Er bestaat geen eindige collectie veelvlakken die als een paspuzzel aan elkaar gezet kunnen worden tot een regelmatig viervlak of tot een recht blok. Max Dehn was de eerste die dit bewees. Tegenwoordig komt daarbij de Dehn-invariant ter sprake. Maar die heeft Max Dehn niet zelf uitgevonden, en over zijn oorspronkelijke werk uit 1900 is nog weinig algemeen bekend. **Piet Lemmens** geeft een kijkje in het werk van Dehn.

Max Dehn en paspuzzels met veelvlakken

Inleiding

In de *Nieuwe Wiskrant* van april 2011 schreef Martin Kindt in zijn rubriek 'Wat te bewijzen is (52)' een interessant verhaal over de inhoud van een afgeknotte piramide. Dit was voor mij aanleiding om te zoeken naar eerdere artikelen over deze zaken. Ik vond in de *Wiskrant* van december 1999 een verhaal van Martin over de inhoud van een piramide en in die van maart 2009 een verhaal van Michel Roelens over hetzelfde onderwerp, aansluitend op Martins bijdrage. Deze drie artikelen zijn alleen al de moeite van het lezen waard wegens de schat aan historische informatie. Gemeenschappelijk in de artikelen is het bepalen van de inhoud van een veelvlak door het in stukken te snijden.

Hier wil ik aandacht schenken aan het baanbrekende werk dat Max Dehn rond het begin van de twintigste eeuw heeft verricht, waarin hij aantoonde dat – in tegenstelling tot de situatie in het platte vlak – er in de ruimte veelvlakken zijn met dezelfde inhoud, maar waarvoor geen verdeling van het ene veelvlak in *eindig* veel veelvlakjes kan dienen als paspuzzel voor het andere veelvlak. Michel Roelens plaatst het aan het eind van zijn artikel in historisch perspectief, maar gaat er niet verder op in. Er is ook sprake van de Dehn-invariant, maar dat begrip is pas ontstaan na een publicatie van Hugo Hadwiger in 1950, dus een halve eeuw later!

Veelhoeken in het platte vlak

Ik bekijk hier alleen veelhoeken die ontstaan uit een vierkant door er met rechte sneden een eindig aantal keren een gedeelte af te snijden. Stel dat in het platte vlak twee veelhoeken gegeven zijn met dezelfde oppervlakte. Dan kan de ene veelhoek in eindig veel kleinere veelhoeken worden verdeeld die ook zo aan elkaar gelegd kunnen worden dat ze een verdeling zijn van de andere veelhoek.

Een sleutelgeval is het op deze manier omvormen van een driehoek tot een rechthoek met een vooraf vastgestelde breedte. Als we dat kunnen, dan ligt de aanpak van het algemene geval voor de hand. Ik denk dat dit probleem bij de meeste lezers wel bekend zal zijn (zie bijvoorbeeld Rouse Ball and Coxeter). Toch lijkt het de moeite waard om hier een mogelijke aanpak te schetsen.
Eerst trekken we een middenparallel in de driehoek, waardoor deze gesplitst wordt in een kleinere driehoek en een trapezium. De kleine driehoek wordt een halve slag gedraaid om een van zijn hoekpunten op de middenparallel. Zo ontstaat een parallellogram (zie figuur 1).

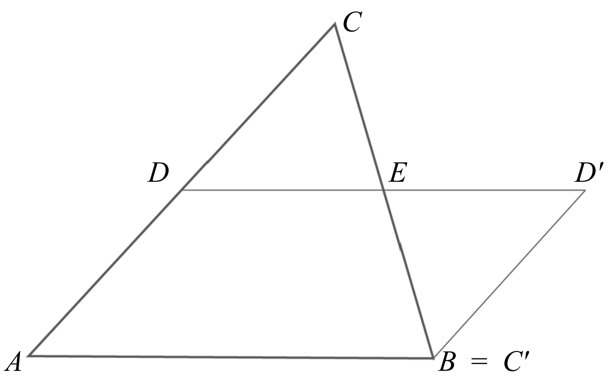

fig. 1

Een parallellogram wordt door verschuiving van een zijde langs zijn lijn getransformeerd in een ander parallellogram met dezelfde oppervlakte. Zo'n transformatie kan ook worden geëffectueerd door het eerste parallellogram in stroken te knippen en die naar het tweede parallellogram te schuiven (zie figuur 2).

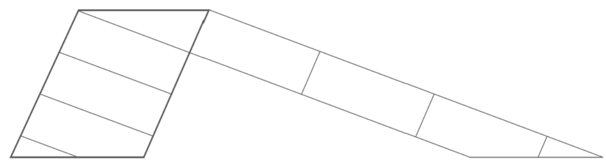
fig. 2

Om op deze manier een parallellogram $ABCD$ te transformeren in een rechthoek met vastgestelde breedte, passen we die breedte als CE vanuit C af op de halflijn door D. Vervolgens verschuiven we BD tot $B'D'$ met B' op de lijn door A en E. Zo krijgen we een parallellogram $AB'CD'$ met E liggend op de lijn van AB'. Door nu AB' te verschuiven tot A in E overgaat, komt er een parallellogram $EB''CD'$ waarvan CE een zijde is (zie figuur 3). Tenslotte kan daarvan een rechthoek worden gemaakt door de aan CE evenwijdige zijde te verschuiven.

