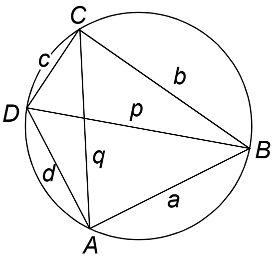
# Wat te bewijzen is (59)

## Rubriek

Tijdens een recent gesprek met enkele collega's beweerde ik dat de stelling van Ptolemaeus alleen nog in het vergeetboek voorkomt. Dat werd direct bevestigd, want niet iedereen in het gezelschap kende de inhoud ervan, terwijl de bedoelde stelling voorheen toch figureerde in élk leerboek voor meetkunde. Nu was deze eigenschap (van koordenvierhoeken) in zekere zin een buitenbeentje in het curriculum; je maakte er een paar opgaven over en dat was dan dat. Over het belang van de stelling, met name voor de ontwikkeling van de goniometrie, werd met geen woord gerept. Voordat ik hierop inga, laat ik eerst de stelling spreken:
*In een koordenvierhoek is het product van de lengten van de diagonalen gelijk aan de som van de producten van de lengten van de overstaande zijden.*

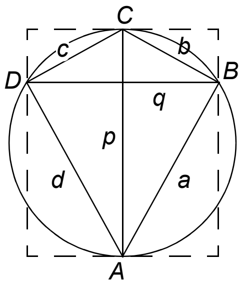



ABCD is koordenvierhoek

$\downarrow$

$pq = ac + bd$

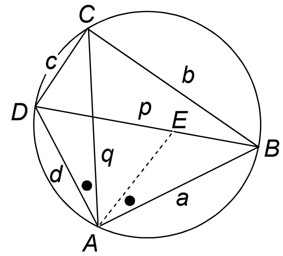
Als ik deze stelling nu moest onderwijzen, zou ik starten met een verkenning aan de hand van enige bijzondere koordenvierhoeken. Het meest bijzondere exemplaar is de rechthoek. En ja, $pq$, $ac$ en $bd$ kunnen in dat geval worden vervangen door respectievelijk $p^2$, $a^2$ en $b^2$; de stelling van Ptolemaeus is blijkbaar een generalisatie van die van Pythagoras. Een tweede bijzonder geval is de vlieger met twee overstaande rechte hoeken.




Hier geldt: $a = d$ en $b = c$, zodat ik moet onderzoeken of $pq$ en $2ab$ wel aan elkaar gelijk zijn. Nu is de oppervlakte van de vlieger enerzijds gelijk aan $ab$ (vanwege de rechte hoeken in $B$ en $D$) en anderzijds gelijk aan $\frac{1}{2}pq$ (vanwege de omgeschreven rechthoek), klaar.
Een derde speciale koordenvierhoek is het gelijkbenig trapezium met basis *a,* en vervolgens komt het dan neer op het aantonen dat geldt: $p^2 = ac + b^2$; het bewijs lukt bijvoorbeeld met behulp van de cosinusregel.

### *Het gangbare bewijs*

In de oude leerboeken baseerde men zich bij het generale bewijs op gelijke omtrekshoeken bij gelijke cirkelbogen en op evenredige zijden bij gelijkvormige driehoeken. Dat ging niet zonder hulplijn (zie figuur).




Het punt *E* ligt op *BD* zó dat $\angle BAE = \angle CAD$. Let nu op de driehoeken *BAE* en *CAD*. Behalve de gelijke hoeken in *A* zijn ook de hoeken *ABE* en *ACD* aan elkaar gelijk, want het zijn omtrekshoeken op dezelfde boog (*AD*). De genoemde driehoeken zijn daarom gelijkvormig. Geef ik *EB* de lengte $p_1$, dan volgt:

$$a/p_1 = q/c \text{ ofwel } ac = p_1 q$$

Uit $\angle BAE = \angle CAD$ volgt $\angle BAC = \angle EAD$ en omdat ook de hoeken *BCA* en *EDA* (beide op de boog *AB*) aan elkaar gelijk zijn, is de gelijkvormigheid van de driehoeken *EAD* en *BAC* een feit. Met $|DE| = p_2$ volgt nu:

