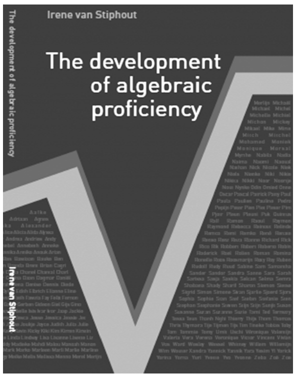
Boekbespreking

Titel: *The development of algebraic proficiency*
Auteur: Irene van Stiphout
Uitgever: Technische Universiteit Eindhoven
ISBN: 978-90-386-2979-7



Op 14 december 2011 promoveerde Irene van Stiphout aan de Eindhoven School of Education van de Technische Universiteit Eindhoven op haar studie naar de ontwikkeling van de algebraïsche bekwaamheid in het Nederlandse voortgezet onderwijs

Aanleiding en korte beschrijving

De aanleiding voor dit promotietraject is de discussie over de rekenkundige en algebraïsche bekwaamheid van leerlingen in het Nederlandse voortgezet onderwijs tegen de achtergrond van leerplanwijzigingen en didactische visies. Sinds begin jaren negentig van de vorige eeuw ligt de nadruk op betekenisvolle contexten en het algebraïsch modelleren daarvan, het (algebraïsch) oplossen van problemen uit die contexten en het interpreteren van de uitkomsten in die contexten. In het leerplan voor de onderbouw krijgen verbanden grote nadruk, wat tot gevolg heeft dat leerlingen moeten leren wisselen tussen representaties ervan, zoals grafiek, tabel en formule. Dit gaat mogelijk ten koste van procedurele routines. In de afgelopen jaren heeft zich een debat ontsponnen over de algebraïsche bekwaamheden, met klachten vanuit het vervolgonderwijs en het ter discussie stellen van het gebruiken van de grafische rekenmachine. Mede naar aanleiding van dit debat besloot de minister van onderwijs in het examenprogramma voor HAVO en VWO meer aandacht aan algebraïsche vaardigheden te besteden. Tegen deze achtergrond startte het promotietraject. Het ging erom (1) inzicht te krijgen in het feitelijke niveau van algebraïsche bekwaamheid en, als dit niveau teleurstellend zou zijn, (2) inzicht te krijgen in de diepere oorzaken ervan. In deze bespreking richt ik me vooral op de praktische consequenties voor het werk in de klas van het onderzoek van Van Stiphout. Als een rode draad loopt het kunnen uitvoeren van procedures en het begrijpen van de achterliggende concepten door haar onderzoek. Dit is het duidelijkst in de eerste deelstudie die gaat over de ontwikkeling van algebraïsche bekwaamheden van de leerlingen, ook in verband met de overgang van rekenen naar algebra. Om inzicht in de ontwikkeling van de algebraïsche bekwaamheden te krijgen, heeft Van Stiphout gekeken naar de *structure sense* van de leerlingen: zijn zij in staat "*to use equivalent structures of an [algebraic] expression flexibly and creatively*" (p. 30)? De moeilijkheid van het oplossen van algebraïsche problemen is bekeken vanuit de optiek van de overgangen tussen operationele en structurele begrippen. En ten slotte heeft zij onderzocht of de Nederlandse wiskundemethoden leerlingen helpen om hun conceptuele algebraïsche bekwaamheden te ontwikkelen.

Achtergrond en aanpak

Voor de overgang van rekenen naar algebra worden moeilijkheden genoemd als het *lack of closure* obstacle en de *proces-product*dualiteit. Het eerste is dat bij het wegwerken van haakjes in $2(3x-5)$ tot $6x-10$ de aftrekking in de laatste uitdrukking niet uitgevoerd kan worden en het antwoord dan als 'niet af' wordt ervaren. Het tweede betekent dat een bewerking soms al het antwoord is en soms niet: $\sqrt{9}$ herleid je tot 3, $\sqrt{5}$ laat je staan.

