Met de vernieuwde wiskundecurricula van HAVO en VWO zal in 2015 ook het meetkundeprogramma voor VWO-wiskunde B veranderen: de analytische meetkunde met coördinaten krijgt een prominentere plaats. Dit is aanleiding om in de *Wiskrant* dieper op dit onderwerp in te gaan. In het derde artikel van deze serie achtergrondartikelen gaat **Aad Goddijn** in op de rol van de coördinaten, waarbij hij terugkeert naar de bronnen van Descartes.

Afgeleide, coördinaten, algebra

Achtergronden bij beweging in meetkunde met coördinaten, deel III

Wat vooraf ging

Dit artikel is het derde in een serie achtergrondartikelen bij het domein Meetkunde met coördinaten van het nieuwe examenprogramma Wiskunde B VWO, dat naar verwachting in 2015 van start gaat. Vooraf gingen 'Beweging, raaklijn, snelheid' (*Nieuwe Wiskrant 31*(2), december 2011) en 'Snelheid, vector afgeleide' (*Nieuwe Wiskrant 31*(3), maart 2012). Daarin werden de verbanden tussen de begrippen in de titels afgetast zonder dat er coördinaten aan te pas kwamen. Die komen nu in dit artikel en dat is wat tegendraads; de achterliggende bedoeling was de begrippen zuiver via hun eigen aard in beeld te brengen, onafhankelijk van een coördinaatgebonden aankleding.

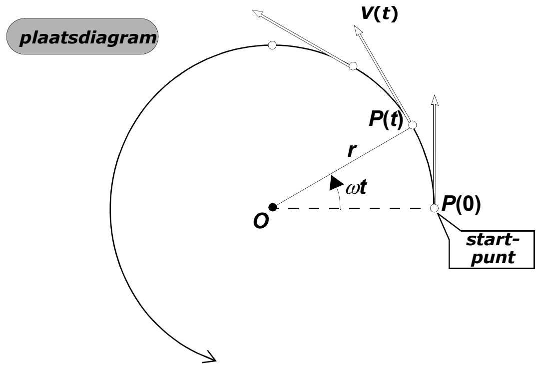
In dit artikel gaat het juist wél om gebruik van coördinaten bij meetkunde, met name als gereedschap. Het 'met' in 'meetkunde met coördinaten' is daarbij hetzelfde 'met' als in 'eten met vork en mes'.

De voorbeelden in dit artikel komen deels weer uit het in voorgaande artikelen genoemde pilot-lesmateriaal, maar ook van elders. Het gaat vooral om achtergrondinzichten bij het domein; de inhouden van het domein in de vorm van beschrijvingen en voorbeeldmaterialen kunnen verkend worden via de website van cTWO (www.ctwo.nl), zie weer de vorige artikelen.

Afgeleiden van sin en cos, meetkundig

Coördinaten hadden zo-even slechts de nederige rol van gereedschap, ze zijn echter ook een prachtig middel om samenhang te belichten. Daarvan nu eerst een voorbeeld bij de samenhang tussen snelheden en afgeleiden, als afronding van het vorige artikel.

Denk (weer) aan een punt P in cirkelbeweging met vaste snelheid draaisnelheid ω radialen per seconde op vaste afstand r om/van een vast punt O.

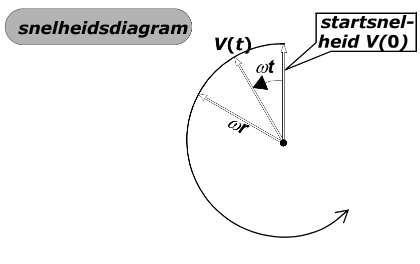


In dit *plaats*diagram zijn ook drie snelheidspijlen aangegeven. Dat geeft een suggestief totaalbeeld, maar er zijn ook bezwaren tegen, waarover direct meer.

In één seconde legt P een afstand ωr langs zijn cirkelbaan af. Uit voorgaande beschouwingen weten we dat de snelheid van P bepaald wordt door de raakrichting aan de cirkel en grootte ωr heeft.

De snelheidsvector $\overrightarrow{V(t)}$ heeft dus constante lengte ωr en draait ook met constante hoeksnelheid ω, maar ligt in richting een kwartdraai vóór op de richting van $\overrightarrow{OP}$.

De snelheidspijlen horen eigenlijk in een apart diagram; natuurkundig gezien is hun grootte niet in meters gegeven, maar in meters per seconde. Strikt genomen is er geen reden de lengte van de snelheids- en positiepijlen vanuit O in de gebruikte verhouding te tekenen.