$$d/p_2 = q/b \text{ ofwel } bd = p_2 q$$

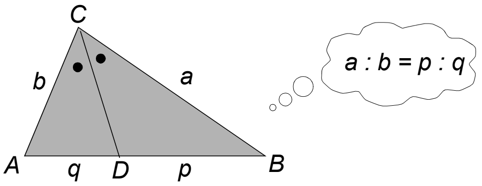
Nu nog wat algebra:

$$ac + bd = p_1 q + p_2 q = (p_1 + p_2)q = pq$$

Een helder bewijs, dat na het weggeven van de hulplijn en een paar opstapvragen bij wijze van oefening door de leerlingen van weleer zelfstandig kon worden voltooid. Dit bewijs is klassiek: Ptolemaeus heeft het zó gedaan in zijn beroemde werk de *Almagest* ('het grote boek' van de sterrenkunde).

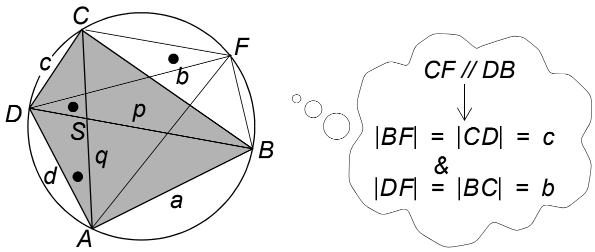
### *Oppervlakkige bewijzen*

We doen op school in de onderbouw al weer heel lang weinig aan bewijzen. Dit betekent feitelijk dat de kern van de wiskunde niet binnen het gezichtsveld van de jonge leerling komt. Is dat jammer? Ik vind van wel. Bij diverse gelegenheden heb ik er in het verleden voor gepleit om in de onderbouw een stukje van de theorie van oppervlakten (parallelogrammen, driehoeken) als in het tweede boek van Euclides' *Elementen* te behandelen. Dat kan heel aanschouwelijk en leerlingen kunnen daarbij zelf eenvoudige bewijzen produceren. Een van de fraaiste toepassingen vind ik nog altijd de (ook vergeten) stelling dat een bissectrice in een driehoek de overstaande zijde verdeelt in stukken die zich verhouden als de omliggende zijden.

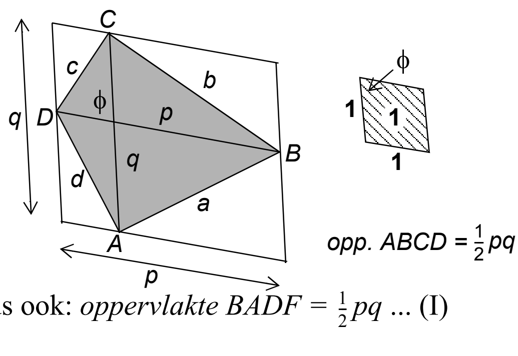



Vergelijk maar de oppervlakten van *BCD* en *ACD*. Die verhouden zich als de bases *p* en *q*, maar ook als de zijden *a* en *b*. Dit laatste kan worden begrepen door *ACD* te spiegelen in *CD* of door de loodlijnen uit *D* op *BC* en *AC* te beschouwen. Het 'spiegelbewijs' geeft aanleiding tot een concrete demonstratie: knip een driehoek uit een vel papier en vouw de driehoek dubbel waarbij de deellijn *CD* de vouwlijn is. De verhouding van de oppervlakten wordt dan zichtbaar $a : b$ en bij uitvouwen $p : q$.

Terug naar Ptolemaeus. In jaargang 28 van *Euclides* kwam ik een aardig bewijs (van K.L. van den Ende) van zijn stelling tegen, gebaseerd op het vergelijken van oppervlakten. Net als in het traditionele bewijs is een hulppunt onmisbaar. Ik neem hiervoor het punt *F* op de cirkel zó dat *CF // BD* en verbind dit punt *F* met de hoekpunten *A, B* en *D*. De bogen (en koorden) *CD* en *BF* zijn even lang (horen bij de gelijke omtrekshoeken *DFC* en *BDF*). Evenzo voor de bogen (en koorden) *BC* en *DF*.