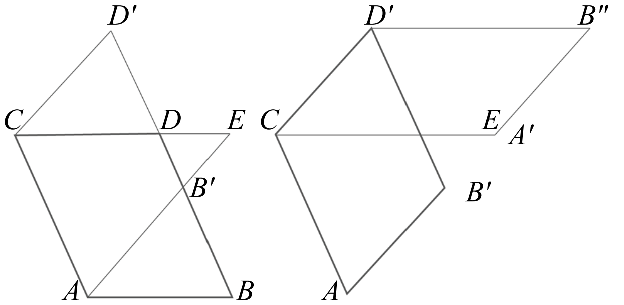

fig. 3

Veelvlakken in de ruimte, een voorbeeld

Ik bekijk alleen veelvlakken die ontstaan uit een kubus door er met vlakke sneden een eindig aantal keren een gedeelte af te snijden. In de ruimte kan echter niet ieder viervlak in eindig veel veelvlakken worden verdeeld die aan elkaar geplakt kunnen worden tot een recht blok! De oorzaak hiervan is dat de insluithoeken van het viervlak in haar ribben aan een speciale relatie moeten voldoen.

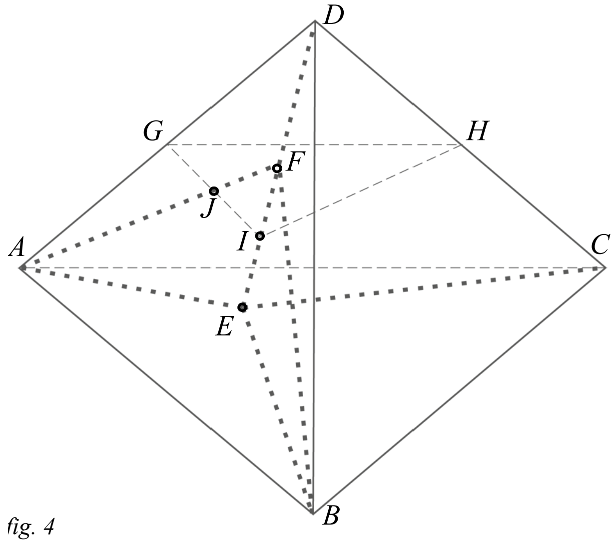

fig. 4

De *insluithoek* van een veelvlak in een ribbe ervan kan op verschillende manieren worden gedefinieerd. Ik kies op de ribbe een punt M dat geen eindpunt ervan is, en neem een cirkelschijfje met middelpunt M, loodrecht op de ribbe, en zo klein dat de enige zijvlakken die een niet-lege doorsnede met het schijfje hebben juist de twee zijvlakken zijn die in de ribbe samenkomen. Dan snijdt het veelvlak een sector uit het schijfje, en de bedoelde insluithoek is de middelpuntshoek in M van die sector. Deze hoek is onafhankelijk van de plaats van M op de ribbe, maar de straal van het schijfje kan wel afhangen van die plaats. Alleen in de eindpunten van de ribbe zouden er onverwachte dingen kunnen gebeuren.

