Wat te bewijzen is (57)

Rubriek

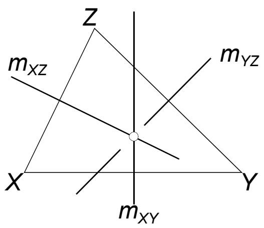
E: Kun je bewijzen dat de drie hoogtelijnen (van een driehoek) door één punt gaan?
S: Wat zijn dat eigenlijk, hoogtelijnen?

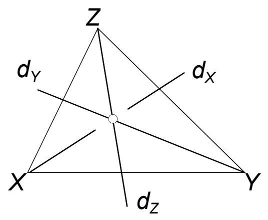
Deze ‘petite conversation’ vond plaats in een sportschool tussen vriend Ed de Moor en een student in de bedrijfskunde die even daarvoor had gezegd colleges lineaire algebra en analyse te volgen. Dat er geen klassieke meetkunde op het (verplichte) menu staat, bij welke exacte studie dan ook, dat is al jaren zo. En dat die mooie drie-hoogtelijnen-stelling alleen nog bij uitzondering in het voortgezet onderwijs wordt gepresenteerd, is ook oud nieuws. Want waarom zou je iets onderwijzen dat in het vervolgonderwijs niet meer terugkomt? In mijn naïviteit ben ik geneigd het om te draaien: juist omdat synthetische meetkunde niet in het hoger onderwijs figureert, zou je er op school wat meer aan moeten doen! Want is er een geschikter gebied om de fascinatie te ervaren die van wiskunde kan uitgaan?

Het orthocentrum van een driehoek

Knip een willekeurige scherphoekige driehoek uit een vel papier of dun karton en vouw achtereenvolgens de drie middelloodlijnen, bissectrices en hoogtelijnen van die driehoek. Ook bij niet perfect nauwkeurig vouwen kun je je niet aan de indruk onttrekken dat elk van deze drietallen ‘bijzondere lijnen’ concurrent is.

Voor middelloodlijnen en bissectrices (of deellijnen) lijken de concurrentiebewijzen op elkaar als twee druppels water. Neem het snijpunt van twee van de drie lijnen. In het geval van de middelloodlijnen ligt dat punt even ver van twee paren hoekpunten. Omdat die paren een gemeenschappelijk element hebben, ligt het snijpunt ook even ver van het derde paar hoekpunten en dus op de middelloodlijn daarvan. Bij de bissectrices moet ik hoekpunten vervangen door zijden en dan komt er een volstrekt analoge redenering.

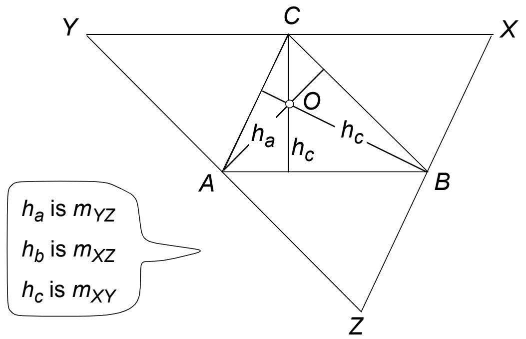




Polya karakteriseert dit type bewijs in zijn *Mathematical Discovery* als *pattern of two loci*. Ook voor de hoogtelijnen kan zo’n patroon van twee (eigenlijk drie) ‘loci’ hetzij direct, hetzij indirect, worden gebruikt.

Met indirecte toepassingen van *Polya’s pattern* bedoel ik dat de drie-hoogtelijnenstelling via de middelloodlijnen of via de bissectrices kan worden bewezen. De eerste beurt is aan de middelloodlijnen.

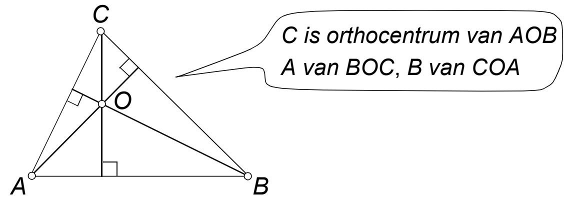
Trek lijnen door de hoekpunten evenwijdig aan de zijden van de driehoek ABC en er ontstaat een met ABC gelijkvormige driehoek XYZ (vergrotingsfactor 2). Gemakkelijk is nu aan te tonen dat de hoogtelijnen van de kleine driehoek juist de middelloodlijnen zijn van de grote driehoek en dus concurrent zijn. Q.E.D.



