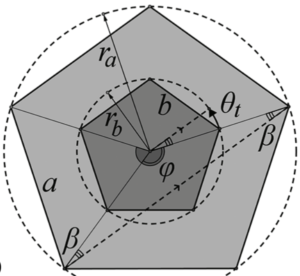
$n = 5, v = 2$

11)



$\theta_t = 18°$

12)



$\varphi = 72°$

fig. 10 Bovenaanzicht afgeknotte piramide.
fig. 11 Bovenaanzicht trommel-tensegrity met verdraaid bovenvlak.
fig. 12 Grondvlak en bovenvlak met omgeschreven cirkel.

$v = 1$ geeft $\theta_t = 90° - \frac{1}{2} \cdot 120° = 30°$, en $v = 2$ geeft $\theta_t = 90° - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 120° = -30°$.

$v = 1$ en $v = 2$ leiden wel tot echt verschillende tensegrities bij een tensegrity met vijf stokjes ($n = 5$, $\varphi = 360°/5 = 72°$):

$$v = 1 \text{ geeft } \theta_t = 90° - \tfrac{1}{2} \cdot 72° = 54°,$$

$$\text{en } v = 2 \text{ geeft } \theta_t = 90° - \tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 72° = 18°.$$

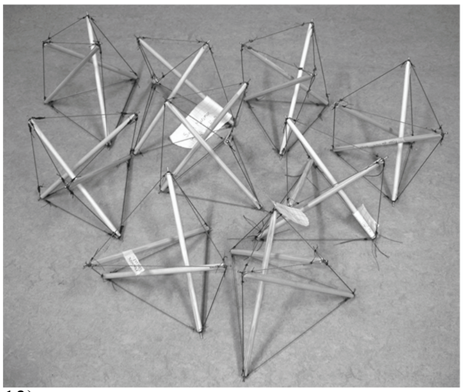
Je kunt natuurlijk ook beginnen met de stokjes langs de opstaande ribben van de afgeknotte piramide, en de touwtjes één of meer hoekpunten laten verspringen, maar dat leidt alleen tot een vergroting van de draaihoek θ_t met $v \cdot \varphi$. Als je de stokjes meer dan één hoekpunt laat verschuiven, wordt het risico groter dat ze elkaar in het midden van de tensegrity raken (figuur 14). Leerlingen bedachten dat je dit met het programma Google Sketch Up kunt controleren.

Met de formules (1) tot en met (4) weten we alles wat we nodig hebben voor de vormbepaling van trommel-tensegrities. Een paar leerlingen, die formules (1) en (3) gebruikten om bij een vrij gekozen s, r_a en r_b de touwtjeslengten a, b en $c_{\min}$ te bepalen, ontdekten na het op maat maken van heel veel touwtjes dat de tensegrity toch niet in elkaar paste. Dat vonden ze niet leuk en op zo'n moment moet je als docent snel helpen. Het duurde even voordat we ontdekten waar de fout zat: s, r_a en r_b bleken zo ongelukkig gekozen te zijn dat formule (4) (die Pars niet expliciet geeft) resulteerde in een negatieve z_t^2. Het is daarom handiger om bij de vormbepaling van een trommel-tensegrity uit te gaan van de hoogte z_t in plaats van de stokjeslengte s.

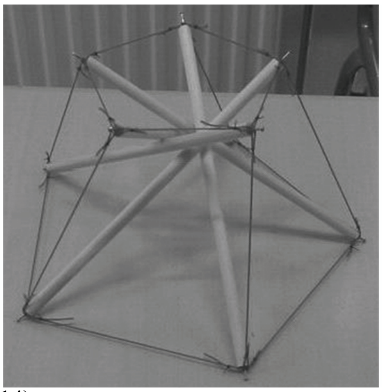
Als de touwtjes in het bovenvlak niet langs de zijden van de veelvlak, maar in stervorm gespannen worden, ontstaan de zogeheten ster-tensegrities (figuur 15). Alleen de berekening van de lengte van de touwtjes in het bovenvlak verandert dan.