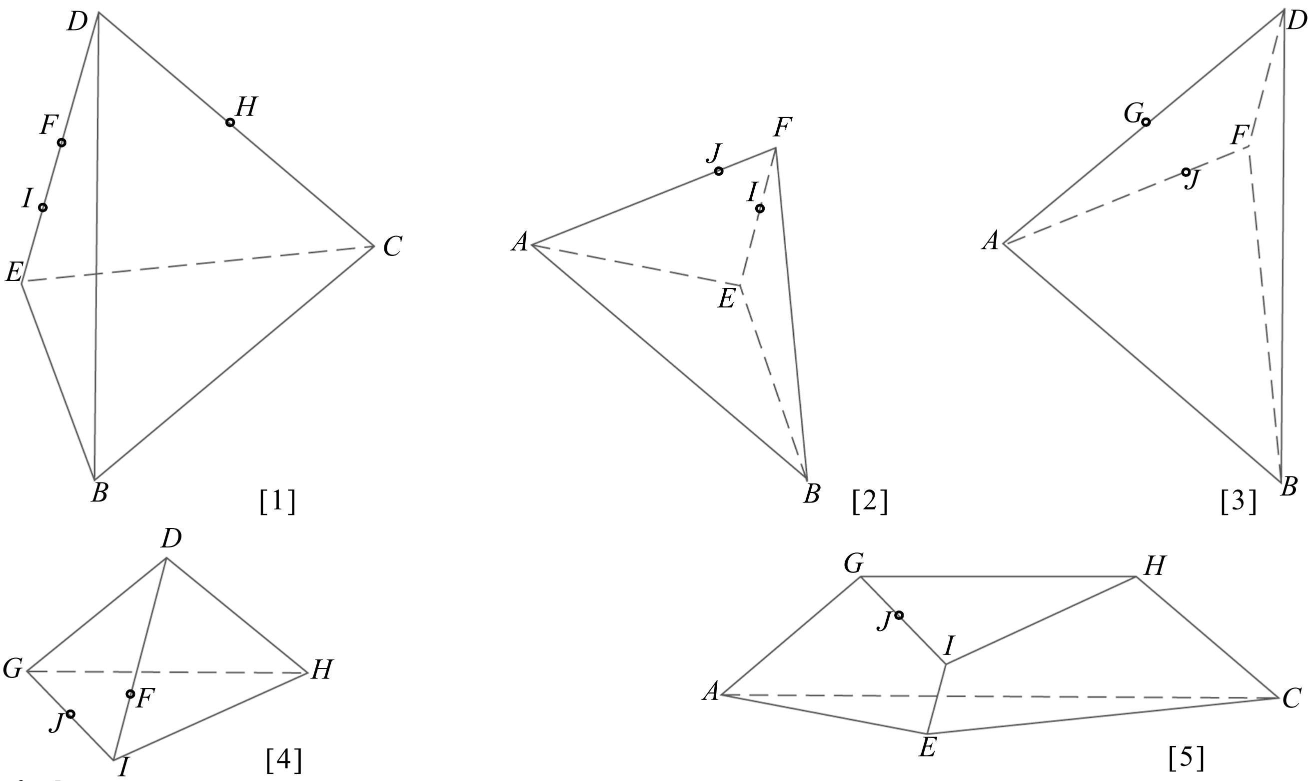

fig. 5

Is een eindig aantal veelvlakken aan elkaar geplakt tot een groter geheel, dan noemen we die veelvlakken *stukken* van het grote geheel (dat zelf ook een veelvlak is). Dan ligt een ribbe van een stuk mogelijk gedeeltelijk ook op andere stukken. Om hier enig gevoel voor te krijgen, bekijken we eerst een voorbeeld van een viervlak $ABCD$ dat in vijf stukken is verdeeld, vier viervlakken en een scheef afgeknot viervlak (zie figuur 4). De afzonderlijke stukken zijn ook apart getekend in hetzelfde perspectief en van een nummer voorzien (zie figuur 5).

Aan elkaar geplakt tot $ABCD$, zoals in figuur 4, vallen sommige hoekpunten samen, evenals sommige ribben (geheel of gedeeltelijk) en zijn er ook snijpunten van verschillende ribben. Die hoekpunten en snijpunten in $ABCD$ noemen we *knooppunten*.

De door de ribben van de stukken bepaalde deelverzameling van $ABCD$ wordt door de knoopppunten verdeeld in *lijnstukken*. Die lijnstukken geven we aan met hun twee eindpunten. Dat zijn knooppunten, en behalve die liggen er geen andere knooppunten op een lijnstuk. Er zijn 21 lijnstukken. Zo zijn DF, FI en EI lijnstukken, maar zijn DI, DE en EF geen lijnstukken.

De afzonderlijke stukken hebben samen 33 ribben. Deze ribben geven we aan met hun eindpunten in $ABCD$, gevolgd door het nummer van het betreffende stuk. Een lijnstuk kan een ribbe van een stuk zijn, zoals DH is $DH4$, DG is $DG4$, BC is $BC1$, enzovoort. Maar dit kan ook gelden voor verschillende stukken, zoals BD is $BD1$ en BD is $BD3$.

Uit een cirkelschijfje voor BD worden dus door de stukken [1] en [3] sectoren gesneden die samen precies de sector zijn die door $ABCD$ uit het schijfje wordt gesneden. De som van de insluithoeken van stuk [1] in $BD1$ en van stuk [3] in $BD3$ is dus de insluithoek van $ABCD$ in BD. Andere mogelijkheden zien we bijvoorbeeld bij de lijnstukken EI, GJ en GH.

EI is $EI5$, maar EI is ook een deel van $DE1$ en van $EF2$. Uit een cirkelschijfje voor EI worden dus door de stukken [1] en [2] en [5] sectoren gesneden die samen precies het hele schijfje zijn. De som van de insluithoeken van stuk [1] in $DE1$, van stuk [2] in $EF2$, en van stuk [5] in $EI5$ is dus 2π.

GJ is een deel van $GI4$ en van $GI5$. Verder ligt GJ op een zijvlak van stuk [3] maar niet op een ribbe daarvan. De helft van een schijfje voor GJ ligt dus in stuk [3]. De som van de insluithoeken van stuk [4] in $GI4$ en van stuk [5] in $GI5$ is dus π.