Uit *CF // DB* volgt ook dat de driehoeken *DBC* en *BDF* dezelfde oppervlakte hebben (ze zijn zelfs congruent) en daarom hebben de vierhoeken *ABCD* en *BADF* dezelfde oppervlakte. Laat *S* het snijpunt van de diagonalen zijn en stel $\angle ASB = \phi$. Als eenheid van oppervlakte neem ik nu een ruit waarvan de zijden 1 zijn en die de hoeken $\phi$ en $\pi - \phi$ heeft. De oppervlakte van vierhoek *ABCD* is nu $\frac{1}{2}pq$.




Dus ook: *oppervlakte BADF* = $\frac{1}{2}pq$ ... (I)

Kijk nu weer naar de tweede figuur in deze kolom en let op driehoek *ADF*. De zijden om $\angle ADF$ hebben de lengte *d* en *b*. Bovendien geldt: $\angle ADF = \angle ASB = \phi$

Dit laatste vraagt om een nadere verklaring. De hoeken *DAC* en *BDF* zijn omtrekshoeken op gelijke bogen en dus aan elkaar gelijk. $\angle ASB$ is buitenhoek van driehoek *ASD* en daarom gelijk aan $\angle ADB + \angle DAC$ dus ook gelijk aan $\angle ADB + \angle BDF = \angle ADF$.
Omdat de oppervlakte van driehoek *ADF* de helft is van de oppervlakte van het parallelogram op *AD* en *DF* en met de hoeken $\phi$ en $\pi - \phi$, geldt:

*oppervlakte ADF* = $\frac{1}{2}bd$ ... (II).

Vervolgens kijk ik naar driehoek *ABF* met zijden *a* en *c*. Omdat *ABFD* een koordenvierhoek is, met *ADF* en *ABF* als overstaande hoeken, geldt: $\angle ABF = \pi - \phi$ en dus:

*oppervlakte ABF* = $\frac{1}{2}ac$ ... (III).

Uit (I), (II) en (III) volgt ten slotte: $pq = ac + bd$.

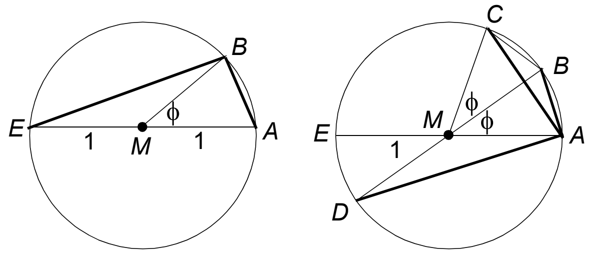
### *Koordenrekening*

Dat het meten en berekenen van afstanden aan het hemelgewelf kan plaatsvinden via het meten van hoeken en het berekenen van bijpassende koorden en bogen, daarvan waren de Griekse sterrenkundigen zich bewust. Zo ook Ptolemaeus, die door historici gezien wordt als een van de wegbereiders van de latere goniometrie. Hij zag kans een tabel op te stellen voor het verband tussen koorden en middelpuntshoeken voor hoeken van 0° tot 180°, oplopend met $\frac{1}{2}°$. Hij rekende daarbij in het sexagesimale positiestelsel. Dat hij uitging van een cirkel met een straal van 60 'segmenten' is daarom niet zo verwonderlijk. Ik volg zijn aanpak hier niet letterlijk, maar blijf wel in de buurt. Zijn cirkel met straal 60 vervang ik door de eenheidscirkel. De koorde bij een hoek van 60° is zo gelijk aan 1, notatie: krd(60°) = 1. Andere voorbeelden: krd(90°) = $\sqrt{2}$ en krd(180°) = 2. Om nu bij andere middelpuntshoeken de koorde te vinden, zijn rekenregels handig, zoals deze:

$$[\mathrm{krd}(\phi)]^2 + [\mathrm{krd}(180° - \phi)]^2 = 4$$

$$\mathrm{krd}(\phi) \cdot \mathrm{krd}(180° - \phi) = \mathrm{krd}(2\phi)$$

De eerste wet volgt direct uit de stellingen van Thales en Pythagoras (zie linkerfiguur met de rechte hoek *ABE*).