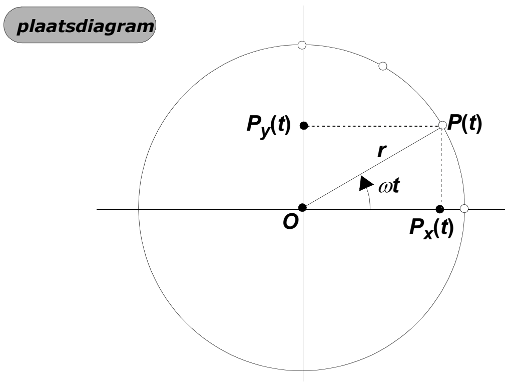


Tweemaal zo grote of kleine snelheidspijlen zouden even betekenisvol zijn. In de figuur kun je lengtes van positiepijlen onderling en van snelheidspijlen onderling vergelijken, maar niet gemengd. Bij de hoeken kan dat wél!

Tot zover hebben we een coördinaatvrije beschrijving met vectoren gegeven van de relatie tussen positie en snelheid. Kiezen we nu door O twee lijnen, een langs $OP(0)$ en de ander loodrecht daarop, dan kunnen we ook de loodrechte projecties van P op die lijnen bekijken. De projecties bewegen over die lijnen als P beweegt; die bewegingen worden door de bekende functies sinus en cosinus gegeven. Een parametervoorstelling.

$$P(t):\ \begin{cases} P_x(t) = r \cdot \cos(\omega t) \\ P_y(t) = r \cdot \sin(\omega t) \end{cases}$$

Het plaatsdiagram mét coördinaatassen:



Voor de snelheidsvectoren is er ook een diagram met projecties. De beschrijving van de beweging van V via lengte ωr en richtingsvoorloop $\pi/2$ op P levert ook een parametervoorstelling op voor het snelheidsdiagram:

$$\overrightarrow{V(t)}:\ \begin{cases} V_x(t) = \omega r \cdot \cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) \\ V_y(t) = \omega r \cdot \sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

De volgende formules zijn gebaseerd op het feit dat
de x-component van de snelheid van P
gelijk is aan
de snelheid van de x-component van P
en die laatste snelheid is gewoon de traditionele afgeleide, de eendimensionale snelheid:

$$\begin{cases} \dfrac{d(r \cdot \cos(\omega t))}{dt} = \omega r \cdot \cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\omega r \cdot \sin(\omega t) \\ \dfrac{d(r \cdot \sin(\omega t))}{dt} = \omega r \cdot \sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) = \omega r \cdot \cos(\omega t) \end{cases}$$

De slotstap in de formuleregels is een herleiding naar het al bekende.

De hier gevolgde aanpak staat in de NLT-module *Complexe Stromen* (2010) in iets minder abstracte vorm, waarbij de coördinaten van meet af aan aanwezig zijn. De opmerking over het verwisselen van *snelheid* en *x-component van* werd daar bij de eerste try-out beleefd genegeerd en staat niet in de leerlingentekst. Maar in dit achtergrondartikel neem ik de noodzakelijke subtiliteit toch maar op.

De grootste drempel in de klas lijkt te zijn dat het resultaat wel begrepen wordt, maar dat het bepalen van afgeleiden zonder gebruik van ingeslepen regels de indruk geeft dat er iets niet in orde is. Differentiëren ís toch het gebruik van die regels?

De meetkundige beschouwingen rond snelheid en afgeleide, zoals verkend in het vorige artikel, leveren in combinatie met de coördinaatfuncties goed resultaat. Zonder zichtbare limietbeschouwingen of rekenregelachtige vermommingen daarvan worden echte afgeleiden bepaald.

In dit moderne voorbeeld werd meteen gewerkt met coördinaatfuncties en impliciet ook negatieve waarden daarvan. Het begon anders!

De methode van Descartes

René Descartes (1596-1650) wordt steevast aangewezen als de uitvinder/ontdekker van de analytische meetkunde, wegens zijn *La Géométrie*, eigenlijk een uitgewerkt voorbeeld in zijn omvattender *Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences.*

Zo'n toewijzing in de geschiedenis is vaak even juist als misleidend. Feitelijk gebruik van coördinaten in sterrenkunde, aardrijkskunde en landmeetkunde is ouder dan Descartes' *Géométrie*, gebruik van algebra en coördinaat-verwante methoden bij meetkunde ook. De tekst van Descartes bevat echter passages die bijzonder duidelijk maken hoe hij de werkwijze van meetkunde-met-algebra ziet: als een uitbreiding van de al door Aristoteles en Pappos beschreven analytische methode. Descartes maakt deze methode heel expliciet zichtbaar.

Descartes ziet de algebra en zijn vorm van coördinaatgebruik als een fase in het vinden van de oplossing van een probleem. Anders gezegd: als de gezochte grootheden in een meetkundig probleem met behulp van algebra gevonden zijn, moet alsnog de constructie – meetkundig – uitgevoerd worden om het probleem werkelijk af te ronden.

De eerste zin van Boek I van La Géométrie valt direct met de deur in huis en eindigt met *construire*:

> Tous les Probleſmes de Geometrie ſe peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'eſt beſoin par aprés que de connoiſtre la longeur de quelques lignes droites, pour les conſtruire.

Elke meetkundige vraag kan vertaald worden in een vraag naar het vinden van bepaalde lijnstukken in de meetkundige figuur.