GH is $GH4$ en ook $GH5$, maar GH ligt op een zijvlak van $ABCD$. De helft van een schijfje voor GH ligt dus buiten $ABCD$. De som van de insluithoeken van stuk [4] in $GH4$ en van stuk [5] in $GH5$ is dus π.

Samenvattend: van de stukken waarvoor een bepaald lijnstuk ligt op een van hun ribben is de som van de betreffende insluithoeken gelijk aan π of 2π, mits het lijnstuk niet op een ribbe van $ABCD$ ligt. Ligt het lijnstuk wel op een ribbe van $ABCD$, dan is die som gelijk aan de insluithoek van $ABCD$ in die ribbe.
Een belangrijke constatering is dat de lengte van een ribbe van een stuk of van een ribbe van $ABCD$ gelijk is aan de som van de lengten van de lijnstukken die er op liggen, bijvoorbeeld

$|DE1| = |DF| + |FI| + |EI|$, $|DG4| = |DG|$,
$|AD3| = |AG| + |DG|$, $|CD| = |CH| + |DH|$,
$|AD| = |AG| + |DG|$.

De stelling van Dehn

Stelling (Dehn, 1900)
Als een veelvlak met m ribben en insluithoeken $\varphi_k (k = 1, \ldots, m)$ te verdelen is in eindig veel veelvlakken die ook aan elkaar gezet kunnen worden tot een veelvlak met n ribben en insluithoeken $\psi_K (K = 1, \ldots, n)$, dan zijn er bij iedere $\varepsilon > 0$ *rationale* getallen r_k en s_K die minder dan ε van de lengten van de betreffende ribben afwijken, en een *rationaal* getal t zo, dat

$$\sum_k r_k \varphi_k - \sum_K s_K \psi_K = t\pi .$$

Opmerking: dat er een rationale relatie moet zijn tussen π en de insluithoeken van de twee veelvlakken, werd al in 1896 als vermoeden gepubliceerd door R. Bricard. Het paradepaard van deze stelling is dat een regelmatig viervlak niet in eindig veel veelvlakken is te verdelen die samen een recht blok vormen. Immers van een regelmatig viervlak zijn alle insluithoeken dezelfde φ, en van een recht blok zijn alle insluithoeken gelijk aan $\frac{\pi}{2}$. Dus als zo'n verdeling wel mogelijk was, impliceert de stelling van Dehn dat φ een *rationaal* veelvoud is van π, omdat we ε zo klein kunnen nemen dat alle r_k positief zijn.

In de volgende sectie zullen we echter bewijzen dat φ een *irrationaal* veelvoud is van π. De laatste bewering werd door Dehn aangetoond in zijn artikel in de *Göttinger Nachrichten* van 1900. Dat artikel is verder voor het grootste deel een preprint van zijn artikel van 1902 in de *Mathematische Annalen*, dat waarschijnlijk gemakkelijker te raadplegen is.

De insluithoeken van een regelmatig viervlak

Men rekent gemakkelijk na dat de insluithoek φ van een regelmatig viervlak voldoet aan $\cos(\varphi) = \frac{1}{3}$ en $\sin(\varphi) = \frac{2}{3}\sqrt{2}$, en gebruikmakend van de somformules voor $\cos(n\varphi)$ en $\sin(n\varphi)$ laat Dehn zien dat $\sin(n\varphi) \neq 0$ voor alle positieve gehele n. Er is dus geen positieve gehele n waarvoor $n\varphi$ een geheel veelvoud van π is.

Zelf heb ik een ander bewijs gevonden, dat wel niet origineel zal zijn, maar misschien toch de moeite waard om hier ten tonele te voeren. In plaats van $\sin(n\varphi)$ en $\cos(n\varphi)$ zullen we $\tan(n\varphi)$ bekijken, en bewijzen dat $\tan(n\varphi) \neq 0$ voor alle positieve gehele n. We schrijven $\tan(n\varphi) = w$, met $w = 2\sqrt{2}$, en via de somformule

$$\tan((n+1)\varphi) = \frac{\tan(\varphi) + \tan(n\varphi)}{1 - \tan(\varphi) \cdot \tan(n\varphi)},$$

krijgen we

$$\tan((n+1)\varphi) = \frac{w + \tan(n\varphi)}{1 - w \cdot \tan(n\varphi)},$$

dus

$$\tan(2\varphi) = \frac{w + w}{1 - w \cdot w} = -\tfrac{2}{7}w$$

en

$$\tan(3\varphi) = \frac{w - \frac{2}{7}w}{1 + \frac{16}{7}} = \tfrac{5}{23}w.$$

Met inductie is gemakkelijk te zien dat

$$\tan(n\varphi) = \frac{T_n}{N_n}w,$$

waarbij T_n en N_n gehele getallen zijn. We spreken nu af dat we T_{n+1} en N_{n+1} zullen berekenen door van de somformule