Voor de tweede formule beschouw ik de rechterfiguur. De driehoeken *MAB*, *MBC* en *MDA* hebben gelijke oppervlakte en dit geldt dan natuurlijk ook voor de vlieger *ABCM* en de rechthoekige driehoek *ABD*. Nu geldt:

$$opp.\ ABCM = \tfrac{1}{2} \cdot |MB| \cdot |AC| = \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot \mathrm{krd}(2\phi)$$

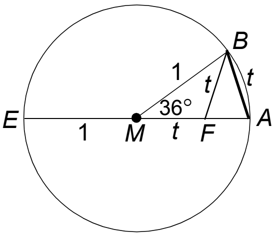
$$opp. ABD = \tfrac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AD| = \tfrac{1}{2} \cdot \mathrm{krd}(\phi) \cdot \mathrm{krd}(180° - \phi)$$

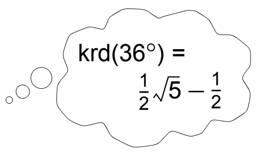
Hieruit volgt dan de tweede regel.

De eerste formule leidt met $\phi = 60°$ tot krd(120°) = $\sqrt{3}$
Om nu bijvoorbeeld krd(30°) en krd(150°) te berekenen, gebruik ik beide formules en een beetje algebra. Stel krd(150°) = $x$ en krd(30°) = $y$ Uit de eerste formule volgt dan $x^2 + y^2 = 4$ en uit de tweede $x \cdot y = 1$, vanwege krd(60°) = 1. Nu de algebra:

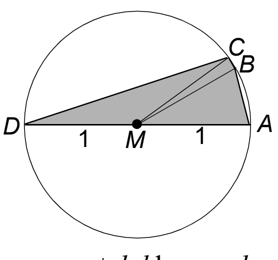
$$(x+y)^2 = 4+2 = 6 \longrightarrow x+y = \sqrt{6}$$
$$(x-y)^2 = 4-2 = 2 \longrightarrow x-y = \sqrt{2}$$
$$\text{+/–}$$
$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{6} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \longleftarrow 2x = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$
$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{6} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \longleftarrow 2y = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

Net zo kan via krd(90°) ook krd(45°) worden bepaald en daaruit kan weer krd($22\frac{1}{2}°$) worden berekend. Of via krd(30°) krijg ik krd(15°) en daarna krd($7\frac{1}{2}°$).
Aldus kan met bovenstaande formules een tabel worden gemaakt die al door Hipparchus, een verre voorganger van Ptolemaeus, was samengesteld, namelijk een die oploopt met stappen van $7\frac{1}{2}°$.
Met behulp van de stelling van Ptolemaeus kunnen we tot een verdere verfijning komen, bijvoorbeeld tot een tabel met stapjes van $1\frac{1}{2}°$. Dat lukt via de koorde bij nog een speciale hoek, namelijk die van 36°.




Sinds Euclides wist men wel raad met die speciale hoek. Stel krd(36°) = $t$. In de figuur is het punt $F$ op $MA$ zo gekozen dat $BF$ de hoek $MBA$ (= 72°) middendoor deelt.
Er ontstaan zo twee gelijkbenige driehoeken, $FMB$ en $BAF$, waarvan de laatste gelijkvormig is met $MAB$.
Vandaar: $\frac{1}{t} = \frac{t}{1-t}$ met als resultaat: $t = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$
Uit de eerste van de twee koordenwetten volgt dan ook:
krd(144°) = $\sqrt{2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}} = \frac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$
Nu komt de stelling van Ptolemaeus op de proppen. De koorden $AB$, $BC$ en $CD$ passen achtereenvolgens bij middelpuntshoeken van 30°, 6° en 144° en de diagonalen $AC$ en $BD$ bij hoeken van 36° en 150°.