Gestapelde trommel-tensegrities

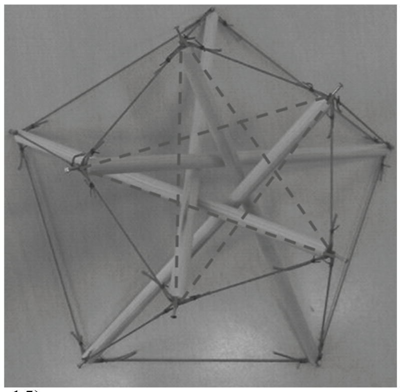
Door trommels te stapelen, kan een tensegrity-toren worden gemaakt. Daarbij gaat het eigen gewicht van de stokjes een rol spelen. De eenvoudigste manier van stapelen is twee trommels te maken, waarbij de hoekpunten van het ondervlak van de bovenste trommel samen vallen met de middens van de zijdes van het bovenvlak van de onderste trommel (figuur 18) en daarna de a touwtjes van de bovenste trommel weg te knippen. Nu zakt een niet voorgespannen touwtje, dat loodrecht op de touwrichting



13)



14)



15)

fig. 13 .Trommel-tensegrities met verschillende verhoudingen tussen de touwtjeslengten.

fig. 14 Trommel-tensegrity waarbij stokjes twee hoekpunten verspringen.

fig. 15 Mogelijke variant: ster-tensegrity.

belast wordt, veel door. Denk aan een koorddanser, die om deze reden altijd op een voorgespannen kabel danst. Daarom zullen de onderkanten van de stokjes van de bovenste trommel door het eigen gewicht van de stokjes zich naar beneden en, na het doorknippen van de overtollige touwtjes, naar buiten verplaatsen, zoals te zien is in de figuren 16 en 17. Daardoor zakt de toren iets in en vindt de tensegrity een evenwicht in voorgespannen toestand. De leerlingen hadden hun twijfels:

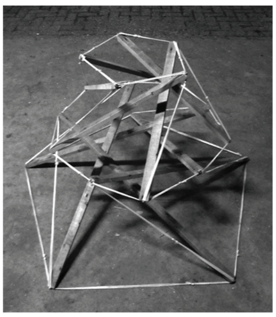
> Het spannendste vonden we om de touwtjes van het ondervlak van het bovenste deel door te gaan knippen. We hadden van onze docent gehoord dat de tensegrity zou moeten blijven staan, maar zeker wisten we dit natuurlijk niet. Toch knipte Corné plotseling de touwtjes door en gelukkig bleef de tensegrity staan. Het eindresultaat was behaald en zelfs de vader van Corné, die niet geloofde dat dit mogelijk was, stond er versteld van dat dit ons gelukt was.

Ellipsvormige trommel-tensegrities

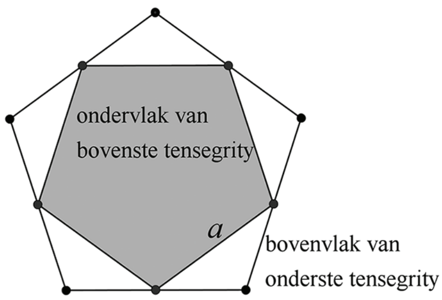
Bijzonder aan de trommelformules is dat de draaihoek θ_t (zie (2)) niet af blijkt te hangen van r_b en z_t. Daardoor is het mogelijk trommelachtige tensegrities te maken met verschillende stokjeslengten s : voor elk stokje mag de straal r_b en hoogte z_t anders gekozen worden. In ellipsvormige trommel-tensegrities vormen de bovenkanten van de stokjes een ellips (figuur 19). Maar je zou hiervoor ook een andere gesloten kromme kunnen kiezen, zolang je er maar voor zorgt dat het middelpunt M van het grondvlak binnen de kromme ligt. Omdat in de afleiding van de formule voor θ_t twee punten in het ondervlak met gelijke r_a gebruikt zijn, moeten alle punten in het ondervlak wel dezelfde r_a hebben (en dus op een cirkel liggen).

De algemene aanpak is dat je eerst de coördinaten van de uiteinden van elk stokje berekent. Vervolgens kun je die gebruiken om met behulp van de stelling van Pythagoras de stokjes- en touwtjeslengten te berekenen. De x- en y-coördinaten van de onderkanten van de stokjes hangen af van r_a en het aantal stokjes n. Na de keuze van v ligt de draaihoek θ_t vast. Daarmee weet je op welke halve lijn beginnend in M de projectie van de bovenkant van het stokje moet liggen. De vrij te kiezen r_b bepaalt hoe ver dit punt van M af ligt. Daarmee kunnen de x- en y-coördinaten van de bovenkant van de stokjes

16)



17)

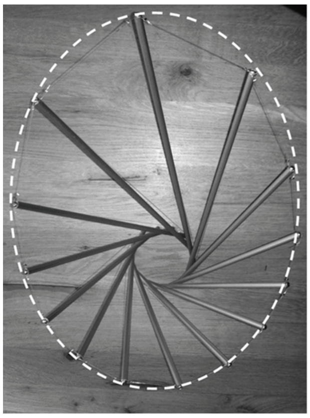


18)