$$\frac{T_{n+1}}{N_{n+1}}w = \frac{w + \frac{T_n}{N_n}w}{1 - 8\frac{T_n}{N_n}}$$

de teller en de noemer in het rechterlid met N_n te vermenigvuldigen. Dan komen er de recurrente betrekkingen

$$T_{n+1} = N_n + T_n \text{ en } N_{n+1} = N_n - 8T_n,$$

met $T_1 = 1$ en $N_1 = 1$. Het bovenstaande is uiteraard alleen zinvol zolang $N_n \neq 0$.
De volgende waarden worden dan $T_2 = 2$, $N_2 = -7$, $T_3 = -5$, $N_3 = -23$, $T_4 = -28$, $N_4 = 17$, enzovoort. Uit de recurrente betrekkingen leiden we af

$$T_{n+2} = N_{n+1} + T_{n+1} = N_n - 8T_n + T_{n+1}$$

$$= T_{n+1} - T_n - 8T_n + T_{n+1}, \text{ dus}$$

$$T_{n+2} = 2T_{n+1} - 9T_n, \text{ evenzo } N_{n+2} = 2N_{n+1} - 9N_n.$$

Hieruit trekken we de conclusies:
Als T_{n+2} deelbaar is door 9 dan is T_{n+1} deelbaar door 9, en als N_{n+2} deelbaar is door 9 dan is N_{n+1} deelbaar 9.

Omdat T_1, T_2, N_1, N_2 niet deelbaar zijn door 9, krijgen we dat de door bovenstaande recursie berekende T_n en N_n voor geen enkele n deelbaar zijn door 9. Maar dan worden T_n en ook N_n zeker nooit gelijk aan 0, en dat impliceert dat de hoek φ geen rationaal veelvoud van π is!

De redenering van Dehn over verdelingen

Wat we besproken hebben in het voorbeeld van een verdeling van een viervlak, zullen we nu veralgemeniseren en algebraïseren. Het betoog van Dehn verloopt anders en vergt meer ruimtelijk inzicht, maar het principe is hetzelfde en het bevat alles wat ik in het volgende gebruik. Voor de goede orde zij nog opgemerkt dat mijn verhaal niet nieuw is. Al in 1903 publiceerde B. Kagan in de *Mathematische Annalen* een enigzins vergelijkbare verhandeling.

Zij P een veelvlak, verdeeld in eindig veel stukken. We nummeren de lijnstukken, duiden het j-de lijnstuk aan met A_j en voorzien het van een eigen reële variabele a_j.

We bekijken de stukken ook apart. Dan heeft elk stuk zijn eigen ribben. Al die ribben nummeren we, duiden de i-de ribbe aan met C_i en voorzien haar van een eigen reële variabele c_i. Elk van die ribben is zelf een lijnstuk of is samengesteld uit lijnstukken. We eisen dat c_i de som is van de a_j waarvoor A_j op C_i ligt, dus

$$c_i = \sum_j d_{ij}a_j,$$

waarbij $d_{ij} = 1$ als het lijnstuk A_j op de ribbe C_i ligt, en $d_{ij} = 0$ als dat niet zo is. Merk op dat aan de gestelde eis voldaan is als we voor de c_i en a_j de lengten van de betreffende ribben en lijnstukken invullen.

Vervolgens vermenigvuldigen we de vergelijking voor c_i met de insluithoek γ_i die het stuk waartoe C_i behoort daar heeft, en tellen alle vergelijkingen op. We krijgen zo doende

$$\sum_i c_i \gamma_i = \sum_i \left(\sum_j d_{ij} a_j \gamma_i \right).$$

In het rechterlid kunnen we de sommatievolgorde verwisselen door eerst per a_j de coëfficiënten daarvan op te tellen en daarna over j te sommeren:

$$\sum_i c_i \gamma_i = \sum_j a_j \left(\sum_i d_{ij} \gamma_i \right).$$

In de subsom van het rechterlid staat dat we van de stukken die het lijnstuk A_j in een van hun ribben hebben, de insluithoeken in A_j moeten optellen. De uitkomst daarvan noemen we Γ_j en zoals we in het voorbeeld gezien hebben, hangt Γ_j af van de positie van A_j:

> Als A_j deel is van een ribbe van P, dan is Γ_j de insluithoek van P in die ribbe. In alle andere gevallen is Γ_j gelijk aan π of 2π.

Tenslotte nummeren we ook de ribben van P, duiden de k-de ribbe aan met R_k, en zijn insluithoek met φ_k.
De lijnstukken die in de ribben van P verlopen, verzamelen we per ribbe. Zo kunnen we dus schrijven

$$\sum_i c_i \gamma_i = \sum_j a_j \Gamma_j = \left(\sum_k u_k \varphi_k \right) + v\pi + w \cdot 2\pi$$

waarin u_k de som is van de a_j waarvoor A_j op R_k ligt, v de som van de a_j met $\Gamma_j = \pi$ en w de som van de a_j met $\Gamma_j = 2\pi$. Merk op dat u_k de lengte van R_k is als we voor de a_j de lengten van de lijnstukken invullen.