Voor de mogelijke diepere oorzaken van het eventuele gebrek aan algebraïsche bekwaamheden wordt het begrip algebraïsche expertise van Drijvers gebruikt dat gebaseerd is op het begrip *symbol sense* (*Nieuwe Wiskrant, 32*(3): *Wat bedoelen ze toch met…* symbol sense?). Algebraïsche expertise omvat volgens Drijvers zowel basisvaardigheden als procedureel werken, lokale focus en algebraïsche berekening als *symbol sense* met strategisch werken, globale focus en algebraïsch redeneren. Om de rekenkundige en algebraïsche vaardigheden van leerlingen te onderzoeken, heeft Van Stiphout toetsen ontwikkeld die ze heeft afgenomen in klassen 2 tot en met 6 van het VWO.
De toetsitems, bestaande uit open vragen, richten zich op de volgende vaardigheden (geïllustreerd met een voorbeeldvraag):

- wegwerken van haakjes: $-4(3a+b)=$
- vereenvoudigen: $-2(3x-y)+3(-4y-2)=$
- berekenen: $-7-(4-3)\cdot(-8)-2=$
- oplossen: $a\sqrt{2}=1+2a\sqrt{3}$
- substitueren: $a=-1$ en $b=-2$ in $-2(a^2b)^2$
- uitleggen of iets waar is of niet: $Q=\sqrt{P-2}$ impli-

ceert $P = Q^2 + 2$
- oplossen indien mogelijk: is er een x waarvoor $\frac{2x+1}{4x+2} = 2$? Zo ja, bereken x; zo nee, leg uit waarom niet
- herschrijven: $P = \frac{1}{Q} + 5$ betekent $Q = \ldots$ iets met P…

Het onderzoek naar de ontwikkeling van de algebraïsche vaardigheid.is uitgesplitst naar vaardigheidsniveau per klassenlaag en per leerling over de klassenlagen heen (longitudinaal) en van basisvaardigheden naar symbol sense. De toetsen zijn vier keer afgenomen. Er deden 1020 leerlingen van vier scholen minstens één keer mee aan een toets, 277 leerlingen alle vier keren.

Resultaten en aanbevelingen

Vaardigheden

Het bleek dat de vaardigheden over de jaren beter worden, maar dat er in de laatste twee jaar nauwelijks meer een toename is. De leerlingen met een natuurwetenschappelijk profiel doen het niet significant beter dan die met een maatschappelijk profiel. Per leerling is er over de leerjaren ook een verbetering in vaardigheden, maar slecht weinig leerlingen maken significante vorderingen. Wat betreft de ontwikkeling van basisvaardigheden naar *symbol sense* is het resultaat dat de leerlingen de eenvoudige vragen beheersen, maar zo gauw het een beetje moeilijker wordt veelal afhaken. De onderzoekster is bang dat de meer getalenteerde leerlingen (ik neem aan dat ze die met een natuurwetenschappelijk profiel bedoelt) te weinig uitgedaagd worden. Samenvattend: de vragen die voor de jongste leerlingen te moeilijk waren, waren dat ook nog voor de oudsten. In de discussie noemt de onderzoekster dit teleurstellend. Zij vermoedt dat de belangrijkste reden is dat de leerlingen te weinig leren om op een formeel niveau te redeneren, waar de wiskundige structuur en de ambigue natuur (de genoemde procesobjectdualiteit) centraal staan.

Zet ik dit om in een aanwijzing voor de praktijk, dan zou die wat mij betreft luiden: *Besteed gedurende de hele schoolloopbaan van de leerlingen aanhoudend aandacht aan het formele aspect van de algebra zodat ze basisvaardigheden als haakjes wegwerken en vergelijkingen vlot kunnen oplossen, maar ook (uiteindelijk) inzicht in formules en meer in het bijzonder in algebraïsche expressies krijgen en daar vlot mee kunnen omgaan. Leerlingen zouden toetsen met vragen van het genoemde type, gedurende alle jaren afgenomen, vrijwel zonder uitzondering foutloos moeten maken.*

Oorzaken voor het teleurstellende resultaat

Vervolgens probeert de onderzoekster greep te krijgen op de achterliggende oorzaken van de teleurstellende algebraïsche vaardigheden. Daartoe zoomt zij in op *structure sense*, het hiervoor vermelde aspect van *symbol sense*. Daartoe zijn zestien items uit de vier afgenomen toetsen geselecteerd die een beroep doen op de algebraesche structuur van een uitdrukking, zoals bijvoorbeeld: Los op: $(x-1)(x+3)(x-4) = 0$.