$a$ = krd(30°)
$b$ = krd(6°)
$c$ = krd(144°)
$d$ = 2
$p$ = krd(36°)
$q$ = krd(150°)

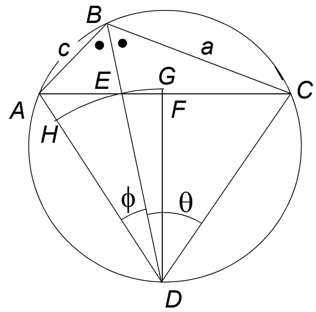
Uit $pq = ac + bd$ kan nu $b$ = krd(6°) worden bepaald. En die uitkomst leidt dan weer tot krd(3°) en krd($1\frac{1}{2}°$).

***Interpolatie***

Zo ongeveer ging Ptolemaeus te werk en de daarbij optredende vierkantswortels wist hij bekwaam te benaderen. Maar hij wilde ook krd(1°) en daarmee krd($\frac{1}{2}°$) vinden. Daarvoor waren zijn formules niet toereikend: er moest worden geïnterpoleerd. Daarbij gebruikte hij de stelling:

$$\boxed{\text{Als } \phi < \theta < 90°\text{, dan } \frac{\mathrm{krd}(\theta)}{\mathrm{krd}(\phi)} < \frac{\theta}{\phi}}$$

Het bewijs is een treffend staaltje klassieke meetkunde.




*Te bewijzen:*
$\frac{a}{c} < \frac{\mathrm{bg}BC}{\mathrm{bg}AB}$
*ofwel*
$\frac{a}{c} < \frac{\angle BDC}{\angle ADB}$

Laat de bissectrice van hoek $ABC$ de cirkel door $A$, $B$ en $C$ in $D$ en de lijn $AC$ in $E$ snijden. Nu zijn de bogen $AD$ en $CD$ en dus ook de bijbehorende koorden gelijk. Uit $D$ is de loodlijn op $AC$ neergelaten (voetpunt $F$) en verder wordt nog de cirkel opgevoerd met middelpunt $D$ en straal $|DE|$. Omdat $|AD| > |ED| > |FD|$ (Pythagoras) snijdt die cirkel $AD$ in het punt $H$ tussen $A$ en $D$ en $DF$ in het punt $G$ op het verlengde van $DF$. Nu volgt:

$$\textit{opp. FDE} < \textit{opp. sector GDE}$$
$$\textit{opp. ADE} > \textit{opp. sector HDE}$$
$$:$$
$$\frac{\textit{opp. FDE}}{\textit{opp. ADE}} < \frac{\textit{opp. sector GDE}}{\textit{opp. sector HDE}} = \frac{\angle FDB}{\angle ADB} \qquad (*)$$

In de Griekse wiskunde behoorde het manipuleren met verhoudingen tot het standaardrepertoire. Zo volgt uit (*)

$$\frac{\textit{opp. FDA}}{\textit{opp. ADE}} < \frac{\angle FDA}{\angle ADB} \qquad (**)$$

Nu kan *opp. FDA* worden vervangen door *opp. FDC* en $\angle FDA$ door $\angle FDC$; optelling van de aldus gewijzigde (**) met (*) levert op:

$$\frac{\textit{opp. EDC}}{\textit{opp. ADE}} < \frac{\angle BDC}{\angle ADB} \qquad (**)$$

De oppervlakten van $EDC$ en $ADE$ verhouden zich als $|EC|$ en $|AE|$. Omdat $BE$ de bissectrice is van $\angle ABC$ verhouden $|EC|$ en $|AE|$ zich (bissectricestelling!) als $a$ en $c$ en daarmee is de stelling bewezen.
Met deze stelling kon Ptolemaeus krd(1°) inklemmen tussen $\frac{2}{3}krd(1\frac{1}{2}°)$ en $\frac{4}{3}krd(\frac{3}{4}°)$ en omdat die getallen pas in de derde sexagesimaal achter de komma verschillen, kreeg hij een nauwkeurig benadering van krd(1°). Tot slot: de stap van de koordenrekening naar de ons zo vertrouwde goniometrie verloopt soepel via de identiteit: krd(2ϕ) = 2sinϕ. De stelling van Ptolemaeus toegepast op een koordenvierhoek met de middellijn van de omcirkel als diagonaal, levert een formule op voor $\sin(\phi + \theta)$.

*Martin Kindt, m.kindt@uu.nl*