Nu nemen we aan dat dezelfde stukken ook een verdeling vormen van een veelvlak Q, waarbij de lijnstukken nu de variabelen b_J hebben en de ribben van Q aangeduid worden met S_K en en hun insluithoeken met ψ_K, en de rollen van d_{ij}, u_k, v, w worden overgenomen door D_{iJ}, U_K, V en W. De bij de verdeling van Q behorende formules worden dan

$$c_i = \sum_J D_{iJ} b_J,$$

$$\sum_i c_i \gamma_i = \left(\sum_K U_K \psi_K \right) + V\pi + W \cdot 2\pi$$

Merk nu op dat beide grote somformules voor P en Q hetzelfde linkerlid hebben (dezelfde stukken!), en dat bijgevolg ook de rechterleden ervan dezelfde uitkomst geven, dus

Lemma

$$\left(\sum_k u_k \varphi_k \right) - \left(\sum_K U_K \psi_K \right) = (V + 2W - v - 2w)\pi.$$

Tot nu toe hebben we aan de variabelen c_i, a_j en b_J alleen de eisen gesteld dat

$$c_i = \sum_j d_{ij} a_j \text{ en } c_i = \sum_J D_{iJ} b_J$$

voor elke i. Dit stelt een (groot) stelsel van lineaire vergelijkingen voor in de variabelen c_i, a_j en b_J, met gehele coëfficiënten, waaraan voldaan moet worden.

Er is natuurlijk altijd de oplossing waarvoor alle variabelen gelijk aan 0 zijn, maar dat is niet interessant. Een andere voor de hand liggende oplossing krijgen we door voor de variabelen de lengten van de betreffende ribben en lijnstukken te nemen, zoals in het voorbeeld. Maar dan weten we dat er oneindig veel oplossingen van dit stelsel zijn, want alleen al door alle waarden van een oplossing met dezelfde factor te vermenigvuldigen krijgen we een nieuwe oplossing. De algemene oplossing van een dergelijk stelsel kan worden verkregen door een eliminatiemethode, en de meest bekende daarvan is de systematische Gauss-eliminatie. Van een aantal variabelen kan de waarde naar believen worden gekozen. Deze noemen we de *vrije* variabelen. Welke dat zijn, hangt af van de oplossingsmethode. De overige variabelen worden uitgedrukt in sommen van vrije variabelen met rationale coëfficiënten, omdat de oorspronkelijke coëfficiënten gehele getallen zijn.

Kiezen we voor de waarden van de vrije variabelen de respectievelijke lengten, dan zijn de daardoor bepaalde waarden van de overige variabelen eveneens de respectievelijke lengten. Bij deze keuzen worden u_k en U_K de lengten van de respectievelijke ribben R_k van P en S_K van Q.

De slimme truuk van Dehn is nu dat hij voor de vrije variabelen *rationale* waarden kiest die zo dicht bij de lengten liggen dat de daaruit berekende waarden van de overige variabelen ook dicht bij de lengten liggen. Maar die berekende waarden zijn dan eveneens rationale getallen! Daarmee zijn u_k, U_K, v, V, w en W ook rationale getallen.

Dit is de kern van het bewijs van de stelling van Dehn.

Opmerkingen

Ik wil benadrukken dat het betoog van Dehn niets van doen heeft met een invariant, iets dat voor de veelvlakken P en Q afzonderlijk kan worden uitgerekend, onafhankelijk van een (veronderstelde) verdeling. De uitkomsten moeten gelijk zijn als P en Q te verdelen zijn in dezelfde collectie van eindig veel stukken. Tijdens het schrijven van dit artikel kwam mij een publicatie van E.C. Wittmann (2012) onder ogen. Hij verwijst naar een artikel van D. Benko (2007). Zij gebruiken dezelfde verdeling van de ribben in lijnstukken, maar een totaal andere redenering om tot rationale 'lengten' te komen. Ik kan mij niet voorstellen dat zij het werk van Dehn grondig hebben bekeken, want Benko schrijft dat Dehn in wezen al gebruik maakte van additieve functies (zie verderop).

Moderne ontwikkelingen

De hogere wiskunde waar Michel Roelens het over heeft, is wel van toepassing op de moderne versie van de stelling van Dehn, waarbij niet wordt 'gesleuteld' aan de lengten van ribben en lijnstukken, maar aan de insluithoeken. Deze versie is in 1950 door Hadwiger gepubliceerd en maakt gebruik van een constructie van Georg Hamel uit 1905. Hadwiger geeft zelf aan dat hij tijdens het schrijven van zijn artikel niet op de hoogte was van soortgelijke publicaties van Borge Jessen in de Deense taal uit 1941 en 1946.