Voor het vertalen van een meetkundig probleem naar algebra geeft Descartes iets verder een concreet stappenplan. De eerste stap daarvan is belangrijk en vraagt nadere toelichting, omdat deze de kern van de methode vormt:

a. doe alsof het probleem opgelost is;
b. geef alle lijnstukken in de figuur namen (letters), bekende zowel als onbekende;
c. probeer één grootheid op twee manieren uit te drukken in de aldus benoemde lijnstukken; die uitdrukkingen zijn gelijk, dat geeft een vergelijking;
d. los de onbekende uit de vergelijking op.

Doe alsof het probleem opgelost is (1)

Stappen a en b kunnen in de praktijk vertaald worden in: maak een schematisch schetsje en zet er letters bij voor punten en lengtes van lijnstukken. In het artikel van Paul Drijvers in *Nieuwe Wiskrant 31*(4), '*Wat bedoelen ze toch met...* modelleren', staat daar een mooi voorbeeld van, over het berekenen van de afstand tussen oog en horizon als functie van de ooghoogte. Het is afkomstig uit het *Handboek Wiskundedidactiek*, dat in hetzelfde nummer van de *Nieuwe Wiskrant* wordt besproken.

In het pilotmateriaal Meetkunde met coördinaten is de methode van Descartes, zoals die in hier in de vier stappen volledig is aangegeven, expliciet aanwezig. Nadruk op deze methode is hard nodig, want menig examenopgave geeft stappen a en b van Descartes geheel wegdoor tekening en belettering op te nemen, bij stap c de vergelijking af te drukken en alleen te vragen die toe te lichten. Bij stap d kan de leerling dan nog iets van zijn basisvaardigheden laten zien. Het is alsof je wel moet kunnen fietsen, maar niet hoeft te kunnen opstappen. Meer aandacht graag voor de denkactiviteiten in de wiskundeles, in ons geval via het zelf algebraïsch modelleren van meetkundige problemen.

Doe alsof het probleem opgelost is (2)

Descartes grijpt terug op Pappos (vierde eeuw na Christus). Pappos zegt dat je om de oplossing van een probleem (dat wil zeggen de constructie of het bewijs dat gezocht wordt) te vinden, uit kunt gaan van de situatie waarin de oplossing al gevonden is. Je bestudeert dan de figuur om de essentiële kenmerken en de verbanden met eenvoudiger proposities te vinden. Dit is de fase van de analyse. In de analysefase wordt de situatie als het ware uiteengerafeld. Daarna volgt de fase van de synthese, waarin vanuit de gevonden ontleding de constructie, of het bewijs, wordt opgebouwd.

De synthesefase is in de Griekse meetkunde de eigenlijke oplossing. 'De oplossing', ja, omdat het bewijs of de te vinden constructie 'de oplossing' van het probleem is. De analysefase is in die visie in feite een vooronderzoek. Dit is het van achteraf werken, dat een belangrijke methode is bij het vinden van bewijzen, zoals dat in de huidige VWO B-stof voorkomt.

De 'analytische methode' in de meetkunde heeft haar naam aan dit onderscheid van Pappos te danken. Het nieuwe van Descartes' methode is dat hij in de analysefase de algebra op een speciale manier inzet, op de zojuist globaal beschreven manier. Later – en zeker nu op school – zal het algebraïsche proces als dé oplossingsfase worden gezien, culminerend in het vinden van waarden voor de onbekenden of van vergelijkingen die de oplossingsverzameling vastleggen.

Analytische meetkunde is dan meetkunde die via de algebra bedreven wordt.

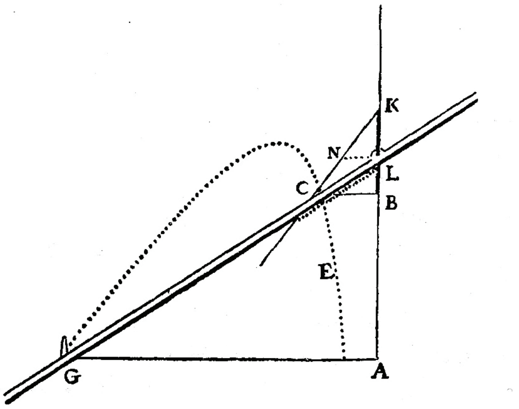
y en *x* als afstanden tot lijnen

Een gerichte methode voor het kiezen van de onbekenden is het gebruik van twee bijzondere lijnen in de figuur en de afstanden van een te onderzoeken punt van die twee lijnen. Descartes noemt die steevast y en x. Het historisch eerste voorbeeld is hier opgenomen; zie de volgende bladzijde.

Het gaat om de gestippelde kromme, die met een eenvoudig mechaniek gemaakt wordt.

GA is een vast lijnstuk. Punt L beweegt op de verticale lijn door A. Het driehoekje van vaste vorm KLN schuift terwijl L meebeweegt over de verticale lijn. Punt C, snijpunt van de lijn GL (de getekende lat in de figuur) met de lijn door K en N, beschrijft de gestippelde kromme. De vraag is wat de aard en ligging van die kromme is.