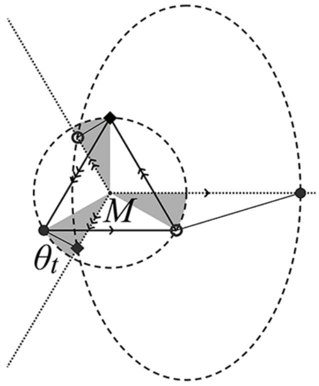
fig. 16 Onderste trommel-tensegrity vóór het plaatsen van de bovenste trommel-tensegrity (Philip Teeuwen & Corné Simons)

fig. 17 Gestapelde trommel-tensegrities.

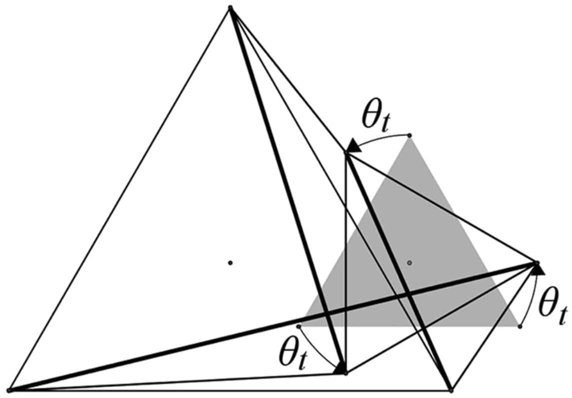
fig. 18 Methode van stapeling.



19)



20)



21)

fig. 19 Bovenaanzicht van een ellipsvormige trommel-tensegrity (Daphne Visser & Mirte van der Eyden).

fig. 20 Plaatsbepaling van de bovenkanten van de stokjes (onderkant en bovenkant van een stok zijn aangegeven met een identiek merkteken).

fig. 21 Bovenaanzicht van een scheve trommel-tensegrity.

bepaald worden. De z-coördinaten van de onderkanten van de stokjes zijn gelijk aan nul, die van de bovenkanten mag je zelf kiezen. Bij deze aanpak kan gebruikgemaakt worden van het feit dat de hoek θ_t eenvoudig te construeren is met behulp van evenwijdige lijnen.

Omdat voor de hoeken β in figuur 12 geldt dat $2\beta + v\varphi = 180°$ (hoekensom driehoek) volgt dat $\beta = \frac{1}{2}(180° - v\varphi) = \theta_t$ en vormen β en θ_t Z-hoeken. De halve lijn waar de bovenkant van een stokje op moet liggen is daarom evenwijdig aan de lijn door de onderkanten van de twee stokjes, waarmee deze bovenkant door middel van een stokje en touwtje verbonden is (figuur 20).

Het moge duidelijk zijn dat deze aanpak, die handig uitgevoerd kan worden met behulp van programma's als GeoGebra (waarmee ook de plaatjes in dit artikel getekend zijn) en Excel, veel keuzevrijheid biedt in de vormbepaling van de tensegrity. Deze aanpak kan bovendien nog gegeneraliseerd worden naar scheve trommel-tensegrities (figuur 21), waarbij het rotatiecentrum van het bovenvlak niet meer samenvalt met het middelpunt van het ondervlak. Voor ellipsvormige trommel-tensegrities heeft Pars formules afgeleid waarmee je de coördinaten van de uiteinden van de stokjes kunt berekenen. Een aardige vingeroefening is om met deze ellipsformules een trommel-tensegrity te berekenen, en de uitkomsten te vergelijken met die van de trommelformules.

De ellipsvormige trommel-tensegrities gaven onverwachte problemen, zoals een groepje leerlingen beschreef:

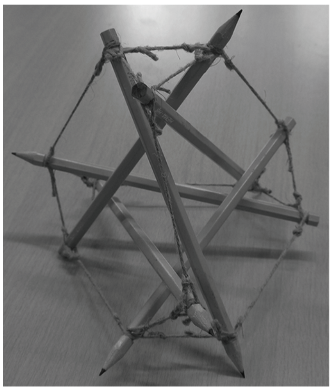
> Het enige wat jammer is, is dat onze tensegrity niet helemaal geworden is wat we wilden maken. Toen we de tensegrity namelijk in elkaar hadden gezet, zagen we dat hij omviel. Dit kwam doordat we niet hebben nagedacht over de ligging van het zwaartepunt. Dit probleem zou de volgende keer verholpen kunnen worden door de verhouding tussen de stralen van de cirkel en de ellips kleiner te maken, en door de cirkel meer in het middelpunt van de ellips te plaatsen.