Het gaat hierbij om reëelwaardige functies op de reële getallen die additief zijn (dat wil zeggen voldoen aan de vergelijking $f(\alpha+\beta) = f(\alpha)+f(\beta)$ voor alle reële α en β) en bovendien de waarde 0 hebben voor alle rationale veelvouden van π.

We veronderstellen dat F zo'n functie is. In het systeem van vergelijkingen

$$c_i = \sum_j d_{ij}a_j \text{ en } c_i = \sum_J D_{iJ}b_J$$

voor elke i, vermenigvuldigen we de vergelijkingen voor c_i niet met de insluithoek γ_i, maar met $F(\gamma_i)$. De herformulering van het lemma in de redenering van Dehn wordt dan wegens de aan F gestelde eisen

$$\sum_k u_k F(\varphi_k) = \sum_K U_K F(\psi_K).$$

Anders dan Dehn neemt Hadwiger voor de c_i, a_j en b_J de lengten van de bijbehorende ribben en lijnstukken. Daardoor hebben we nu $u_k = x_k$ en $U_K = y_K$, waarin x_k de lengte is van de ribbe R_k van P, en y_K de lengte van de ribbe S_K van Q. Aldus ontstaat

Stelling (Hadwiger, 1950)
Zij F een additieve functie op de reële getallen met $F(\pi) = 0$.
Als een veelvlak P met m ribben ter lengte x_k en insluithoeken $\varphi_k\,(k = 1, \ldots, m)$ te verdelen is in eindig veel veelvlakken die ook aan elkaar gezet kunnen worden tot een veelvlak Q met n ribben ter lengte y_K en insluithoeken $\psi_k\,(K = 1, \ldots, n)$, dan geldt

$$\sum_k x_k F(\varphi_k) = \sum_K y_K F(\psi_K).$$

Noemen we $\sum_k x_k F(\varphi_k)$ de F-waarde van P, en $\sum_K y_K F(\psi_K)$ de F-waarde van Q, dan blijkt dus dat de F-waarde een 'knip- en plakinvariant' is voor veelvlakken! Dit noemt men een Dehn-invariant. Het is een echte invariant omdat de functie F niets te maken heeft met veelvlakken.

Om aan te tonen dat twee veelvlakken niet door knippen en plakken (in eindig veel stukken) in elkaar te transformeren zijn, hoeven we maar één additieve functie F met $F(\pi) = 0$ te vinden waarvoor de F-waarden van de twee veelvlakken verschillend zijn. Maar dan moet het vanzelfsprekend wel een functie zijn die niet overal de waarde 0 heeft. Helaas kan niemand zo'n functie concreet geven, het bestaan ervan hangt samen met het keuze-axioma. Als we dat axioma niet accepteren, dan kunnen we langs deze weg niet verder. Dit is bijvoorbeeld het geval in de intuïtionistische wiskunde, waarvan onze landgenoot L.E.J. (Bertus) Brouwer de grondlegger was. Zie hiervoor de biografie door Dirk van Dalen (2002).

In het volgende zullen we dus het keuze-axioma aannemen. Omdat de insluithoek φ van een regelmatig viervlak geen rationaal veelvoud is van π, zijn er volgens de methode van Hamel additieve functies die 0 zijn op rationale veelvouden van π en op φ de waarde 1 hebben. Passen we de stelling van Hadwiger met een dergelijke functie F toe op een regelmatig viervlak en een recht blok (met insluithoeken $\pi/2$), dan vinden we dat de F-waarde van het viervlak ongelijk aan 0 is, terwijl de F-waarde van het rechte blok 0 is. Dus er is geen knippen en plakken in eindig veel stukken mogelijk dat een regelmatig viervlak overvoert in een recht blok! Anders gezegd: er is geen paspuzzel bestaande uit eindig veel veelvlakken waarmee zowel een regelmatig viervlak alsook een recht blok gemaakt kan worden.

Nog een laatste opmerking

Willen we op Hadwigers manier van een specifieke verdeling van een regelmatig viervlak in eindig veel stukken aantonen dat deze geen verdeling kan zijn van een recht blok, dan hebben we genoeg aan additieve functies die gedefinieerd zijn op de insluithoeken van de stukken en op de eindige sommen van die insluithoeken, en die op π de waarde 0 hebben. Dit valt helemaal binnen de theorie van eindig-dimensionale lineaire ruimten over de rationale getallen. Daarvoor is het keuze-axioma niet nodig. Hadwiger (1957) attendeert daar reeds op.

Dankbetuiging

Deze bijdrage is ontstaan uit een eerdere versie, die ik in maart 2012 heb aangeboden. Mijn dank gaat uit naar Paul Drijvers, Aad Goddijn en Martin Kindt voor hun opmerkingen en aanvullingen.

Piet Lemmens,
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

Literatuur

Benko, D. (2007). A new approach to Hilbert's third problem. *American Mathematical Monthly, 114*, 665-676.