In de tekst is de lengte van lijnstuk CB y genoemd en die van BA x. Dat zijn de afstanden tot de vaste lijn GA en de loodlijn in A op GA. Verder wordt gebruikt: $GA = a$, $KL= b$, $NL = c$, de bekende (vaste) grootheden in het probleem.[1]



Aprés cela prenant vn point a diſcretion dans la courbe, comme C, ſur lequel ie ſuppoſe que l'inſtrument qui ſert a la deſcrire eſt appliqué, ie tire de ce point C la ligne C B parallele a G A, & pourceque C B & B A ſont deux quantités indeterminées & inconnuës , ie les nomme l'vne y & l'autre x. mais affin de trouuer le rapport de l'vne à l'autre; ie conſidere auſſy les quantités connuës qui determinent la deſcription de cete ligne courbe, comme G A que ie nomme a, K L que ie nomme b, & N L parallele a G A que ie nomme c. puis ie dis, comme N L eſt à L K, ou c à b, ainſi C B, ou y, eſt à B K, qui eſt par conſequent $\frac{b}{c}y$: & B L eſt $\frac{b}{c}y - b$, & A L eſt $x + \frac{b}{c}y - b$. de plus comme C B eſt à L B, ou y à $\frac{b}{c}y - b$, ainſi a, ou G A, eſt á L A, ou $x + \frac{b}{c}y - b$. de façon que multipliant la premiere par la derniere. & ainſi l'equation qu'il falloit trouuer eſt .

$$yy \propto cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac.$$

de laquelle on connoiſt que la ligne E C eſt du premier genre , comme en effect elle n'eſt autre qu'vne Hyperbole.

In de figuur zijn nu direct evenredigheden te vinden wegens de gelijkvormigheden van de driehoeken *KNL* en *KCB* en die van *GAL* en *CBL*. Het lijnstuk *BL* laat zich daarom op twee manieren berekenen. Daardoor kunnen twee uitdrukkingen in x en y aan elkaar gelijkgesteld worden. Zo komt Descartes tenslotte tot een *vergelijking* waarin de samenhang van x en y te zien is:

$$y^2 = cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac$$

De vergelijking is van de tweede graad met twee onbekenden. Het is een probleem met een onbepaalde oplossing: er zijn veel punten, of paren lengtes x en y als men wil, die aan het probleem voldoen. De oplossing is een locus, een meetkundige plaats.

Descartes spreekt van een kromme '*du premier genre*'. Hij trekt ook vlot de conclusie dat de kromme een hyperbool is. Frans van Schooten (1615-1660) vertaalde *La Géométrie* in het Latijn, voor de betere verspreiding van het boek; hij bewijst in zijn uitgave ook synthetisch dat het om een hyperbool gaat. Het is waarschijnlijk dat Descartes op grond van zijn kennis van de *Konika* van Apollonius (rond 250 voor Christus) wist dat het een hyperbool was: bij andere identificaties van kegelsneden in *La Géométrie* noemt hij Apollonius namelijk herhaaldelijk wél, compleet met genummerde verwijzing naar specifieke stellingen.

Dit voorbeeld is op en top analytische meetkunde: een vergelijking vinden voor een figuur die gegeven is door een bewegingsbeschrijving en op grond van die vergelijking een conclusie trekken over aard en ligging van de figuur.

Het standaard schoolleerplan Analytische Meetkunde van voor 1967 behandelde dit laatste vrij systematisch voor vergelijkingen van de eerste of tweede graad, waarbij de algebraïsch hinderlijke kruisterm xy meestal werd gemeden.

Het VWO B-voorstel voor 2015 gaat niet zo ver in op het deelgebied van de tweedegraadskrommen, maar wil juist bredere inzichten aan de basis opbouwen en (be)oefenen. De fundamentele verbanden tussen meetkunde en algebra krijgen door algebraïsering en gebruik van coördinaten wel veel aandacht.

Terzijde...

Descartes zal verderop in *La Géométrie* in plaats van de lijn *NK* die in de beweging parallel verschuift, ook andere figuren parallel gaan verschuiven en met draaiende lijn *GL* snijden. Door steeds de eerdere figuur (dus nu hier de hyperbool) als schuivende figuur te gebruiken, ontstaan nieuwe krommen met vergelijkingen van steeds hogere graad. Descartes' betoog is dat de meetkunde niet stopt bij wat door constructies vanuit cirkels en lijnen te maken valt en illustreert dat met deze reeks krommen. De nieuwe middelen worden uiteindelijk ook gebruikt bij meetkundige constructies voor oplossingen van zesdegraads vergelijkingen.

In *Van Ahmes tot Wisweb* (Goddijn, 2006) wordt uitgebreider op de relatie algebra-meetkunde ingegaan, onder andere aan de hand van Descartes' tekst.