Maar leerlingen zijn niet voor één gat te vangen: op zijn kop bleef de tensegrity wel staan (figuur 1).

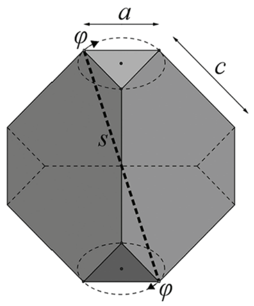
Tetraëder-tensegrities

Bij het maken van een eigen tensegrity hebben verschillende groepjes leerlingen gekozen voor een tetraëder-tensegrity (figuren 2 en 22). Het uitgangspunt bij deze tensegrity (figuur 23) is een afgeknotte tetraëder waarvan de zijvlakken gelijkzijdige driehoeken en zeshoeken zijn. De tensegrity kunnen we vormen door voor elk paar driehoeken een stok (met lengte s) te plaatsen tussen twee van de verst van elkaar verwijderde hoekpunten en verder touwtjes te spannen langs alle ribben van de afgeknotte tetraëder. We krijgen dan een tensegrity die net als de icosaëder-tensegrity bestaat uit zes stokken. Elk uiteinde van de stokken is nu echter met slechts drie touwtjes verbonden in plaats van met vier.

Als de tensegrity op de hiervoor beschreven manier in elkaar wordt gezet, dan hebben de driehoeken nog één onafhankelijke vrijheidsgraad: een rotatie φ om de as door het middelpunt van de tetraëder en het zwaartepunt van de driehoek (voor alle driehoeken in dezelfde richting). Hierbij komt de driehoek naar binnen. Voor een vormvaste tensegrity moeten we daarom ofwel de touwtjeslengte c verkleinen, ofwel de stokjeslengte s vergroten. Pars geeft formules waarmee voor gegeven touwtjeslengte a en c de stokjeslengte s als functie van φ bepaald kan worden.



22)



23)

fig. 22 Tetraëder-tensegrity (Pascal Taudin Chabot & Maurits Mulders).

fig. 23 Aanzicht tetraëder-tensegrity, met daarin aangegeven de plaatsing van één stokje.

Deze tetraëder-formules zijn zo ingewikkeld dat een analytische optimalisatie niet mogelijk is. Pars gebruikt Excel om met een stapgrootte voor φ van 0,1 graad naar de maximale stokjeslengte te zoeken. Een groepje leerlingen verraste ons met hun ontdekking dat dit handiger kan met de grafische rekenmachine (optie calc maximum). Om de leerlingen de mogelijkheid te geven te controleren of ze de formules correct hadden ingevoerd, hebben we een oplossing in de literatuur[10] gezocht: $a = \sqrt{3}$, $c = 1{,}8424$, $\varphi = 6{,}90°$ en $s = 4$ (bij deze oplossing is c geminimaliseerd in plaats van s gemaximaliseerd). De tetraëder-tensegrity biedt maar weinig keuzevrijheid in de vormbepaling. Je kunt alleen variëren met de lengte van de touwtjes a en c. De stokjeslengte s ligt hierna vast.

Evaluatie

Met de kennis van de inleidende opdrachten lukte het de leerlingen om zelf uit te zoeken hoe ze de trommel-, ellips- en tetraëderformules konden gebruiken. Ze vonden daarbij zelfs enkele kleine foutjes in de formules. Alle groepjes, op één na, zijn er in geslaagd de eigen tensegrity niet alleen te berekenen, maar ook in elkaar te zetten. Leerlingen stelden zichzelf ambitieuze doelen. Een groepje bouwde een ellipsvormige trommel-tensegrity met dertig stokjes (figuur 1), terwijl meer dan acht stokjes voldoende was voor een maximale score bij de beoordeling. Een ander groepje stak veel eigen geld in de aanschaf van sterke magneten (figuur 2). Het groepje dat een tensegrity-toren wilde bouwen liet zich niet ontmoedigen toen, na een hele zondagmiddag zwoegen, bleek dat dit met dikke rondhoutpalen niet lukte.