Andere voorbeelden:

$$\frac{21}{6 + \frac{5}{1+x}} = 3\,;\ \frac{7x^2 + 7 - 3(2x^2+2)}{x^2+1} = \ldots,$$

is er een x waarvoor $\frac{2x+1}{4x+2} = 2$, zo ja bereken x; zo nee, leg uit waarom niet;

$a\sqrt{2} = 1 + 2a\sqrt{3}$, los a op;

$3 \cdot (-2) \cdot 5 - 2 \cdot 5 =$ en $-7 - (4-3) \cdot (-8) - 2 =$

De antwoorden van de leerlingen zijn geanalyseerd op de manier waarop ze dit soort vragen aanpakken. Zo zijn er leerlingen die in het linkerlid van $(x-1)(x+3)(x-4) = 0$ eerst de haakjes wegwerken. Kennelijk is voor hen het procedurele aspect overheersend en zien ze het conceptuele aspect over het hoofd. Het blijkt dat de meerderheid van de leerlingen niet in staat is flexibel met de wiskundige structuur van de uitdrukkingen om te gaan.

Ook hier is een praktische aanbeveling te formuleren: *Stel regelmatig vragen waarbij de leerlingen de structuur van algebraïsche expressies moeten doorzien, zoals hiervoor genoemd.*

Proces-objectdualiteit

Daarna gaat het proefschrift in op de diepere oorzaak van de teleurstellende algebraïsche vaardigheid van leerlingen. Het betreft hier het ambigue karakter van wiskundige uitdrukkingen: de proces-objectdualiteit. Of een algebraïsche expressie een proces (de operatie) of een object (het resultaat ervan) is, hangt van de situatie af. Naast de overgang van proces naar object speelt hier ook de overgang van de vaste waarde van de getallen in het rekenen naar die van de variabele waarde in de algebra. De onderzoekster formuleert dit als volgt: hoe meer overgangen nodig zijn om een algebraprobleem op te lossen, hoe moeilijker dit probleem is. Om dit te onderzoeken is een toets ontwikkeld die aan 92 leerlingen van 5 VWO is voorgelegd. De vragen waren:
- leg uit waarom $\sqrt{12} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$, danwel $\sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$, danwel $\sqrt{4} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$ al dan niet juist is
- vereenvoudig $2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}$
- los op (met uitwerking): $2(3x+2) = 3(2x-1)+7$,

danwel $2(3x+2) = 3(2x-1)+5$, danwel
$2(3x+2) = 3(2x-1)+8$.

De vragen met de wortels hebben betrekking op de overgang van proces naar object, de vergelijkingen hebben betrekking op de overgang van vaste waarde naar variabele waarde. Van de vragen over de wortels werd verwacht dat een leerling die een bepaalde vraag goed zou doen, ook de erop volgende, na 'dan wel', juist zou beantwoorden. Dit bleek het geval te zijn. Hetzelfde werd van de drie vergelijkingen verwacht. Ook dat bleek het geval.

Dit kan volgens mij tot de volgende praktische aanbeveling leiden: *Vraag leerlingen met regelmaat of er iets gedaan (berekend, vereenvoudigd, opgelost, enzovoort) moet worden of niet, en waarom.*

Helpen de wiskundemethoden?