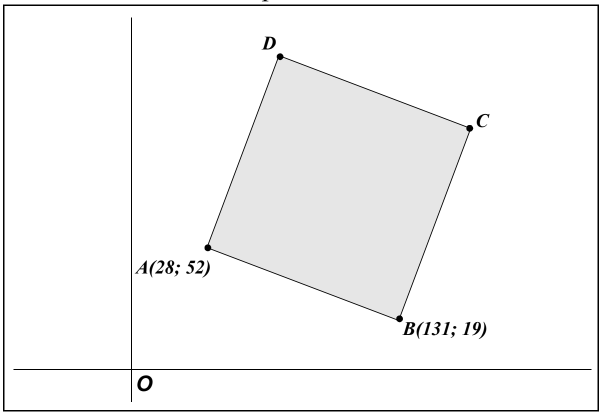
Voor een diepergaande analyse verwijs ik naar een boek met de veelzeggende titel *Redefining Geometrical Exactness* (Bos, 2001).

x en y worden ook negatief

De x en y van Descartes waren afstanden tot vaste referentielijnen. Dat eist wat omzichtigheid. Descartes heeft een voorbeeld waar punten E, A en B op één lijn liggen. Hier is k de afstand tussen E en A is en x die tussen A en B; nu noteert Descartes uitvoerig: $EB = k + x$, maar als B tussen E en A ligt, is het $EB = k - x$ en $-k + x$ als E tussen A en B ligt.

'Onze' coördinaten werken anders; die zijn, zoals in het cirkelvoorbeeld in het begin van dit artikel, gegeven als projecties van een punt op een lijn die de reële getallen bevat. Het zijn getallen en geen afstanden. Dit neemt niet weg dat leerlingen soms net zo omzichtig zijn, op de manier van Descartes. In een opgavenserie die met de volgende opgave begon, is dat goed te zien:

ABCD is een vierkant. Bepaal de coördinaten van C en D.



Het is handig door de vier punten lijnen evenwijdig aan de assen te trekken. Daar zijn de projecties op de assen! De x-coördinaat van C is dan duidelijk 164, want dat is 131 + (52 – 19).

Bij een ander voorbeeld met $A(6, 1)$ en $B(19, 5)$ werd door sommige leerlingen de berekening 19 – (5 – 1) gebruikt. De alerte docent nam zijn kans waar. Spoedig bleek dat de methode van het eerste vierkant hier ook werkt, want 19 + (1 – 5) = 19 – (5 – 1).

In het lesmateriaal werd gevraagd het antwoord (in het eerste voorbeeld) niet alleen te noteren als 164 maar ook als 131 + (52 – 19). Dat als steun voor het uiteindelijk opstellen van de algemene formule bij $A(x_A; y_A)$ en $B(x_B; y_B)$. Dat is $x_C = x_B + (y_A - y_B)$. Die formule – in ons soort variabelen – blijkt universeel geldig. Er is voor ons geen noodzaak meer gevallen te onderscheiden, zoals Descartes zich gedwongen zag te doen.

De rekenregels van de algebra, van de negatieve getallen, van de ordening van getallen op een lijn en de meetkundige structuren in het vlak: ze werken allemaal perfect samen. Is $x_C = x_B + (y_A - y_B)$ eenmaal opgesteld aan de hand van één geschetste voorbeeldsituatie, dan mag je roekeloos op de formule vertrouwen voor andere onderlinge liggingen van A en B. Essentieel is dat er alleen echte algebraïsche bewerkingen in de formule voorkomen, dus geen absoluutstrepen of andere afstandsnotaties!

Freudenthal noemde dit idee het algebraïsch-meetkundig permanentieprincipe. Zo'n zware term hoeft in VWO 4 niet te vallen, maar een moment van bewustmaking van dit fenomeen is meer dan leerzaam; het principe is ook heel tijdbesparend, want de situatie komt vast in allerlei vormen wéér voor.

Transformaties: algebraïsch is meetkundig

Na het voorgaande is het verleidelijk nog meer schitterende verhalen te vertellen over het volmaakte huwelijk van meetkunde en algebra. Maar er zijn ook vervelende lieden die de droom proberen te verstoren! Denk aan de functies en hun trawanten, de grafieken...

Bekend is de vergelijking van de cirkel met straal 5 om de oorsprong:

$$x^2 + y^2 = 5^2$$

Even algebraïsch als meetkundig symmetrisch in de variabelen x en y. Toch zijn er auteurs van goede naam en faam die aanbevelen de vergelijking van de raaklijn aan deze cirkel in (3, 4) te bepalen door grafiekachtige technieken te hanteren.
Hun advies: herleid de vergelijking tot

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

en ga verder met differentiëren naar x. Enzovoort.[2]
De cirkel wordt zo opgevat als een grafiek van een functie, de gelijkwaardigheid van de coördinaten wordt genegeerd, het meetkundig inzicht dat de straal loodrecht op de raaklijn staat, wordt niet gebruikt.