Het snijpunt O van de drie hoogtelijnen van een driehoek wordt het *hoogtepunt* of *orthocentrum* van die driehoek genoemd. Als de driehoek stomphoekig is, ligt het orthocentrum buiten die driehoek, zoals het middelpunt van de omgeschreven cirkel van een stomphoekige driehoek ook buiten die driehoek ligt. Bovenstaande bewijs blijft in dat geval van kracht.

Dit geldt ook voor het (triviale) geval van een rechthoekige driehoek waarbij het orthocentrum het hoekpunt van de rechte hoek is (en het midden van de schuine zijde van de omgeschreven driehoek).

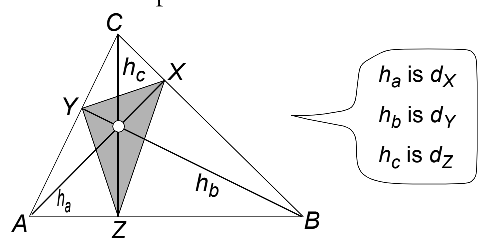
Merk op dat bij een scherphoekige ABC de lijnstukken AO, BO en CO de driehoek in drie stomphoekige driehoeken verdelen (ABO, BOC en COA) waarvan de orthocentra juist de punten C, A en B zijn. Men noemt $OABC$ in dit geval een orthocentrisch viertal.



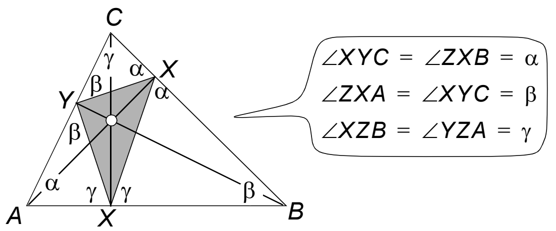
Dit maakt dat bij een bewijs van de concurrentie van de drie hoogtelijnen van een niet-rechthoekige driehoek kan worden volstaan met het geval waarin de driehoek scherphoekig is.

Met bissectrices

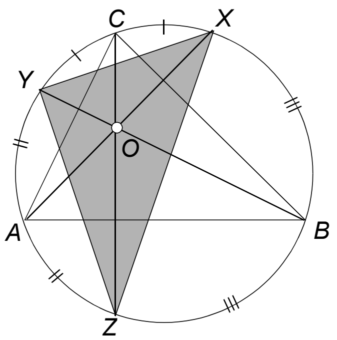
Het bewijs van het door één punt gaan van de drie hoogtelijnen van een driehoek via middelloodlijnen was vroeger op school heel gangbaar. Minder bekend was het bewijs gebaseerd op de bissectrices van de zogenaamde voetpuntendriehoek.



Ik mag me beperken tot een scherphoekige driehoek ABC. Het bewijs dat de hoogtelijnen de hoeken van de voetpuntendriehoek halveren rust op het feit dat de zijden van XYZ *anti-parallel* zijn met die van ABC.
De term houdt verband met hoekgelijkheden – juist andersom als bij parallellen – vandaar dat 'anti'.



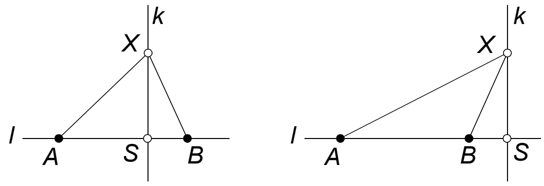
Het waarom van deze gelijkheden berust op gelijkvormigheid van driehoeken. Ik noem de lengten van ABC's zijden a, b, en c. De lijnstukken XC en YC verhouden zich als b en a, ze zijn immers gelijk aan $b\cos\gamma$ en $a\cos\gamma$. Daaruit volgt nu dat driehoek XYZ gelijkvormig is met ABC (twee zijdenparen evenredig en de ingesloten hoek gelijk) met als gevolg dat haar hoeken bij X en Y gelijk zijn aan α en β. Enzovoort.
Voor de leerling die bekend is met de eigenschap dat in een cirkel bij gelijke omtrekshoeken gelijke bogen horen, is hier nog een alternatief.



De zes hoeken die de hoogtelijnen in A, B en C maken met de zijden van driehoek XYZ zijn beurtelings gelijk aan $90° - \gamma$, $90° - \beta$ en $90° - \alpha$. Dat levert drie paar gelijke bogen op de omgeschreven cirkel en daaruit volgt dat AX, BY en CZ de bissectrices zijn van driehoek XYZ. Ik merk nog op dat driehoek XYZ het beeld is van de voetpuntendriehoek bij een vermenigvuldiging vanuit het orthocentrum met factor 2.