Tenslotte de laatste deelstudie, een explorerende studie naar de manier waarop de wiskundemethoden de leerlingen helpen om met name de conceptuele kant van hun algebraïsche bekwaamheden te ontwikkelen. Met conceptuele bekwaamheden wordt bijvoorbeeld bedoeld dat de leerlingen algebraïsche structuren kunnen herkennen en flexibel gebruiken, kunnen omgaan met het eerder genoemde ambigue karakter van wiskunde en samenhang zien tussen wiskundige begrippen. Dat heeft Van Stiphout onderzocht door de begrippen lineaire relatie en lineaire vergelijking in de twee grote Nederlandse wiskundemethoden nader te analyseren. Zij beschouwt deze begrippen als centraal in het curriculum van het voortgezet onderwijs. Omdat de Nederlandse wiskundemethoden realistisch wiskundeonderwijs als uitgangspunt hebben, voert zij de analyse uit vanuit het perspectief van Gravemeijers 'emergent modelleren' (Gravemeijer, 1999). Modelleren van concrete probleemsituaties is een van de belangrijkste uitgangspunten van realistisch wiskundeonderwijs. Daarin onderscheidt Gravemeijer vier niveaus: taakstellend (wat is er in de concrete probleemsituatie aan de hand?), verwijzend (hoe kan die probleemsituatie gemodelleerd worden?), algemeen (kan er over de wiskundige relaties geredeneerd worden en hoe dan?) en formeel (gelden die redeneringen ook los van de oorspronkelijke probleemsituatie?). Uit deze vier niveaus heeft van Stiphout drie categorieën afgeleid voor de te analyseren wiskundemethoden. Bij de eerste categorie gaat het om redeneren en berekenen binnen de context. De tweede categorie betreft het ontwikkelen van de daarbij optredende wiskundige eigenschappen en kenmerken. Bij de derde categorie gaat het om het bevorderen van de conceptuele bekwaamheden. Tijdens de analyse bleek ze een vierde categorie nodig te hebben. De wiskundemethoden hanteren namelijk niet emergent modelleren als onderwijsontwerpmethodiek, maar gebruiken een twee-sporenbenadering: in eerste instantie (vooral in de onderbouw) die van het realistisch wiskundeonderwijs en vervolgens (vooral in de bovenbouw) de formele benadering. Om de overgang tussen die twee benaderingen te maken, geven de methoden opgaven die door Van Stiphout in deze vierde categorie zijn ondergebracht. Bij de lineaire relaties fungeren die opgaven als ontbrekende schakel tussen de context-gebonden beschrijvingen van een lineaire relatie en de formele beschrijving door middel van $y = ax+b$; bij de lineaire vergelijkingen dienen die opgaven ervoor om het gat te dichten tussen informele oplosmethoden als de 'weegschaal' en de 'bordjesmethode' en die waarbij een term van het ene lid van de vergelijking naar het andere wordt gebracht met verandering van teken.

Deze analyse heeft tot de volgende bevindingen geleid. De ene methode valt voor meer dan de helft in de eerste twee categorieën, er zijn nauwelijks opgaven in de derde categorie en tegen de helft valt in de vierde. Bij de andere methode waren deze aantallen respectievelijk driekwart, een tiende en een zevende. De onderzoekster trekt hieruit de conclusie dat beide methoden te weinig doen om de leerlingen te helpen hun conceptuele bekwaamheden (aangesproken in opgaven in de derde categorie) te ontwikkelen. Zij formuleert dit nog wat explicieter: in beide methoden is er een disbalans tussen de contextgebonden benadering en de formele benadering. De benaderingen sluiten niet goed op elkaar aan waardoor de leerlingen onvoldoende hogere-ordebekwaamheden zoals *structure sense* leren. In de discussie geeft ze uitvoerig weer wat de beperkingen van haar analyse(methode) zijn, bijvoorbeeld de gehanteerde indeling in categorieën.

Misschien ligt hier wel het grootste belang van het onderzoek van Van Stiphout voor de lespraktijk: *De wiskundeleraar/-lerares moet het wiskundeboek aanvullen door de leerlingen te helpen de overgang te maken van de min of meer contextgebonden aanpak in de onderbouw naar de veel formeler aanpak van de bovenbouw die ook voor de eisen van het eindexamen en van het vervolgonderwijs noodzakelijk zijn.*

Conclusies

In het laatste hoofdstuk van het proefschrift worden de algemene conclusies besproken en bediscussieerd. De eerste algemene conclusie is dat het niveau van de leerlingen op het gebied van algebraïsche bekwaamheden teleurstellend is. Leerlingen maken weliswaar vooruitgang, maar die vooruitgang is (te) klein. Eenvoudige opgaven gaan over de jaren steeds beter, maar dat geldt nauwelijks voor complexe opgaven waarbij belangrijke conceptuele aspecten een rol spelen. Vervolgens wordt met het begrip structure sense dieper gekeken naar wat er aan de hand zou kunnen zijn. Daar is gevonden dat de kern van de algebraïsche bekwaamheden bestaat uit het flexibel kunnen omgaan met de proces-objectdualiteit en dat dit voor veel leerlingen nauwelijks bereikt wordt. Dit betekent dat de meerderheid van de leerlingen onvoldoende conceptuele bekwaamheden ontwikkelt. Tenslotte zijn de twee grote wiskundemethoden geanalyseerd op de vraag in hoeverre deze de leerlingen ondersteunen bij het ontwikkelen van deze conceptuele bekwaamheden. Daar is gevonden dat deze methoden geen systematische aanpak hebben om de leerlingen te helpen een brug te slaan tussen de op realistisch wiskundeonderwijs van de onderbouw gebaseerde aanpak en de formele aanpak van de bovenbouw, en derhalve de leerlingen onvoldoende helpen hun conceptuele bekwaamheden te ontwikkelen.