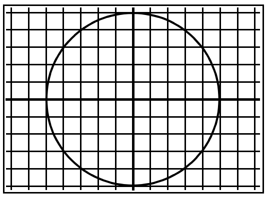
Het kan alleen anders als vergelijkingen van lijnen in de analytische meetkunde niet zonder meer van de functievorm $y = a\,x + b$ zijn; als zowel $4x = 3y$ als $3x + 4y = 25$ acceptabele vergelijkingen van lijnen zijn; als duidelijk is dat die twee loodrecht op elkaar staan. (De opgaven over het vierkant van zoeven hebben daarmee te maken!)

Dat $3x + 4y = 25$ de gezochte vergelijking is, spreekt dan vanzelf. Die lijn gaat namelijk door (3,4) en staat loodrecht op de straal van O naar (3,4), want dat ís de lijn met vergelijking $4x = 3y$.

Vergelijking en figuur

De gelijkwaardigheid van vergelijking en figuur is een belangrijk basisconcept van de analytische meetkunde. In het voorbeeld met de cirkel betekent het dat precies de punten (x, y) die de vergelijking kloppend maken, tot de figuur behoren. De vergelijking betekent niet hoe je bij een gegeven waarde van x waarden van y vindt, zodat (x, y) tot de figuur hoort. In dit geval kún je dat wel doen, maar het is bij andere vergelijkingen vaak niet praktisch uitvoerbaar.

$$\boxed{x^2 + y^2 = 5^2}$$



Versie 4 van Geogebra kan bij heel wat ingetoetste vergelijkingen de bijhorende figuren laten zien. Toen het pilotmateriaal ontwikkeld werd, was dat nog niet zo en daarom is toen niet erg veel gedaan aan deze vorm van ICT-gebruik. Eeuwig zonde om nu deze mogelijkheden niet te exploreren...

Eén voorbeeld, waarin we één coëfficiënt van de vergelijking variabel houden en van een sleepschuifje voorzien. In Geogebra 4 betekent dat: tik '$a = 0$' in en klik het balletje aan dat in de algebralijst bij a is te zien; kijk, daar is het sleepschuifje al. Tik nu deze vergelijking eens in (kies later zelf allerlei andere voorbeelden!)

$$a * x * y \text{ - } x\text{^}3 \text{ - } y\text{^}3 = 1$$

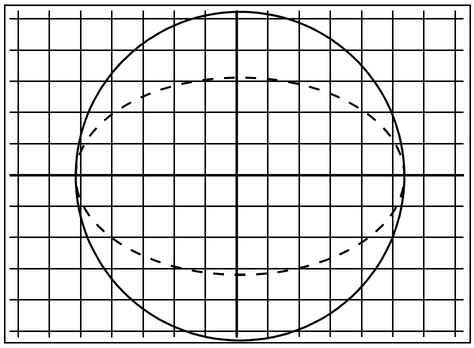
en bekijk hoe de figuur verandert als a verandert. Vragen te over, zowel makkelijke als lastige: 'Waarom zijn er twee vaste punten?', 'Waarom bestaat de figuur soms wel uit twee delen en soms niet?', 'Waarom is er steeds spiegelsymmetrie in de lijn $y = x$?'

Deze laatste vraag over de symmetrie van de figuur kan met een eenvoudige op algebra gebaseerde redenering worden beantwoord: als (x, y) een punt is van de figuur, voldoet (x, y) aan de vergelijking. Maar dan voldoet (y, x) óók aan de vergelijking, want y en x komen op precies dezelfde manier in de vergelijking voor. En dus ligt (y, x) óók op de figuur. Om nadruk te leggen op de gelijkwaardigheid van vergelijking en figuur spelde ik de eenvoudige redenering zo uitgebreid uit. Aardiger wordt het als we andere transformaties dan spiegelen ook gaan beschouwen en dan blijkt de bijhorende redenering van grote kracht te zijn.

In de pilot van het programma staat hierover dat de leerling *het verband kan leggen tussen een meetkundige transformatie van een figuur en een substitutie in de bijbehorende vergelijkingen of parametervoorstellingen.*

Goed dat zo'n specifiek dwarsverband tussen algebra en meetkunde de eindtermen heeft bereikt.

De spiegelsymmetrie was een bijzonder geval; met behulp van een andere transformatie kunnen we de algemene aard van de methode echter beter in kaart brengen.
Begin daartoe nog eens met de cirkel van zo-even met vergelijking $x^2 + y^2 = 5^2$. In onderstaande figuur is de cirkel ook getransformeerd naar een ovaal: de cirkel is in de y-richting met factor $\frac{3}{5}$ verkleind.



Wat is de vergelijking van die nieuwe figuur? Dat betekent: aan welke vergelijking in x en y voldoen de punten van die figuur?
De punten van de nieuwe figuur ontstonden door de verticale coördinaat met een factor $\frac{3}{5}$ te vermenigvuldigen.
Laat nu (p, q) zo'n nieuw punt zijn. Om het punt op de eerste figuur te vinden dat op punt (p, q) van de nieuwe figuur uitkomt, moeten we dus achteruit denken. Zo: het oorspronkelijke punt op de cirkel was $(p, \frac{5}{3}q)$.

Want $\frac{3}{5} \times (\frac{5}{3}q) = q$.