Een directe toepassing van het 2-loci-pattern

Beschouw de lijn l met daarop de punten A en B.



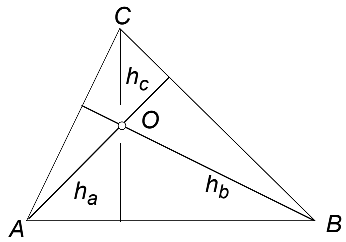
Kies een punt S op l en richt daar de loodlijn k op l op. Laat X een variabel punt van k zijn. Ik pas twee keer de stelling van Pythagoras toe (in de driehoeken ASX en BSX) en concludeer:

$$|XA|^2 - |XB|^2 = |SA|^2 - |SB|^2 \qquad (*)$$

De lijn k blijkt de meetkundige plaats te zijn van de punten X die voldoen aan (*). Deze bewering houdt pas steek als ik kan aantonen dat *elk* punt X in het vlak dat voldoet aan (*) ook op k moet liggen. Projecteer zo'n punt X loodrecht op l, dat geeft het punt S'.
Het gaat er nu om of uit

$$|S'A|^2 - |S'B|^2 = |SA|^2 - |SB|^2 \qquad (*)$$

volgt dat S en S' samenvallen. Het eenvoudigst is het om l te promoveren tot getallenlijn en A, B, S en S' coördinaten 0, 1, s en s' te geven. Er volgt dan na wat rekenwerk de identiteit $s = s'$.
Laat nu ABC een driehoek zijn met de hoogtelijnen h_a, h_b en h_c en laat O het snijpunt zijn van h_a en h_b.



Er geldt dan:

$$\begin{array}{rl} & |OB|^2 - |OC|^2 = |AB|^2 - |AC|^2 \\ & |OC|^2 - |OA|^2 = |BC|^2 - |BA|^2 \\ + & \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ & |OB|^2 - |OA|^2 = |CB|^2 - |CA|^2 \end{array}$$

En de conclusie moet zijn dat C en O op dezelfde loodlijn op AB liggen, ofwel h_c gaat door O.

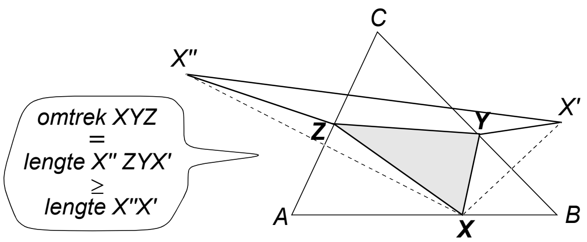
Toen de 'vectormeetkunde' op school floreerde, werd goede sier gemaakt met een door lineaire algebra gedragen bewijs: misschien wel de achtergrond voor de vraag in de sportschool aan het begin van dit stukje. Laat O met de nulvector corresponderen en A, B en

C respectievelijk met de vectoren **a**, **b** en **c**.
Uit O op h_a volgt dan: $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{c}) = 0$, dus $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$
En uit O op h_b volgt: $\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a}) = 0$, dus $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$
Gevolg: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$, dus $\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = 0$ ofwel $OC \perp AB$.
Mooi, maar typisch zo'n voorbeeld van een 'tweede-ronde-bewijs'. Voor menige leerling zal deze demonstratie niet kunnen wedijveren met het bewijs via de middelloodlijnen van de omgeschreven driehoek.

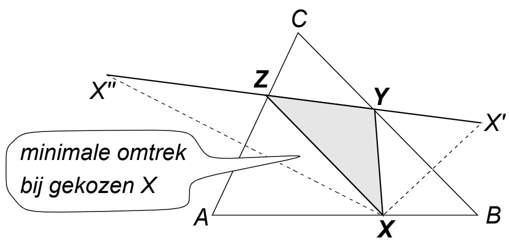
Een optimaliseringsprobleem

Ga uit van een scherphoekige driehoek ABC (hoeken α, β en γ) en beschouw alle driehoeken XYZ waarvan de hoekpunten op de drie zijden van ABC liggen. Het zal duidelijk zijn dat de omtrek van XYZ varieert. De maximale omtrek krijg je natuurlijk door X, Y en Z te laten samenvallen met de drie hoekpunten, maar hoe zit het met de minimale omtrek? Ik volg de aanpak van de Hongaarse wiskundige Féjer die zijn oplossing vond toen hij student was.