Bricard, R. (1896). Sur une question de géométrie relative aux polyèdres, *Nouvelles Annales de Mathématique, 3*(15), 331-334.

Dalen, D. van (2002). *L.E.J.Brouwer 1881–1966, een biografie.* Amsterdam: Uitgeverij Bert Bakker.

Dehn, M. (1900). Über raumgleiche Polyeder. *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse aus den Jahre 1900*, 345-354.

Dehn, M. (1902). Ueber den Rauminhalt. *Mathematische Annalen, 55*, 465-478.

Hadwiger, H. (1950). Zum Problem der Zerlegungsgleichheit der Polyeder. *Archiv der Mathematik, 2*, 441-444.

Hadwiger, H. (1957). *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie.* Berlin: Springer Verlag.

Kindt, M. (1999). Wat te bewijzen is (7). *De Nieuwe Wiskrant, 19*(2), 30-31. Dit artikel is herdrukt op p. 11-12 van de uitgave Kindt, M. (2008): *Wat 40 keer te bewijzen is.* Utrecht: Freudenthal Instituut.

Kindt, M. (2011). Wat te bewijzen is (52). *De Nieuwe Wiskrant, 30*(3), 16-18.

Roelens, M.(2009). Het volume van een piramide. *De Nieuwe Wiskrant, 28*(3), 4-10.

Rouse Ball, W.W., & Coxeter, H.S.M. (1987). *Mathematical recreations and essays.* Dover Publications.

Wittmann, E.C. (2012). Elementarisierung von Benkos Lösung des 3. Hilbertschen Problems. *Elemente der Mathematik, 67*(2), 45-50.

– M E D E D E L I N G –

Aankondiging Wintersymposium KWG 2013

Wiskunde ◄——————► Natuurkunde

Het Wintersymposium 2013 van het Koninklijk Wiskundig Genootschap op zaterdag 5 januari 2013 te Utrecht heeft een thema dat actueler is dan ooit: het samenspel tussen wiskunde en natuurkunde.

Sprekers:

- Ute Ebert, leidster van een onderzoeksgroep aan het Centrum Wiskunde & Informatica in Amsterdam en hoogleraar natuurkunde aan de TU Eindhoven, doet onderzoek aan ontladingen. Onder meer gammastraling uit onweerswolken en de productie van antimaterie in onweer zijn recente ontdekkingen die te danken zijn aan de enorme ontwikkeling van technologie, experimenteel en theoretisch onderzoek. Daarbij zijn analytische en numerieke wiskundige methodes onmisbaar. Haar voordracht gaat over *Onweer – veel nieuws van de plasma's boven onze hoofden.*
- Henk Broer is hoogleraar wiskunde, interdisciplinaire toepassingen van wiskunde (meteorologie, life sciences) en mathematische fysica aan de RU Groningen en wetenschappelijk directeur van het Johann Bernoulli Instituut voor Wiskunde & Informatica. De optische verschijnselen die de natuurkundige Marcel Minnaert beschreef, zijn nog steeds actueel en wiskundig interessant. Er is een wiskundig verband tussen de verklaring voor de blinde stroken die soms waarneembaar zijn in de ondergaande zon en het probleem van de brachistochroon (de snelste weg van een deeltje tussen twee punten, waarvan de een hoger ligt dan de ander), door Johan Bernoulli eind 17e eeuw opgelost. Zijn voordracht gaat over *Atmosferische optica rond de horizon en Bernoulli's brachistochroon.*
- Erik Verlinde, hoogleraar theoretische fysica aan de Universiteit van Amsterdam, winnaar van een Spinozapremie in 2011, werkt aan een nieuwe theorie van zwaartekracht. Zwaartekracht zou geen fundamentele kracht zijn maar het gevolg van verschillen in informatiedichtheid tussen twee lichamen en daarbuiten. Een revolutionair idee, waarover hij u meer vertelt in zijn presentatie *Een nieuwe kijk op de zwaartekracht.*

Datum, plaats, bijdrage

Het symposium wordt gehouden op zaterdag 5 januari 2013 in het Academiegebouw van de Universiteit Utrecht (Domplein 29, 3512 JE Utrecht).

Het programma start om 10:00 uur (koffie vanaf 9:30) en eindigt om ongeveer 15:00 uur.

U wordt verzocht u van tevoren on-line aan te melden via de website van het Koninklijk Wiskundig Genootschap, www.wiskgenoot.nl (kies dan 'wat doet het KWG'? en vervolgens 'congressen en symposia'). Daar is ook het volledige programma, inclusief samenvattingen van de lezingen, te vinden.
De kosten voor het symposium bedragen € 25,00 voor KWG-leden en € 30,00 voor niet-leden. Deze bijdrage is onder andere voor een lunch en consumpties gedurende de dag.

Nadere inlichtingen: Jenneke Krüger, e-mail: jenneke.kruger@gmail.com telefoon: 06-16420445