De creativiteit van de leerlingen kwam op heel verschillende manieren tot uiting: in de wiskunde, materiaalkeuze, het maken van de verbindingen of mooie foto's van de eigen tensegrity (figuur 16). Een groepje gebruikte het beeld van uit elkaar vallende mikadostokjes als concept voor hun trommel-tensegrity (figuur 3) en gaf hun verslag een originele titel geïnspireerd op de kleuren van deze stokjes: *Who is afraid of red, yellow and blue*. Dit groepje schreef in hun verslag:

> We zijn heel tevreden met het resultaat. Het was nog even spannend of onze tensegrity wel zou blijven staan, maar het is gelukt. We hebben veel plezier gehad bij het verzinnen van, het rekenen aan en het in elkaar zetten van de tensegrity. Voordat we de opdracht kregen, hadden we eigenlijk geen idee wat voor een tensegrity we moesten maken en we vonden de opdracht toen nog niet zo heel leuk. Maar achteraf vinden we het wel een leuke opdracht, vooral omdat je je creativiteit erin kunt stoppen.

Andere groepjes schreven:

> Ik vond het een leuk project om te doen. Vooral omdat de dingen die je uitrekent ook echt iets voorstellen. Omdat we de tensegrities ook nog zelf gemaakt hebben, snap ik de berekeningen beter en vind ik het ook logischer. Ik vind het mooi om te zien hoe wiskundige berekeningen een kunstwerk kunnen vormen.

en:

> We vonden het een erg leuk project. Het project was wel erg tijdrovend, maar het resultaat is dat zeker waard. De berekeningen waren soms wel ingewikkeld, maar dat kwam voornamelijk door de grote aantallen formules die we nodig hadden. Ook hebben we door dit project geleerd hoe we moeten werken met Excel en GeoGebra. Dit vinden wij ook erg fijn.

De leerlingen zijn niet meer toegekomen aan de vraag waarom de ellipsformules correct zijn. Dat was ons in eerste instantie ook niet helemaal duidelijk. Met de inzichten die we nu hebben, concluderen we dat de ellipsformules veel meer mogelijkheden tot wiskundige verdieping en eigen vormgeving bieden dan de tetraëderformules. Voor een volgende keer is het daarom een idee om de praktische opdracht te beperken tot tensegrities die met (varianten op) de trommel- of ellipsformules berekend kunnen worden, en de leerlingen daarbij uit te dagen om tensegrities met verschillende lengtes en hoogtes van de stokjes te maken.

Monique Bakker,
Ster College, Eindhoven
Mascha Klerx,
Maurick College, Vught
Hans Sterk,
Faculteit Wiskunde en Informatica, TU/e

Noten

[1] Conelly, R., & Back, A. (1998). Mathematics and tensegrity. *American Scientist, 86*, 142-151.

Opgehaald van http://www.math.cornell.edu/~connelly/tensegrity.copy.pdf
[2] http://tensegrity.wikispaces.com
[3] http://www.tensegrityinbiology.co.uk/
[4] http://www.intensiondesigns.com/
[5] Ingber, D. E. (1998). The architecture of life. *Scientific American, 278*(1), 48-57.Opgehaald van http://web1.tch.harvard.edu/research/ingber/PDF/1998/SciAmer-Ingber.pdf
[6] www.tensegriteit.nl/tensegrities.html
[7] http://www.kennethsnelson.net/sculptures/
[8] Bakker, M. & Klerx, M. (2013). *Houtje-touwtje wiskunde. Een werkgroep over tensegrities*. Nationale Wiskunde Dagen 2013. Presentatie en opdracht te downloaden van: http://www.fisme.science.uu.nl/nwd/ (onder handouts NWD 2013)
[9] Tibert, A. G. & Pellegrino, S. (2011). Review of form-finding methods for tensegrity structures. *International Journal of Space Structures, 26*(3), 241-255. Ook te lezen op: http://www-civ.eng.cam.ac.uk/dsl/publications/tensegrity.pdf
[10] Burkhardt, R. W. (2008). *A practical guide to tensegrity design*. Opgehaald van http://www.angelfire.com/ma4/bob_wb/tenseg.pdf

MEDEDELING

Nationale Wiskunde Dagen

Op vrijdag 31 januari en zaterdag 1 februari 2014 worden de 20e Nationale Wiskunde Dagen gehouden in Congrescentrum de Leeuwenhorst te Noordwijkerhout.

Kosten per persoon: € 395,00 bij overnachting op een tweepersoonskamer en € 430,00 bij overnachting op een eenpersoonskamer.

Later dit jaar wordt de programmafolder met aanmeldingsformulier naar de scholen gestuurd. Meer informatie over de NWD kunt u altijd vinden op http://www.fisme.science.uu.nl/nwd.

Inlichtingen:
Ank van der Heiden, telefoon: 030 253 56 54 of
e-mail: nwd@fi.uu.nl.