Als beperking voor het onderzoek wordt genoemd dat slechts 277 van de oorspronkelijke ruim duizend leerlingen aan alle vier de toetsen meededen. Toch noemt de onderzoekster de bevindingen representatief op grond van andere Nederlandse onderzoeken. De vier toetsen hadden in aanvang weliswaar een exploratief karakter, maar door de focus op de twee genoemde theoretische inkaderingen, *structure sense* en proces-objectdualiteit, zijn de toetsen boven dit karakter uitgestegen. Nader onderzoek is, zoals de onderzoekster terecht meldt, wel nodig. Verder noemt de onderzoekster als beperking dat niet naar de rol van de leraar bij het ontwikkelen van algebraïsche bekwaamheden is gekeken.

Ten slotte

In het wiskundeonderwijs wordt veel gebruik gemaakt van Kilpatrick et al. (2001) die de volgende lijnen met betrekking tot 'mathematical proficiency' onderscheiden:

– conceptual understanding: comprehension of mathematical concepts, operations, and relations
– procedural fluency: skill in carrying out procedures flexibly, accurately, efficiently, and appropriately
– strategic competence: ability to formulate, represent, and solve mathematical problems
– adaptive reasoning: capacity for logical thought, reflection, explanation, and justification
– productive disposition: habitual inclination to see mathematics as sensible, useful, and worthwhile, coupled with a belief in diligence and one's own efficacy.

Vervangen we in deze opsomming 'mathematical' door 'algebraic' dan zien we dat Van Stiphout enerzijds verder gaat door aandacht te besteden aan de ontwikkeling door de jaren heen in het leren van wiskunde/algebra. Anderzijds blijft de lijn van de procedurele vlotheid bij Van Stiphout enigszins impliciet. De heuristische kant van de strategische lijn krijgt een beetje aandacht in hoofdstuk 4 en in haar reflecties op haar onderzoek als geheel. Nu moet wel worden opgemerkt dat de strategische lijn (die hoort bij *problem solving*, en dat is wat anders dan 'handig sommen maken') een heel lastige is. Van Stiphout gaat ook niet in op de houding ten opzichte van wiskunde. Wat betreft het ontwikkelen van een positieve houding ten opzichte van wiskunde beperkt zij zich tot wat de methoden hieraan doen: er wordt voornamelijk aan gewerkt door de aanwezigheid van contexten, niet door prikkelende opgaven. Hier komt de rol van de leraar als spilfiguur in het onderwijs des te sterker naar voren.

Wat mij ten slotte opvalt in dit promotieonderzoek is dat het zich verre houdt van de discussie tussen realistisch versus traditioneel reken/wiskundeonderwijs. Het richt zich op wat er 'in de hoofden van de leerlingen moet gebeuren' ten einde relevante wiskundige activiteiten uit te voeren. Daarbij neemt het als uitgangspunt dat procedureel en conceptueel wiskundeonderwijs bij elkaar horen. Hopelijk kunnen we de discussie realistisch-traditioneel nu achter ons laten en de aandacht richten op hoe beide benaderingen, procedureel en conceptueel, in samenhang de noodzakelijke implementatie kunnen krijgen. Want daarover moet het didactisch debat gaan. Van Stiphout heeft daaraan een positieve bijdrage geleverd met haar indeling van opgaven van de twee geanalyseerde wiskundemethoden in de categorieën:

– redeneren en berekenen binnen de context ten behoeve van het ontwikkelen van informele strategieën
– ontwikkelen van wiskundige eigenschappen en kenmerken van de wiskundige aspecten uit de context waaronder het rekenen en redeneren met formules
– bevorderen van de conceptuele bekwaamheden wat onder meer inhoudt dat er algebraïsche activiteiten plaats vinden los van de inhoud
– verbinden van de context-gebonden, vooral informele activiteiten met de formele.

Bert Zwaneveld
emeritus hoogleraar professionalisering van de leraar in het bijzonder in het wiskundeonderwijs en informaticaonderwijs, Open Universiteit

Literatuur

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(2), 155-177.
Kilpatrick J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it Up. Helping Children Learn Mathematics*. Washington: National Research Council.