Dat oorspronkelijke punt ligt op de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 5^2$ en daar gaan we dan ook $(p, \frac{5}{3}q)$ in invullen, ofwel substitueren:

$$p^2 + \left(\tfrac{3}{5}q\right)^2 = 5^2$$

(p, q) op de nieuwe figuur voldoet dus aan deze voorwaarde. Omdat we met (x, y)-coördinaten werken, schrijven we liever: de coördinaten van een punt van de ovaal voldoen aan de (x, y)-vergelijking

$$x^2 + \left(\tfrac{5}{3}y\right)^2 = 5^2$$

Dat is hem!

De conventionele eenvoudiger vorm (waarin de ontstaanswijze niet zichtbaar is) kan er gemakkelijk uit afgeleid worden:

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

De belangrijkste stappen in het bouwproces zijn het achteruit denken en het substitueren.

Met behulp van diezelfde stappen kunnen we ook direct zien wat de vergelijking is van de ovaal die door verschuiven over (7, 2) ontstaat:

$$(p, q) \quad \rightarrow \quad (p+7, q+2)$$

Achteruit denken, substitueren en klaar:

$$\frac{(x-7)^2}{5^2} + \frac{(y-2)^2}{3^2} = 1$$

Wat *niet* opvalt bij de spiegeling in het voorbeeld aan het begin van dit onderdeel is, dat ook daar de spiegeling in de lijn $y = x$ in de achteruitrichting wordt gebruikt. Welk punt komt bij de spiegeling op (p, q) terecht? Punt: (q, p). Spiegelen en terugspiegelen zijn hetzelfde, en daarom is de spiegeling een onhandig voorbeeld om de algemene transformatiemethode aan te demonstreren.

Met een aardige opgave, ter executie in Geogebra, sluiten we dit onderwerp af. In in voorbeeld gaan we uit van een in parametervoorstelling gegeven kromme en zelfs de bijzondere vorm waarbij de x-coördinaat de parameter ís. Een grafiek van een functie dus!

Begin met de grafiek van de sinusfunctie door puur $y = \sin(x)$ in te toetsen. Kies weer een variabele a (met een schuifknop) en teken ook het punt $(a, \sin(a))$ op de grafiek van de sinus. Doe dat in Geogebra met het commando Punt[{a, sin(a}].
Opgave: teken het beeld van de sinusgrafiek onder puntspiegeling in het punt $(a, sin(a))$.
Beloon jezelf met een stukje pure schoonheid: maak een mooie animatie door a (automatisch) te bewegen.

Algebra met meetkunde, ovaal en ellips

Meetkunde met coördinaten is een mooie speeltuin om algebra te beoefenen. Het onderdeel dat zojuist besproken is, is daar een voorbeeld van. Het is niet voldoende de basisvaardigheden van de algebra (zeg: haakjes verdrijven en dergelijke technieken) vlekkeloos te kunnen hanteren. De algebrastappen die hier vertoond zijn, staan of vallen met al of niet grip hebben op de betekenis van vergelijkingen en met name van substitueren.

In *Nieuwe Wiskrant 31*(4) staat het artikel ‘Analytische meetkunde door een synthetische bril’, van Mark Timmer, Gerard Jeurink en Nellie Verhoef (2012) over gebruik van synthetische meetkunde bij de analytische meetkunde in wiskunde D. Het artikel is als een onderzoeksverslag opgezet, maar ik lees het graag als een ondersteunend pleidooi bij mijn inhoudelijk betoog.

In dat artikel wordt de ellips anders gedefinieerd dan de ovaal hierboven, namelijk als verzameling van punten waarvan de som van de afstanden tot twee gegeven punten (de brandpunten van de ellips) een vaste waarde heeft. Dat is de bekende tuinmansdefinitie van de ellips.

In principe is het nog maar helemaal de vraag of de in één as-richting gekrompen cirkel, de ovaal, inderdaad zo’n ellips is. De analytische meetkunde is dé methode om bij dergelijke vragen een antwoord te vinden. Timmer c.s. geven aan dat aangetoond kan worden dat de tuinmansdefinitie van de ellips in goed gekozen coördinaten tot een vergelijking van de volgende vorm leidt.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Daarmee wordt het antwoord op de vraag direct gegeven: ja, want de ovaal in dit artikel heeft ook zo’n vergelijking.

Deze bewijsgang leunt geheel op de niet vertoonde afleiding van de ellipsvergelijking uit het afstandenkenmerk. In die afleiding moeten de wortelvormen die de Pythagorasformule voor de twee afstanden levert, worden weggewerkt. Dat is een pittige oefening in het algebraïsch handwerk, waarvan de bijdrage aan meetkundig inzicht in het probleem gering is.

Andere routes zijn er ook! Ik schets een puur meetkundige en een puur algebraïsche weg, geheel als fraai besluit in de geest van dit artikel.