Laat X een punt van de zijde AB zijn en spiegel dit in de zijden BC en CA. Dat geeft de punten X' en X''.

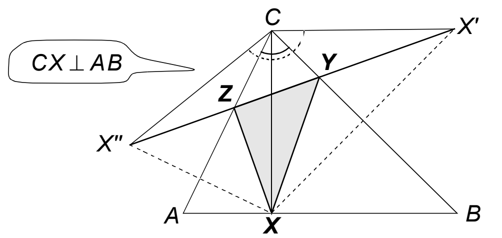


Omdat XY en XZ respectievelijk even lang zijn als $X'Y$ en $X''Z$ weet ik dat de omtrek van XYZ groter dan of gelijk aan de lengte van $X'X''$ moet zijn.
Door nu Y en Z in de snijpunten van $X'X''$ met BC en CA te plaatsen krijg ik een driehoek met een omtrek die bij de gekozen positie van X minimaal is.

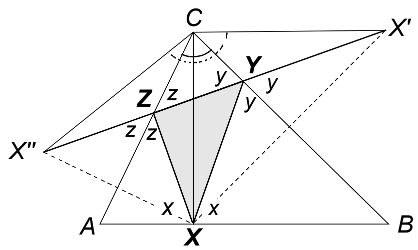


Om nu uit te vinden bij welke positie van X op de zijde AB je het minimum van al die minima vind, verbind ik het punt C met de punten X, X' en X''.

Omdat X' en X'' de spiegelbeelden van X in BC en CA zijn, geldt: $|CX| = |CX'| = |CX''|$ en bovendien $\angle X'CX'' = 2\gamma$. Bij variatie van X verandert de lengte van $X'X''$ (= omtrek XYZ), maar niet de tophoek van de gelijkbenige driehoek $CX'X''$. Nu is duidelijk dat $|X'X''|$ minimaal is als de opstaande zijden van die driehoek dat zijn, dus als $|CX|$ minimaal is! Maar dat is juist



het geval als X het voetpunt is van de hoogtelijn uit C. Daarmee heb ik, uitgaande van een bewegend punt X op AB, de driehoek XYZ gevonden met de kleinste omtrek. Ik ben echter nog niet klaar. Er is bewezen dat er geen ingeschreven driehoek met kleinere omtrek kan zijn, maar ik weet nog niet zeker of XYZ de voetpuntendriehoek is. Natuurlijk, je kunt hetzelfde verhaal ophangen voor Y (of Z), maar het zou kunnen dat je op deze manier drie verschillende minimale driehoeken vindt, die dan natuurlijk wel dezelfde (kleinste) omtrek moeten hebben. Ik zal aantonen dat de via X geconstrueerde punten Y en Z ook voetpunten van hoogtelijnen zijn, ofwel dat de zijden XY, YZ en ZX antiparallellen in driehoek ABC zijn. Dat wil zeggen dat ze hoeken maken met de zijden die in de 'anti-volgorde' gelijk zijn aan α, β en γ.



Kijk naar de drie hoeken met hoekpunt Y, met y aangeduid in de figuur. Dat deze drie hoeken gelijk zijn, volgt uit het feit dat X en X' elkaars spiegelbeeld zijn in de lijn BC. Evenzo zijn de drie hoekjes z aan elkaar gelijk. Let nu op de twee hoeken x. Dat die ook aan elkaar gelijk zijn, volgt uit het aloude principe van Heron, namelijk dat voor de kortste route van punt Y naar Z via de lijn AB geldt: hoek van 'inval' = hoek van 'uitval'. Een eigenschap die via spiegeling (in AB) bewijsbaar is en die later bekend werd als het principe van Fermat voor de terugkaatsing van een lichtstraal.
Neem nu de hoekensommen in de driehoeken AXZ, BYX en CZY. Er geldt:

$$\alpha + x + z = \pi,\ \beta + y + x = \pi \text{ en } \gamma + z + y = \pi$$

Optelling leidt tot $2(x+y+z)+\pi = 3\pi$, en daaruit volgt dan $x+y+z = \pi$. Omdat ook $\alpha + x + z = \pi$ volgt $x = \alpha$. En net zo: $y = \beta$ en $z = \gamma$.

Kortom, de via het voetpunt van de hoogtelijn uit C geconstrueerde driehoek XYZ valt samen met de voetpuntendriehoek van ABC en dat is dus de unieke ingeschreven driehoek met minimale omtrek!

Martin Kindt, *M.Kindt@uu.nl*