Meetkundig eerst. Bij deze aanpak laten we puur meetkundig zien dat een figuur die een opgerekte cirkel is, noodzakelijkerwijs ook aan het afstandskenmerk voldoet. Snijden we een cirkelcilinder met een vlak dat niet loodrecht op de cilinderas staat, dan is de snijlijn geen cirkel, maar een in één richting opgerekte cirkel. Het meetkundig bewijs daarvan is eenvoudig. Dat zo’n snijlijn van vlak en cirkelcilinder inderdaad aan de tuinmansdefinitie voldoet, is te bewijzen met behulp van de beroemde bollen van Dandelin. Laat aan weerszijde van het snijvlak twee bollen in de cilinder passen, die de zelfde straal hebben als de cilinder zelf. Leg de bollen zo, dat ze aan weerszijde het snijvlak raken. De raakpunten blijken de brandpunten te zijn van een ellips, die precies onze snijovaal is. Meer, en uiteraard mét figuren, staat hierover op de cTWO-site in de digitale kopie van *Lessen in Ruimtemeetkunde 1 & 2*, van Martin Kindt (1985).

Een puur algebraïsch bewijs zonder moeizaam wegkwadrateren van wortels is ook mogelijk. Daartoe volgen we de les van Descartes: doe alsof de brandpunten er zijn. En als ze er zijn, weten we wáár ze zijn.

In detail loopt dat als volgt. Als we de cirkel

$$x^2 + y^2 = a^2$$

in de verticale richting met een factor *b/a* vermenigvuldige, verkrijgen we de vergelijking

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

juist als eerder vertoond.

Een parametrisering van deze figuur wordt gegeven door $P(t) = (a \cos t, b \sin t)$; dat is uit ook het vermenigvuldigproces en ons eerste voorbeeld van dit artikel direct duidelijk.

Als dit inderdaad een ellips is volgens de tuinmansdefinitie, dan moeten de brandpunten de punten $(-c, 0)$ en $(c, 0)$ zijn met

$$c^2 = a^2 - b^2$$

De afstand van $P(t)$ tot $(-c, 0)$ gaan we nu direct bepalen. De wortels van het omslachtige bewijs houden we buiten boord door eerst rustig het kwadraat van de afstand te bepalen:

$$(a\cos(t) + c)^2 + (b\sin(t))^2$$

Er is wat rekenwerk voor nodig, maar vooral ook een juiste en slimme inzet van $c^2 = a^2 - b^2$, om af te leiden dat dit gelijk is aan

$$(a + c\cos(t))^2$$

Nu hebben we de afstand van $P(t)$ tot een brandpunt expliciet in de parameter t uitgedrukt: $a + c\cos(t)$. Die van $P(t)$ tot $(c, 0)$ is slechts een variant op de berekening. Op dit niveau is de opmerking dat dit een goede oefening van het voorgaande is een misser. Veel belangrijker – het gaat hier om VWO-wiskunde D – is de opmerking dat je die afstand direct vindt door het tegengestelde van c, namelijk $-c$, in het eerste resultaat in te vullen. Waarna het verdere bewijs makkelijk voltooid wordt.

Tot slot en verder

In dit artikel stond de samenwerking van algebra en coördinaten centraal, in de geest van Descartes, die niet de meetkunde aan de algebra uitleverde, maar beiden samenbracht.

We zijn nog niet toegekomen aan vectoren en hun verhouding met het coördinatenprincipe. Bij de vectoren spreken we graag van kentallen in plaats van coördinaten. Of dat verschil echt iets inhoudt in de wiskundige praktijk gaan we bezien in een later artikel in deze serie, waarbij dan ook het inproduct als verbindingselement tussen de verschillende benaderingen wordt ingevoerd en kritisch gebruikt.

Aad Goddijn,
Freudenthal Instituut

Noten

[1] De onbekende grootheden worden met de laatste letters van het alfabet aangegeven, de bekende grootheden met de eerste letters. Ook van dat gebruik is dit voorbeeld van Descartes de bron.

[2] Op de website van CTWO staat bij de bronnen voor wiskunde D een digitale kopie van de *Inleiding tot de analytische meetkunde* van C. J. Alders, waarin dit gedaan wordt. Er is bij Alders overigens heel wat inspiratie voor mooie opgaven te vinden.

Literatuur

Bos, H. J. M. (2001). *Redefining geometrical exactness: Descartes' transformation of the early modern concept of construction.* New York: Springer.

Goddijn, A.J. (2006). Van Ahmes tot Wisweb. In Drijvers, P. (Red.), *Wat a is, dat kun je niet weten* (pp. 161–192). Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht.

Goddijn, A.J., Hoof, J. van, & Valk, A.E. van (2010). *Complexe Stromen.* Gecertificeerde NLT-module, downloadbaar van http://www.betavak-nlt.nl

Timmer, M., Jeurink, G., & Verhoef, N. (2012). Analytische meetkunde door een synthetische bril. *Nieuwe Wiskrant, 31*(4), 13-18.

Kindt, M. (1985). *Lessen in Ruimtemeetkunde 1 & 2*, Utrecht/Houten: Fi/Educaboek. Downloadbaar vanaf http://fisme.science.uu.nl.